Chapitre 1 — Compléments de topologie. Théorème de Baire

I Espaces topologiques

En L3 et à l'agrégation, les concepts de topologie considérés sont toujours associés à une distance (on a $x_n \to x$ si $\lim d(x_n, x) = 0$). Mais il faut parfois sortir de ce cadre. Par exemple, on a défini en AF1 la convergence faible d'une suite $x_n \in X$ (espace de Banach) comme $x_n \to x$ faible si $\forall f \in X^*$ $f(x_n) \to x$.

On peut montrer qu'il n'y a pas de distance sur X qui correspond à cette ~~fort~~ notion de convergence.

Définition Soit X un ensemble. On appelle topologie sur X un ensemble $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ tel que

- $\phi \in \mathcal{T}$, $X \in \mathcal{T}$
- $\mathcal{T}$ est stable par union quelconque
- $\mathcal{T}$ est stable par intersection finie

On dit que $(X, \mathcal{T})$ est un espace topologique ; les éléments de $\mathcal{T}$ s'appellent les ouverts de X.

Exemple Si (X, d) est un espace métrique, on dit que ~~A est~~ $A \subset X$ est ouvert si $\forall x \in A$ $\exists \varepsilon > 0$ $B(x, \varepsilon) \subset A$. L'ensemble des ouverts de (X, d) forme une topologie, dite ~~induite par~~ associée à d.

Une topologie $\mathcal{T}$ ~~pour~~ telle qu'il existe une distance d pour laquelle elle est ~~induite~~ associée, est dite métrisable.

Exemple $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$ est-elle métrisable ?

Oui, par la distance discrète $d(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq y \\ 0 & \text{si } x = y \end{cases}$

<u>Exemple</u> $\tau = \{\phi, X\}$ est-elle métrisable ?

Non. Une topologie τ est dite séparée si $\forall x \neq y$ dans X il existe des ouverts O_x O_y avec $x \in O_x$ $y \in O_y$ $O_x \cap O_y = \phi$.

$\{\emptyset, X\}$ n'est pas séparée si $\operatorname{card}(X) \geq 2$

Mais toute topologie métrisable est séparée

(Si $x \neq y$, alors $d(x,y) > 0$ et les boules $B(x,r)$ et $B(y,r)$ pour $r = \frac{1}{2} d(x,y)$ sont disjointes).

~~On dit qu'une partie A est un voisinage de x si A contient un ouvert contenant x~~

<u>Attention</u> ~~la topologie~~ si τ est une topologie métrisable, ~~la~~ il existe plusieurs distances qui l'induisent. Par exemple, si d induit τ, c'est aussi le cas de $2d$ mais aussi de la distance

$$d'(x,y) = \min\left(d(x,y), 1\right)$$

(on peut donc toujours travailler avec des distances ≤ 1)

<u>Attention</u> le concept de <u>complétude</u> ~~est~~ et celui de suite de CAUCHY est lié à la distance sous-jacente.

Par exemple sur $\mathbb{R}$, la distance d usuelle induit la même topologie que la distance $d'(x,y) = |\arctan x - \arctan y|$

Mais la suite (x_n) définie par $x_n = n$ est une suite de CAUCHY non convergente ...

On étend au cas des espaces topologiques le vocabulaire des espaces métriques

~~Un~~

Soit (X,τ) espace topologique | Si $Y \subset X$, l'ensemble $\{O \cap Y \,;\, O \in \tau\}$ est une topologie sur Y appelée topologie induite par τ.

$A \subset X$ est fermé si $X \setminus A$ est ouvert

~~L'intérieur de $A \subset X$~~

$A \subset X$ est un voisinage de $x \in X$ si $\exists$ ouvert U avec $x \in U \subset A$

L'intérieur de A est l'ensemble des points dont A est un voisinage, c'est la réunion des ouverts contenus dans A

L'adhérence de A est $\{x \in X$ tq tout voisinage de x intersecte $A\}$, c'est l'intersection des fermés contenant A

Une suite (x_n) de X converge vers x si pour tout voisinage V de x $\exists N$ tq $\forall n \geq N$ $x_n \in V$

Si (X,τ_X) et (Y,τ_Y) sont deux espaces topologiques, une fonction

$f : X \to Y$ est continue si $\forall O \in \tau_Y$ $f^{-1}(O) \in \tau_X$

On dit que f est un homéomorphisme si f est bijective et f et f^{-1} sont continues

__Compacité__ Un espace topologique (X,τ) est dit __compact__ s'il est séparé et si tout recouvrement ouvert de X admet un sous-recouvrement fini

(si $(O_\alpha)_{\alpha\in A} \subset \tau$ vérifie $\bigcup_{\alpha\in A} O_\alpha = X$, alors $\exists F \subset A$ fini tel que $\bigcup_{\alpha\in F} O_\alpha = X$)

__Proposition__ Si (X,τ) est compact et si $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de fermés non vides, alors $\cap F_n$ est non vide

(Si $\cap F_n = \emptyset$, alors $O_n = X \setminus F_n$ serait un recouvrement ouvert de X, donc on aurait $X = \bigcup_{n\in F} O_n$ pour $F \subset \mathbb{N}$ fini

$= O_{n_0}$ $(n_0 = \max F)$

et donc $F_{n_0} = \emptyset$, contradiction)

Un espace topologique est <u>localement compact</u> ~~si tout point~~ s'il est séparé et si tout point admet un voisinage compact. (4)

<u>Ex</u> : un evn de dimension finie est localement compact.
(et réciproquement)

~~topologie~~
<u>~~Produit~~</u>

<u>Produit d'espaces topologiques</u>

Soient $(X_1, \tau_1) \dots (X_p, \tau_p)$ des espaces topologiques
On appelle rectangle ouvert un ensemble de la forme
$O_1 \times \dots \times O_p \qquad O_i \in \tau_i$
Et on ~~les~~ note τ l'ensemble des réunions quelconques de rectangles ouverts.
C'est une topologie, appelée topologie produit.

(Si $A \subset X_1 \times \dots \times X_p$, on a $A \in \tau$ si et seulement si
$\forall (x_1, \dots x_p) \in A \quad \exists O_1 \in \tau_1 \dots \exists O_p \in \tau_p$ avec $x_i \in O_i \ \forall i$
et $O_1 \times \dots \times O_p \in \tau$)

De plus, pour $i = 1 \dots p$, l'application de $i^{\text{ème}}$ projection
$$pr_i : X_1 \times \dots X_p \to X_i$$
$$(x_1, \dots x_p) \to x_i$$
est continue, et τ est la ~~plus~~ topologie la moins fine rendant continues $pr_1, \dots pr_p$.

[en effet $O_1 \times \dots \times O_p = \bigcap_{i=1}^{p} pr_i^{-1}(O_i)$]

Si on suppose maintenant que $\forall i$ d_i est une distance sur X_i qui induit τ_i, alors ~~on~~ la distance sur $X_1 \times \dots \times X_p$ définie par
$$d((x_1, \dots x_p), (y_1 \dots y_p)) = \max_{1 \le i \le p} d(x_i, y_i) \quad \text{induit } \tau.$$
(exercice)

Si maintenant $(X_i, \tau_i)_{i\in I}$ est une famille quelconque d'espaces topologiques, on peut définir sur $X = \prod_{i\in I} X_i = \{ (x_i)_{i\in I} : \forall i \in I \ x_i \in X_i \}$ la topologie produit comme la topologie la moins fine rendant continues les applications $pr_i : X \to X_i$ pour $i \in I$. C'est l'ensemble des réunions quelconques de cylindres $\prod Y_i$, $Y_i \in \tau_i$ avec $\{i \text{ tq } Y_i \neq X_i\}$ fini

<u>Exemple</u> cas métrisable, produit dénombrable

Soient $(X_i, d_i)_{i\in\mathbb{N}}$ des espaces métriques avec $d_i \leq 1$

(on peut toujours remplacer d_i par $\min(d_i, 1)$)

On définit, pour $x, y \in \prod_{i\in\mathbb{N}} X_i$

$$d((x_i),(y_i)) = \sum_{i=0}^{\infty} \min(2^{-i}, d_i(x_i, y_i))$$

Alors d est une distance sur $\prod_{i\in\mathbb{N}} X_i$ associée à la topologie produit

- d distance : facile
- On doit montrer l'égalité entre τ (la topologie produit) et τ_d (la topologie induite par d).

→ Si $A \in \tau$ et $x \in A$ alors il existe un cylindre C tel que $x \in C \subset A$ $\quad C = B_{d_1}(x_1, \varepsilon_1) \times \dots \times B_{d_p}(x_p, \varepsilon_p) \times X_{p+1} \dots$

et on a $B_d(x, \varepsilon) \subset C$ pour $\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \dots \varepsilon_p, 2^{-p})$

- Si $A \in \tau_d$ et $x \in A$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B_d(x, \varepsilon) \subset A$

Pour p assez grand, $\sum_{i>p} 2^{-i} < \varepsilon$ et on peut trouver $\varepsilon_1 \dots \varepsilon_p > 0$ tels que $\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_p + \sum_{i>p} 2^{-i} < \varepsilon$, ce qui fait que le cylindre

$$B_{d_1}(x_1, \varepsilon_1) \times \dots \times B_{d_p}(x_p, \varepsilon_p) \times X_{p+1} \times \dots$$

est inclus dans A.

~~Remarque~~ ... la topologie produit est la topologie de la convergence simple

Un théorème important est le

Théorème de TYCHONOFF

> Si (X_i, τ_i) est une famille d'espaces topologiques compacts, leur produit est compact.

Remarque Soit $(X_i, \tau_i)_{i \in I}$ et τ la topologie produit sur $X = \prod X_i$.
Soient $x^n = (x_i^n)_{i \in I}$ $(n \in \mathbb{N})$ et $x = (x_i)_{i \in I}$
Alors $x^n \to x$ pour $\tau \iff \forall i \in I \; x_i^n \to x_i$

Preuve dans le cas métrisable pour un produit dénombrable.

Soit $(x^n)_n$ une suite d'éléments de $X = \prod X_i$

chaque x^n est une suite $(x_i^n)_{i \in \mathbb{N}}$ avec $x_i^n \in X_i$

- Comme X_1 est compact, il existe une sous-suite $(x_1^{\sigma_1(n)})$ qui converge vers $x_1 \in X_1$
- Comme X_2 est compact, il existe ~~une sous suite~~ $(x_2^{\sigma_2(n)})$, sous-suite de $(x_2^{\sigma_1(n)})$ qui converge vers $x_2 \in X_2$
- On définit ainsi par récurrence sur i, pour tout $i \in \mathbb{N}$, $(x_i^{\sigma_i(n)})$, sous-suite de $(x_i^{\sigma_{i-1}(n)})$ qui converge vers $x_i \in X_i$
- On définit une extraction τ par $\tau(n) = \sigma_n(n)$

Alors on a, pour tout i, $(x_i^{\tau(n)})_n$ converge vers x_i

Exercice : montrer ~~que le théorème de~~ que X, Y compacts $\Rightarrow X \times Y$ compact.

Exemple Soit I un ensemble non dénombrable, la topologie-produit sur $\{0,1\}^I$ n'est pas métrisable.

~~En effet, si elle l'était~~

Soit $x = (x_i)_{i \in I}$ avec $x_i = 0 \; \forall i$

Si la topologie produit était métrisable, on aurait une suite d'ouverts (O_k)

$$\{x\} = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} O_k$$

Chaque ouvert O_k contient un cylindre contenant x