II Théorème de BAIRE

théorème de BAIRE

Soit X un espace métrique complet et $(F_n)_{n}$ une suite de fermés d'intérieur vide. Alors $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ est d'intérieur vide

On dit qu'une partie $A \subset X$ est maigre si elle est incluse dans une réunion dénombrable de fermés d'intérieur vide.

Le théorème de BAIRE implique que la réunion d'une suite de parties maigres est maigre.

On dit que A est comaigre si $X \setminus A$ est maigre. Comaigre $\Rightarrow$ dense

Pour démontrer le théorème de BAIRE, on utilise la propriété ~~est~~ des "fermés emboîtés"

Si X est métrique complet, et $\bar{B}_n$ une suite décroissante de fermés vérifiant $\mathrm{diam}(\bar{B}_n) \to 0$, alors $\bigcap \bar{B}_n \neq \emptyset$

(Preuve : choisir $x_n \in \bar{B}_n$; (x_n) est de CAUCHY donc converge avec $x \in \bigcap \bar{B}_n$)

~~On~~ Le théorème de BAIRE s'énonce parfois sous la forme "complémentaire"

Soit O_n une suite d'ouverts denses, alors $\bigcap O_n$ est dense

Preuve : Il faut montrer que tout ouvert $\Omega \subset X$ non vide intersecte $\bigcap O_n$

~~Comme O_1 est~~ dense, ~~existe~~ $O_1 \cap \Omega$ est

On construit une suite décroissante de boules $(\bar{B}_n)$ avec $\mathrm{diam}(\bar{B}_n) \leq 2^{-n}$ et $\bar{B}_n \subset O_n \cap \Omega$

- Comme O_1 est dense, ~~B_1~~ $O_1 \cap \Omega$ est non vide donc contient une boule fermée $\bar{B}_1$ de rayon $\leq \frac{1}{2}$
- Comme O_2 est dense, $B_1 \cap \Omega \cap O_2$ est non vide donc contient une boule fermée $\bar{B}_2$ de rayon $\leq \frac{1}{2^2}$

[B_n = boule ouverte de même centre, rayon que la boule fermée $\bar{B}_n$]

Exemple : dans $\mathbb{R}$, toute partie dénombrable est maigre

dans $\mathbb{R}^d$, toute union dénombrable de sous-espaces stricts est maigre

Exo : trouver une partition $\mathbb{R} = A \cup B$ avec A maigre B de mesure nulle

Application : fonctions de première classe

On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est de première classe si elle est limite simple d'une suite de fonctions continue

__Ex :__ f continue est de première classe

$\mathbb{1}_{[0,+\infty[}$ est de première classe.

__Théorème__ Soit f une fonction de première classe. Alors $\{x \in \mathbb{R} \text{ tq. } f \text{ est continue en } x\}$ est comaigre (et donc dense)

~~Preuve~~ $\cancel{f = \lim f_n}$

~~Soit~~ $\cancel{F_{k,n} = \{x \in \mathbb{R} \quad \forall p,q \geq n \quad |f_p(x) - f_q(x)| \leq \frac{1}{k}\}}$ ~~fermé~~

$\cancel{\forall k \in \mathbb{N}^* \quad \bigcup F_{k,n} = \mathbb{R}}$ ~~car~~ $\cancel{(f_n(x))}$ ~~est de CAUCHY~~

Vocabulaire : dans un espace topologique, ~~on~~ on appelle

F_σ une partie qui est réunion dénombrable de fermé

G_δ ——— intersection dénombrable d'ouverts

__Lemme__ Si f est de première classe, alors

$\forall F \subset \mathbb{R}$ fermé, $f^{-1}(F)$ est un G_δ

($\Leftrightarrow \forall O \subset \mathbb{R}$ ouvert, $f^{-1}(O)$ est un F_σ)

__Preuve__ $f = \lim f_n$ avec f_n continue

On écrit F comme G_δ

$$F = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} O_k \qquad O_k = \{x \in \mathbb{R} \quad d(x, F) < \frac{1}{k}\}.$$

alors
$$f^{-1}(F) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}^*} \bigcup_{n \geq k} f_n^{-1}(O_k)$$

$\boxed{\subset}$ Si $f(x) \in F$ alors $\forall k \; f(x) \in O_k$ donc $f_n(x) \in O_k$ pour n assez grand

$\boxed{\supset}$ Si $\forall k \; \exists n_k \geq k \quad f_{n_k}(x) \in O_k \quad d(f_{n_k}(x), F) < \frac{1}{k}$

$f_{n_k}(x) \to f(x)$ donc $d(f(x), F) = 0 \Rightarrow f(x) \in F$

Preuve du théorème

Soit (V_n) une base dénombrable d'ouverts de $\mathbb{R}$

(= toute ouvert est réunion de certains de (V_n)).

<u>Ex</u> : $(V_n) = \{$ intervalles ~~deux~~ ouverts à extrémités rationnelles $\}$

f continue en $x \Rightarrow$ Pour tout n tel que $f(x) \in V_n$,

$f^{-1}(V_n)$ est un voisinage de x

donc $\{$points de discontinuité de $f\} = \underbrace{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \underset{\substack{\uparrow \\ F_\sigma}}{f^{-1}(V_n)} \setminus \mathrm{int}\left[f^{-1}(V_n)\right]}$

c'est une réunion dénombrable de fermés d'intérieur vide

$\Rightarrow$ maigre.

(Si X est un F_σ,

$X \setminus \mathrm{int}(X)$ est un F_σ d'intérieur vide

si $X = \bigcup F_p$ $\quad F_p$ fermé

alors $X \setminus \mathrm{int}(X) = \bigcup F_p \cap (\mathrm{int}(X))^c$)

III) Espace de BANACH : le rôle de la complétude

On travaille sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Espaces de Banach classique ℓ_p $c_0 \subset \ell_\infty$

$L^p[0,1]$ plus généralement $L^p(\Omega)$

Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$

$C(K)$ K compact

Si X, Y sont des espaces de BANACH et $T : X \to Y$ linéaire

Alors T continue $\Leftrightarrow$ $\sup\{\|Tx\|_Y : \|x\|_X \leq 1\} < \infty$ [la complétude n'est pas importante]

On pose alors $\|T\|_{op} = \sup\{\|Tx\|_Y : \|x\|_X \leq 1\}$

$= \inf\{C \text{ tel que } \forall x \in X \quad \|Tx\|_Y \leq C\|x\|_X\}$ (Exo)

et $\mathcal{L}(X,Y) = \{$ applications linéaires continues $X \to Y\}$, muni de $\|\cdot\|_{op}$ est un espace de BANACH

Si $Y = \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) on retrouve l'espace dual $X^* = \mathcal{L}(X, \mathbb{R})$

Un premier grand théorème

Théorème de BANACH-STEINHAUS (uniform boundedness principle)

Soient X, Y des espaces de Banach et $\Phi \subset \mathcal{L}(X,Y)$.

Alors Φ est borné $\quad \sup_{T \in \Phi} \|T\|_{op} < \infty$

$\Updownarrow$

Φ est ponctuellement borné $\quad \forall x \in X \quad \sup_{T \in \Phi} \|Tx\|_Y < \infty$

De plus, si Φ n'est pas borné, $\{x \in X : \sup_{T \in \Phi} \|Tx\|_Y = +\infty\}$ est comaigre dans X

<u>Preuve</u> $\Downarrow$ est évident

Supposons Φ non borné ~~et~~ et considérons

$$F_n = \{ x \in X \text{ tq } \forall T \in \Phi \quad \|Tx\|_Y \leq n \}$$

c'est un fermé (intersection de fermés...) d'intérieur vide.

[Si $B(x, \varepsilon) \subset F_n$ alors $B(-x, \varepsilon) \subset F_n$ et (convexité de F_n) $B(0, \varepsilon) \subset F_n$
donc on a $\forall T \in \Phi \quad \|y\|_X \leq \varepsilon \Rightarrow \|Ty\|_Y \leq n$ soit $\|T\|_{op} \leq \frac{n}{\varepsilon}$
contradiction

Ainsi $\cup F_n$ est maigre dans X

$$\| \quad \{ x \in X \text{ tq } \sup_{T \in \Phi} \|Tx\|_Y < \infty \} \quad \blacksquare$$

<u>Application aux séries de FOURIER</u>

Soit X l'espace des fonctions continues 2π-périodiques, muni de $\|\cdot\|_\infty$

Pour $f \in X$, on note $\underset{(k \in \mathbb{Z})}{\hat{f}(k)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{-ikt}\, dt$

$$\text{et } \underset{t \in \mathbb{R}}{(n \in \mathbb{N})} \quad S_n f(t) = \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k)\, e^{ikt}$$

théorème de DIRICHLET
- Si f est C^1 alors ~~f_n~~ $S_n f \to f$ uniformément
- ~~Comme~~ $f \in X \Rightarrow f \in L^2$, $S_n f \to f$ dans L^2

<u>théorème</u> $\{ f \in X \text{ tq } S_n f(0) \to f(0) \}$ est maigre dans X

On a alors $\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \{ f \in X \text{ tq } S_n f(\alpha) \to f(\alpha) \}$ maigre

et donc $\{ f \in X \quad \exists \alpha \in \mathbb{Q} \quad S_n f(\alpha) \to f(\alpha) \}$ maigre

mais (résultat difficile) ~~$\forall f \in X$~~ toute fonction continue a une série de FOURIER qui converge p.p.

On introduit le noyau de DIRICHLET

$$D_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikt} = e^{-int}\,\frac{1-e^{(2n+1)it}}{1-e^{it}} \qquad (t \notin 2\pi\mathbb{Z})$$

$$= \frac{e^{(n+\frac{1}{2})it} - e^{-(n+\frac{1}{2})it}}{e^{it/2} - e^{-it/2}}$$

$$= \frac{\sin (n+\frac{1}{2})t}{\sin \frac{t}{2}}$$

et $S_n f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)\, D_n(t-s)\, ds \qquad S_n f = f * D_n$

Soit $\Lambda_n : f \to S_n f(0)$, c'est une forme linéaire continue sur X

et $\|\Lambda_n\| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)|\, dt = \|D_n\|_{L^1}$

Lemme

① on a égalité $\|\Lambda_n\| = \|D_n\|_{L^1}$

② $\|D_n\|_{L^1} \to \infty$

Preuve ① Si $h(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } D_n(t) \geq 0 \\ -1 & \text{sinon} \end{cases}$ $\Leftarrow$ réunion finie d'intervalles

alors $\|D_n\|_{L^1} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(t) D_n(t)\, dt$

et on peut trouver (f_j) $-1 \leq f_j \leq 1$ telle que

$\lim f_j = h$

Alors (CV dominée) $\|D_n\|_{L^1} = \lim_{j\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_j(t) D_n(t)\, dt$

② $|\sin x| \leq |x|$ au dénominateur

$$\|D_n\|_{L^1} \geq \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} |\sin (n+\tfrac{1}{2})t| \frac{dt}{t}$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{(n+\frac{1}{2})\pi} |\sin t| \frac{dt}{t} \longrightarrow \infty \quad \text{car } \int_0^\infty \frac{|\sin t|}{t} = \infty$$

Ainsi (Λ_n) n'est pas bornée dans X^*. BANACH-STEINHAUS $\Rightarrow$ $\{f \text{ tq } (S_n f(0))_n \text{ bornée}\}$ est maigre