On dit qu'une application $f : X \to Y$ (X, Y espaces topologiques) est ouverte si $\forall U$ ouvert de X, $f(U)$ est un ouvert de Y.

Théorème de l'application ouverte

Soient X, Y deux espaces de BANACH et $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ linéaire continue surjective. Alors T est ouverte.

En particulier, il existe $r > 0$ tel que $T(\mathring{B}(0,1)) \supset \mathring{B}(0,r)$ $\left(\Leftrightarrow T(\mathring{B}(0,t)) \supset \mathring{B}(0,rt)\right)$

Preuve : Il suffit de prouver le "en particulier".

En effet $\forall x \in X$, $\forall \varepsilon > 0$ $\quad \mathring{B}(x,\varepsilon) = x + \mathring{B}(0,\varepsilon) = x + \varepsilon \mathring{B}(0,1)$

On note $x + \varepsilon A = \{ x + \varepsilon a : a \in A \}$

et donc, T étant linéaire

$$T(\mathring{B}(x,\varepsilon)) = T(x) + \varepsilon T(\mathring{B}(0,1)) \supset T(x) + \varepsilon \mathring{B}(0,r) = \mathring{B}(T(x), \varepsilon r)$$

ce qui fait que T est ouverte.

Prouvons le "en particulier". Puisque T est surjective

$Y = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{T(B(0,n))}$. Par le théorème de BAIRE, il existe n tel que $\overline{T(B(0,n))}$ est d'intérieur non vide.

Ainsi $\exists y \in Y, \varepsilon > 0$ tel que $B(y,\varepsilon) \subset \overline{T(B(0,n))}$

et donc, puisque $\overline{T(B(0,n))}$ est convexe, $B(0,\varepsilon) \subset \overline{T(B(0,n))}$.

ou encore $B(0,1) \subset \overline{T(B(0,\frac{n}{\varepsilon}))}$.

Ceci implique, en posant $\lambda = \frac{n}{\varepsilon}$, que $B(0,1) \subset T(B(0,2\lambda))$.

Soit $z \in B(0,1)$, $\exists x_1 \in B(0,\lambda)$ tel que $\|z - Tx_1\| < \frac{1}{2}$

$\exists x_2 \in B(0,\frac{\lambda}{2})$ tel que $\|z - Tx_1 - Tx_2\| < \frac{1}{4}$

$\vdots$

$\exists x_n \in B(0,\frac{\lambda}{2^{n-1}})$ tel que $\|z - Tx_1 - Tx_2 - \dots - Tx_n\| < \frac{1}{2^n}$

La série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge et $x = \sum x_n$ vérifie $z = Tx$

$\|x\| \leq 2\lambda$

Théorème d'isomorphisme de BANACH

Soient X, Y des espaces de BANACH et $T : X \to Y$ linéaire continue bijectif
Alors T^{-1} est linéaire continu

Preuve : "linéaire" : facile

"continu" : T est ouverte par le théorème de l'application ouverte ; cela revient à dire que T^{-1} est continue

Corollaire Soit X un espace vectoriel muni de deux normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, tel que $(X, \|\cdot\|_1)$ et $(X, \|\cdot\|_2)$ soient complets.
Si $\exists C$ tel que $\|\cdot\|_1 \leq C\|\cdot\|_2$ alors $\exists C'$ tel que $\|\cdot\|_2 \leq C'\|\cdot\|_1$

Preuve : appliquer le théorème d'isomorphisme à $id : (X, \|\cdot\|_2) \to (X, \|\cdot\|_1)$

Théorème du graphe fermé

Soient X, Y des espaces de BANACH, $T : X \to Y$ une application linéaire et $G(T) \subset X \times Y$, $G(T) = \{ (x, Tx) : x \in X \}$ son graphe
Alors T est continue $\Leftrightarrow$ $G(T)$ est fermé (pour la topologie produit)

Remarque : La norme sur $X \times Y$ $\|(x,y)\| = \|x\|_X + \|y\|_Y$ ~~induit~~ est associée à la topologie produit

Preuve $\Rightarrow$ toujours vrai, pour toute application entre espaces topologiques séparés

~~Si $(x, y) \notin G(T)$ alors $y \neq T(x)$ donc $\exists V$ voisinage ouvert de y tel que ~~$T(x) \in V$, puisque T est continue, $T^{-1}(V)$ est ouvert~~

en faire un lemme

Si $(x, y) \notin G(T)$ alors $y \neq T(x)$ donc il existe des ouverts disjoints U, V $y \in U$, $T(x) \in V$. Par continuité, il existe W voisinage ouvert de x tel que $T(W) \subset V$

Alors $W \times U$ est un ouvert de X, Y, disjoint de $G(T)$
[si $(z, f(z)) \in W \times U$ alors $f(z) \in U \cap V$, absurde], donc $G(T)$ est ouvert.

$\Leftarrow$ On considère sur X les normes

$$\|x\|_1 = \|x\|_X \qquad \|x\|_2 = \|x\|_X + \|Tx\|_Y$$

$(X, \|\cdot\|_2)$ est complet : si (x_n) est une suite de CAUCHY pour $\|\cdot\|_2$, alors elle converge $x_n \to x$
ainsi que (Tx_n) $\quad Tx_n \to y$ et $y = Tx$ car le graphe est fermé

donc (x_n) converge vers x dans $(X, \|\cdot\|_2)$.

Par le corollaire, $\exists\, C$ tel que $\|x\|_2 \leq C\,\|x\|_1$

donc $\|Tx\|_Y \leq C\|x\|_X$

Remarque : Un exemple d'application non continue de graphe fermé est

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Rappelons que si X est un espace de BANACH, on note $X^* = \{ f : X \to \mathbb{K}$ linéaire continue $\}$ son dual, qui est un espace de BANACH pour la norme $\|f\| = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\| \leq 1}} |f(x)|$

Pour un espace concret X, on peut facilement trouver des éléments $\neq 0$ du dual.

- Si X est un espace de Hilbert, $\langle x, \cdot \rangle$ est une forme linéaire continue et ce sont les seules (th. de RIESZ)

Ex
- Si $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ $(1 \leq p, q \leq \infty)$

  alors $\forall (x_n) \in \ell^p$, $\forall (y_n) \in \ell^q$ $\quad |\sum x_n y_n| \leq \|(x_n)\|_{\ell_p} \|(y_n)\|_{\ell_q}$ (HÖLDER)

  et donc $(x_n) \mapsto \sum x_n y_n$ est un élément de $(\ell_p)^*$

  (théorème : si $1 \leq p < \infty$, ce sont les seules).

- Pour tout espace mesuré $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$

  $\forall f \in L^p(\Omega, \mu)$, $\forall g \in L^q(\Omega, \mu)$ $\quad \int fg \, d\mu \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}$

  et donc $f \mapsto \int fg$ est ~~une forme~~ un élément de $L^p(\Omega, \mu)^*$

  (théorème : si $1 < p < \infty$, ce sont les seules)
  (ou $p = 1$ si μ σ-finie)

- Pour tout espace compact K et toute mesure Borélienne μ finie sur K

  $$I_\mu : C(K) \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto \int f \, d\mu$$ est continue

  $$\left|\int f \, d\mu\right| \leq \|f\|_\infty \, \mu(K)$$

  et toute forme linéaire est de la forme $I_\mu - I_\nu$ (th. de RIESZ)

Mais, pour un X "abstrait", il n'est même pas clair que $X^* \neq \{0\}$.

Dual réel vs dual complexe

Soit X un espace de BANACH complexe. C'est aussi un $\mathbb{R}$-ev, donc un espace de BANACH réel

On peut définir

$$X^*_{\mathbb{C}} = \{ f : X \to \mathbb{C} \quad \mathbb{C}\text{-linéaire continue} \}$$
$$X^*_{\mathbb{R}} = \{ f : X \to \mathbb{R} \quad \mathbb{R}\text{-linéaire continue} \}$$

Proposition : L'application $\varphi : f \mapsto \operatorname{Re} f$ est une bijection isométrique de $X^*_{\mathbb{C}}$ sur $X^*_{\mathbb{R}}$

Preuve
- Montrons qu'elle est isométrique

Soit $f \in X^*_{\mathbb{C}}$. Il est immédiat que $\|\operatorname{Re} f\|_{X^*_{\mathbb{R}}} \leq \|f\|_{X^*_{\mathbb{C}}}$

(tout $\lambda \in \mathbb{C}$ vérifie $|\operatorname{Re}\lambda| \leq |\lambda|$)

Soit $x \in X$, $\|x\| \leq 1$. Il existe $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = 1$ tel que $\lambda f(x) = |f(x)|$

Puis $|f(x)| = \lambda f(x) = f(\lambda x) = \operatorname{Re} f(\lambda x) \leq \|\operatorname{Re} f\|_{X^*_{\mathbb{R}}} \|x\|$

et donc $\|f\|_{X^*_{\mathbb{C}}} \leq \|\operatorname{Re} f\|_{X^*_{\mathbb{R}}}$ en prenant le sup sur x.

~~Après~~ On a donc $\|f\|_{X^*_{\mathbb{C}}} = \|\operatorname{Re} f\|_{X^*_{\mathbb{R}}}$ et φ est donc injective

- Si $\ell \in X^*_{\mathbb{R}}$, la formule

$f : x \mapsto \ell(x) - i\ell(ix)$ définit une forme $\mathbb{R}$-linéaire sur X ;

on a de plus $f(ix) = \ell(ix) - i\ell(-x) = i[\ell(x) - i\ell(ix)] = if(x)$

et f est $\mathbb{C}$ linéaire. Comme $\ell = \operatorname{Re} f = \varphi(f)$, φ est surjective ■

Théorème de HAHN-BANACH

Soit X un espace vectoriel et M un sous-espace vectoriel

Soit $f : M \to \mathbb{K}$ une forme linéaire. Alors il existe une forme linéaire $g : X \to \mathbb{K}$ qui prolonge f, c'est-à-dire telle que $g_{|M} = f$.

Preuve : Soit $(e_\alpha)_{\alpha \in A}$ une base de M, que l'on complète en une base $(e_\alpha)_{\alpha \in B}$ de X.

Pour tout choix de $(\lambda_\alpha)_{\alpha \in B \setminus A} \in \mathbb{K}$, la formule

$$g(e_\alpha) = \begin{cases} f(e_\alpha) & \text{si } \alpha \in A \\ \lambda_\alpha & \alpha \in B \setminus A \end{cases}$$ définit de manière unique un prolongement.

Si X est normé et f continue, le g ainsi construit n'est a priori pas continue (si $\sup\limits_{\alpha \in B \setminus A} \frac{|\lambda_\alpha|}{\|e_\alpha\|} = +\infty$, g est non continue). Le théorème de HAHN-BANACH dit qu'on peut ~~pr~~ trouver un prolongement continu.

Théorème de HAHN-BANACH

Soit $(X, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, $M \subset X$ un sous-espace et $f : M \to \mathbb{K}$ une forme linéaire continue. Alors il existe $g \in X^*$ qui prolonge f, et de plus

$$\|g\|_{X^*} = \sup_{\substack{x \in M \\ \|x\| \leq 1}} |g(x)|$$

Par la proposition précédente, il suffit de traiter le cas réel. Le lemme-clé est de pouvoir "rajouter une dimension"

Lemme Soit $M \subset X$ un sous-espace, $x \in X$, $f : M \to \mathbb{R}$ linéaire continue.

Alors il existe $f_1 : M + \mathbb{R}x \to \mathbb{R}$ linéaire continue telle que

$$\sup_{\substack{x \in M + \mathbb{R}x \\ \|x\| \leq 1}} |f_1(x)| \leq \sup_{\substack{x \in M \\ \|x\| \leq 1}} f(x)$$

Preuve . Si $x \in M$ il n'y a rien à faire

. Si $f = 0$ on pose $f_1 = 0$

• Sinon, on peut supposer $\|f\| = 1$

On doit déterminer la valeur de $t = f_1(x) \in \mathbb{R}$

de sorte que $\forall y \in M \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \qquad f_1(y+\lambda x) = f(y) + t\lambda$ vérifie

$$-\|y+\lambda x\| \leq f(y) + t\lambda \leq \|y+\lambda x\|$$

Lorsque $\lambda = 1$ cette condition impose

$$-\|y+x\| \leq f(y) + t \leq \|y+x\|$$

soit

$$-\|y+x\| - f(y) \leq t \leq \|y+x\| - f(y) \qquad (*)$$

OR $$\sup_{y_0 \in M} -\|y_0+x\| - f(y_0) \leq \inf_{y_1 \in M} \|y_1+x\| - f(y_1)$$

$\Big[\ \forall y_0, y_1 \in M \qquad f(y_1 - y_0) \leq \|y_1 - y_0\| \leq \|y_1 + x\| + \|y_0 - x\|$

donc $-\|y_0+x\| - f(y_0) \leq \|y_1+x\| - f(y_1) \ \Big]$

et donc on peut trouver $t \in \mathbb{R}$ qui vérifie $(*)$

On a bien $\begin{array}{l}\forall y \in M \\ \forall \lambda \in \mathbb{R}^*\end{array}$ $\quad |f_1(y+\lambda x)| = |\lambda| \, |f_1(\lambda^{-1} y + x)|$

$$\leq |\lambda| \, |f(\lambda^{-1} y) + t|$$

$$\leq |\lambda| \, \|\lambda^{-1} y + x\| = \|y+\lambda x\| \qquad \blacksquare$$

On va donner deux démonstrations du théorème : une (constructive) dans le cas séparable et une (non-constructive) dans le cas général.

<u>Preuve 1</u> : on suppose X séparable ; soit (x_n) une suite dense dans X.

On ~~peut~~ pose par récurrence $M_0 = M$ et $M_{n+1} = M_n + \mathbb{R} x_n$.

On définit alors par récurrence une suite $f_n \in M_n^*$ telle que $\|f_n\|_{M_n^*} \leq \|f\|_{M^*}$

et f_{n+1} prolonge f_n

On peut alors définir g ~~f~~ $: \bigcup_{n \geq 0} M_n \longrightarrow \mathbb{R}$ par $g(x) = f_n(x)$ si $x \in M_n$

C'est bien défini et on a $\|g(x)\| \leq \|f\| \cdot \|x\|$ pour $x \in \bigcup M_n$