Première preuve de HAHN-BANACH (cas séparable)

Soit X séparable, $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite dense dans X

On pose $M_0 = M$ et $M_{n+1} = M_n + \mathbb{R} x_n$

A l'aide du lemme, on définit alors par récurrence une suite de formes linéaires $f_n : M_n \to \mathbb{R}$ t.q. f_{n+1} prolonge f_n

$$\text{et} \quad \sup_{\substack{x\in M_n \\ \|x\|\leq 1}} |f_n(x)| = \sup_{\substack{x\in M_0 \\ \|x\|\leq 1}} |f(x)| = A$$

On peut alors définir $g : \bigcup_{n\geq 0} M_n \to \mathbb{R}$ par la formule

$$\text{si } x \in M_n \quad g(x) = f_n(x)$$

alors g est bien définie, linéaire et vérifie $|g(x)| \leq A$ $\forall x \in \bigcup M_n$, $\|x\|\leq 1$.

Comme $\bigcup M_n$ est dense dans E, on peut prolonger (de manière unique) g en une fonction $\tilde{g} : E \to \mathbb{R}$ linéaire et vérifiant $|g(x)| \leq A$ $\forall x \in E, \|x\|\leq 1$

(preuve : pour tout $x \in E$, soit x_p une suite de $\bigcup M_n$ telle que $x_n \to x$; comme g est Lipschitzienne, $g(x_p)$ est de CAUCHY et on peut poser $\tilde{g}(x) = \lim g(x_p)$; cela ne dépend pas du choix de (x_p) et $\tilde{g}$ a toutes les propriétés voulues - exercice ∎

Deuxième preuve de HAHN-BANACH (cas général)

On va utiliser l'axiome du choix sous la forme du <u>lemme de ZORN</u>

<u>Lemme de ZORN</u>

Soit E un ensemble muni d'une relation d'ordre $\leq$ (relation réflexive antisymétrique transitive)

On dit que $A \subset E$ est <u>totalement ordonnée</u> si $\forall x, y \in A$ on a $x \leq y$ ou $y \leq x$

On dit que E est <u>inductif</u> si toute partie totalement ordonnée est majorée

On dit que x est <u>maximal</u> si pour $y \in E$ $y \geq x \Rightarrow y = x$

<u>Lemme</u> Tout ensemble ordonné inductif possède un élément maximal

On considère

$$E = \{ (Y, g) : Y \subset X \text{ sous-espace vectoriel} ;\ g : Y \to \mathbb{R} \text{ forme linéaire prolongeant } f \text{ et telle que } \sup_{\substack{y \in Y \\ \|y\|=1}} |g(y)| = \sup_{\substack{x \in M \\ \|x\|=1}} |f(x)| . \}$$

ordonné pour la relation

$$(Y, g) < (Y', g') \quad \text{si} \quad Y \subset Y' \text{ et } g'_{|Y} = g$$

<u>L'ensemble E est inductif :</u>

En effet si $(Y_i, g_i)_{i \in I}$ est une partie totalement ordonnée de E, alors un majorant est donné par $Y = \bigcup_{i \in I} Y_i$ (sous-espace)

$g(y) = g_i(y)$ si $y \in Y_i$

Par le lemme de ZORN, E admet un ~~majorant (G, g)~~ élément maximal (G, g).

Montrons que $G = X$, ce qui prouve le théorème.

Sinon, il existe $x \in X \setminus G$ et le lemme nous donne un prolongement $\tilde{g}$ de g tel que $(G + \mathbb{R}x, \tilde{g}) \in E$, contredisant la maximalité ■

<u>Remarque</u> : une adaptation directe de la preuve (exercice) donne la variante suivante

Soit E un $\mathbb{R}$-ev, $p : E \to \mathbb{R}^+$ positivement homogène $(p(\lambda x) = \lambda p(x) \ \forall \lambda \geq 0)$

sous-additive $(p(x+y) \leq p(x) + p(y))$

$M \subset E$ sous-espace $f : M \to \mathbb{R}$ linéaire telle que $f \leq p$

Alors il existe $g : E \to \mathbb{R}$ prolongeant f et telle que $g \leq p$

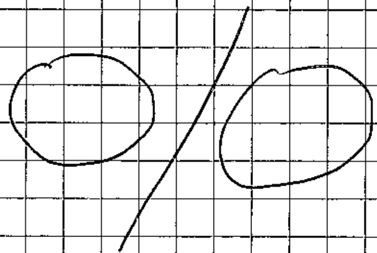
<u>Corollaire</u> Soit X un espace de BANACH et $x \in X$, $x \neq 0$

Alors il existe $f \in X^*$ telle que $\|f\| = 1$ et $f(x) = \|x\|$

<u>Preuve</u> : on prolonge la forme linéaire $\mathbb{R}x \to \mathbb{R}$, $\lambda x \mapsto \lambda$

<u>Corollaire</u> X^* sépare les points de X : $\forall x, y \in X$, $x \neq y$, $\exists f \in X^*$ $f(x) \neq f(y)$

On peut faire mieux ; non seulement X^* sépare les points de X, mais il sépare aussi les convexes disjoints, sous quelques hypothèses topologiques



Il est commode d'introduire la notion d'EVT

<u>Définition</u> Un <u>espace vectoriel topologique</u> (EVT) est un espace vectoriel X (sur $\mathbb{R}$) muni d'une topologie, compatible au sens où

$$X \times X \to X \qquad \mathbb{R} \times X \to X$$
$$(x,y) \mapsto x+y \qquad (\lambda, x) \mapsto \lambda x \qquad \text{sont continues}$$

et $\{0\}$ est fermé.

<u>Exercice</u> : un EVT est séparé.

Un exemple est un espace vectoriel normé, pour la topologie de la norme.

<u>Exercice</u> Si X est un EVT, une forme linéaire est continue $\Leftrightarrow$ continue en 0.

<u>Lemme</u> : jauge de MINKOWSKI d'un convexe

Soit X un EVT, $W \subset X$ un convexe ouvert contenant 0

On pose $j_W(x) = \inf\{t > 0 \;\; x \in tW\}$ la <u>jauge</u> de W
$(x \in X)$

Alors $j_W : X \to \mathbb{R}^+$ est continue, positivement homogène, sous-additive

et on a $W = \{x \in X : j_W(x) < 1\}$

<u>Preuve</u> : cf TD

<u>Exemple</u> : Si $\mathring{B}_X$ est la boule unité ouverte d'un espace normé,

alors $j_{\mathring{B}_X} = \|\cdot\|$

Les jauges sont les fonctions qui interviennent dans les applications de HAHN-BANACH (cf remarque précédente)

Théorème de HAHN-BANACH, séparation ouvert/fermé

Soit X un EVT réel

$F \subset X$ convexe fermé non vide $\qquad F \cap O = \emptyset$

$O \subset X$ convexe ouvert non vide

~~Alors~~ $\exists g : X \to \mathbb{R}$ forme linéaire continue, $g \neq 0$ telle que $\forall x \in F$, $\forall y \in O$ $\quad g(x) < g(y)$

et donc $\quad \sup_{x \in F} g(x) \leq \inf_{y \in O} g(y)$

Preuve On fixe $x_0 \in F$, $y_0 \in O$ $\quad z_0 = y_0 - x_0$

et on pose $W = (F - x_0) - (O - y_0) = \{ x - x_0 - (y - y_0) \quad x \in F \; y \in O \}$

$~~= \{x - y + z_0~~$

$z_0 \notin W$ (sinon on aurait $\underset{F}{x}, \underset{O}{y}$ $x = y$)

W est convexe, ouvert, $0 \in W$. Soit j_W la jauge de W

Par le lemme précédent ; j_W est positivement homogène, continue, sous-additive et $W = \{ j_W < 1 \}$

donc $j_W(z_0) \geq 1$

Soit $\quad f : \mathbb{R} z_0 \longrightarrow \mathbb{R}$

$\lambda z_0 \longmapsto \lambda \quad$ forme linéaire sur $\mathbb{R} z_0$ telle que

$f \leq j_W$

Par le théorème de prolongement (variante en remarque), on peut donc prolonger f en $g \in X^*$

$g \leq j_W$

Alors g est continue $\quad (|g(z)| \leq \max (j_W(z), j_W(-z))$

donc g continue en 0).

et $\forall x \in F$, $\forall y \in O$ $\quad \varphi(x - y + z_0) \leq j_W(x - y + z_0) < 1 \leq \varphi(z_0)$

donc $\varphi(x) < \varphi(y)$ comme voulu.

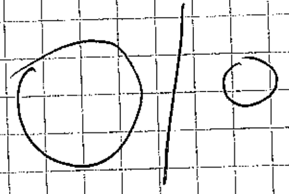
Théorème de HAHN-BANACH, séparation fermé / compact

Soit X un e.v.n. réel
$F \subset X$ convexe fermé non vide
$K \subset X$ convexe compact non vide) disjoints
Alors il existe $f \in X^*$ tel que $\sup_{x \in F} f(x) < \min_{y \in K} f(y)$

Cas complexe : même conclusion avec $\mathrm{Re}\, f$ à la place de f.

On peut alors trouver α tel que $\sup_{x \in F} f(x) < \alpha < \min_{y \in K} f(y)$

On dit que l'hyperplan affine $\{f = \alpha\}$ sépare F et K au sens strict, au sens où il définit deux demi-espaces ouverts $\{f < \alpha\}$ et $\{f > \alpha\}$ contenant respectivement F et K.



Preuve : Soit $\varepsilon = d(K, F) = \min_{x \in K} d(x, F) = \inf_{\substack{x \in K \\ y \in F}} \|x - y\| > 0$ car $F \cap K = \emptyset$

Soit $O = \{x \in X \,;\, d(x, K) < \frac{\varepsilon}{2}\} = \bigcup_{z \in K} \mathring{B}(z, \frac{\varepsilon}{2})$ ouvert convexe de X, disjoint de F

Par séparation, il existe $f \in X^*$, $f \neq 0$ tel que

$$\sup_{x \in F} f(x) \leq \underbrace{\inf_{y \in O} g(y)}_{\displaystyle = \inf_{z \in K} g(z) - \frac{\varepsilon}{2}\|f\|} \qquad O = K + \mathring{B}(0, \tfrac{\varepsilon}{2})$$

et donc $\sup_{x \in F} f(x) < \sup_{x \in F} f(x) + \frac{\varepsilon}{2}\|f\| \leq \inf_{z \in K} g(z)$ ∎

~~Déf~~ On dit qu'un EVT X est localement convexe

si, pour tout voisinage V de 0, il existe $W \subset V$ voisinage de 0 convexe ouvert symétrique ($W = -W$)

(parfois omis, définition équivalente)

Théorème Soit X un EVT localement convexe, $F \subset X$ convexe fermé non vide

$x_0 \notin F$

Alors il existe une forme linéaire continue f sur X telle que

$$f(x_0) < \inf_{x \in F} f(x)$$

Preuve On peut supposer $x_0 = 0$

$X \setminus F$ est un voisinage de 0 donc contient W voisinage convexe ouvert symétrique

On applique le théorème de séparation ouvert/fermé à $\{x_0\}$ (fermé) et W (ouvert)