Feuille d'exercices numéro 1
Espaces topologiques

Exercice 1 Compacité et topologie induite

1. Soit X un espace toplogique séparé et $F \subset X$. Montrer que si F (muni de la topologie induite) est compact, alors F est fermé dans X.
2. Soit X un espace topologique compact et $F \subset X$. Montrer que F (muni de la topologie induite) est compact si et seulement si F est fermé dans X.

Exercice 2 Image continue d'un compact

1. Soit E un espace topologique compact, F un espace topologique séparé et $f : E \to F$ une application continue. Montrer que $f(E)$ (muni de la topologie induite) est compact.
2. On suppose de plus f injective. Montrer que f est un homéomorphisme de E sur $f(E)$.

Exercice 3 Diagonale

Soit X un espace topologique séparé. Montrer que la diagonale $\Delta = \{(x,x)\,;\, x \in X\}$ est fermée dans $X \times X$ muni de la topologie produit.

Exercice 4 Topologie cofinie

Soit X un ensemble. On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des parties de X de complémentaire fini. Montrer que $\mathcal{T} = \{\emptyset\} \cup \mathcal{C}$ est une topologie sur X. Quelles en sont les suites convergentes ?

Exercice 5 Compacité vs compacité séquentielle

On dit qu'un espace métrique (X,d) est *séquentiellement compact* si tout suite d'éléments de X admet une sous-suite convergente. On démontre ici que cette notion équivaut à la compacité.

1. Montrer qu'un espace métrique compact est séquentiellement compact.
   Indication : étant donnée une suite (x_n), considérer les fermés $F_n = \overline{\{x_k \,:\, k \geqslant n\}}$.
2. Soit (X,d) un espace métrique séquentiellement compact.
   (a) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, l'espace X peut être recouvert par un nombre fini de boules de rayon ε.
   (b) Soit $(O_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de X. Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que tout boule ouverte de rayon $\varepsilon > 0$ est incluse dans un des ouverts O_i.
   (c) Conclure que X est compact.

Exercice 6 Topologie de la convergence simple

Soit I un ensemble infini non dénombrable. Montrer que la topologie produit sur $\{0,1\}^I$, sur $[0,1]^I$ ou sur $\mathbf{R}^I$, n'est pas métrisable. *Indication : dans un espace topologique métrisable, tout point admet une base dénombrable de voisinages (pourquoi ?) ; montrer que cette propriété est en défaut.*

Exercice 7 Théorème de Tychonoff pour deux espaces

Montrer que le produit de deux espaces topologiques compacts est compact.

Exercice 8 Cube de Hilbert

Soit C la partie de ℓ_2 définie par

$$C = \{(x_n) \,:\, |x_n| \leqslant 1/n\}.$$

Montrer que C est homéomorphe à l'espace $[0,1]^{\mathbf{N}}$ muni de la topologie produit.

Exercice 9 Compactifié d'Alexandroff

Soit (X, τ) un espace topologique localement compact. On considère l'ensemble $\hat{X} = X \cup \{\infty\}$ (où ∞ est un élément abstrait qui n'est pas dans X), et on définit une classe de parties $\hat{\tau} \subset \mathcal{P}(\hat{X})$ comme suit : pour $A \subset \hat{X}$,

$$A \in \hat{\tau} \iff A \in \tau \text{ ou } \hat{X} \setminus A \text{ est un compact de } X.$$

Montrer que $\hat{\tau}$ est une topologie sur $\hat{X}$, que la topologie induite sur X est τ, que $(\hat{X}, \hat{\tau})$ est compact et que X est dense dans $\hat{X}$. A quel espace familier $\hat{\mathbf{R}}$ est-il homéomorphe ?