Feuille d'exercices numéro 2
Théorème de Baire

Exercice 1 Dérivée
Montrer que si $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est une fonction dérivable, sa dérivée f' est de première classe.

Exercice 2 Une fonction de seconde classe
Montrer que $\mathbf{1}_{\mathbf{Q}} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ n'est pas une fonction de première classe, mais que c'est la limite simple d'une suite de fonctions de première classe.

Exercice 3 Bases algébriques d'un espace de Banach
Soit X un espace de Banach de dimension infinie. Montrer que si $(e_\alpha)_{\alpha \in A}$ est une base de l'espace vectoriel X, alors A est non dénombrable.

Exercice 4 Maigre vs négligeable

1. Construire, pour tout $\varepsilon > 0$, un ouvert dense de $\mathbf{R}$ de mesure de Lebesgue $\leqslant \varepsilon$.
   (**Indication :** *considérer une union d'intervalles centrés en chaque rationnel*).
2. Montrer qu'il existe une partition $\mathbf{R} = A \cup B$ avec A maigre et B de mesure nulle.
3. De telles partitions arrivent naturellement en mathématiques, en voici un exemple. On dit qu'un nombre réel x est de Liouville si, pour tout $n \geqslant 1$, il existe des entiers $p \in \mathbf{Z}$ et $q > 1$ tels que $0 < |x - p/q| < 1/q^n$. Montrer que l'ensemble des nombres de Liouville est de mesure nulle et comaigre.

Exercice 5 Pas de loi des grands nombres au sens de Baire
Dans l'espace $X = \{0,1\}^{\mathbf{N}}$ muni de la topologie produit, on considère

$$A = \left\{ (x_n)_{n \geqslant 1} \;:\; \limsup_{n \to \infty} \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} = 1 \text{ et } \liminf_{n \to \infty} \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} = 0 \right\}.$$

1. Montrer que tout ouvert non vide de X contient une suite ayant un nombre fini de termes nuls.
2. Montrer que A est comaigre.

Exercice 6 Nilpotence vs nilpotence ponctuelle
Soit X un espace de Banach et $T : X \to X$ une application linéaire continue telle que, pour tout $x \in X$, il existe un entier n_x tel que $T^{n_x}(x) = 0$.

1. Montrer qu'il existe un entier n tel que $T^n = 0$.
2. Montrer que la conclusion du 1. devient fausse sans l'hypothèse de complétude.

Exercice 7 Baire et les espaces L^p

1. Montrer que ℓ_1 est maigre dans ℓ_2. (**Indication :** *Montrer que l'ensemble des suites (x_n) telles que $\sum_{n=0}^{\infty} |x_n| \leqslant 1$ est un fermé d'intérieur vide de ℓ_2*).
2. Montrer que $L^2([0,1])$ est maigre dans $L^1([0,1])$.

Reprendre cet exercice à la lumière du théorème de l'application ouverte.

Exercice 8 Fonctions continues nulle part dérivables
Soit X l'espace de Banach $C([0,1])$. Étant donnés $\varepsilon, A > 0$ on pose

$$F_{\varepsilon,A} = \{ f \in X \;:\; \exists x \in [0,1] \text{ tel que si } |x-y| \leqslant \varepsilon \text{ alors } |f(x) - f(y)| \leqslant A|x-y| \}.$$

1. Montrer que les ensembles $F_{\varepsilon,A}$ sont fermés d'intérieur vide.
2. Montrer que l'ensemble des fonctions nulle part dérivables est comaigre dans X.

Exercice 9 Fonctions C^∞ nulle part développables en série entière.

On munit l'espace $X = C^\infty([0,1])$ de la distance

$$d(f,g) = \sum_{n\geqslant 0} \min(2^{-n}, \|f^{(n)} - g^{(n)}\|_\infty)$$

1. Montrer que X est complet pour cette distance.
2. Pour $a \in]0,1[$ et $B > 0$, montrer que l'ensemble

$$F_{a,B} = \{f \in X \,:\, \forall k \in \mathbf{N},\ |f^{(k)}(a)| \leqslant k!B^k\}$$

   est un fermé d'intérieur vide.
3. Montrer que l'ensemble des fonctions nulle part développables en série entière est comaigre dans X.

Exercice 10 Compléments sur les séries de Fourier

1. Soit $h_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une suite de fonctions continues. Montrer que $\{x \in \mathbf{R} \,:\, \sup_n h_n(x) = +\infty\}$ est un G_δ.
2. Soit X l'ensemble des fonctions continues 2π-périodiques de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$. Pour $f \in X$, montrer que l'ensemble des réels x en lesquels la série de Fourier $(S_n f(x))_n$ est non bornée est un G_δ.
3. Montrer que l'ensemble des fonctions continues 2π-périodiques dont la série de Fourier converge sur un ensemble maigre de $\mathbf{R}$ est un ensemble comaigre de X.

Le dernier résultat est à comparer avec le difficile théorème de Carleson : si $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est une fonction continue, sa série de Fourier converge presque partout.