Feuille d'exercices numéro 4
Théorème de Hahn–Banach

On note B_X la boule unité fermée d'un espace normé X.

Exercice 1 Norme et dualité

Soit X un espace de Banach. Rappeler comment ont été obtenues les formules suivantes, pour $x_0 \in X$ et $f_0 \in X^*$

$$\|x_0\|_X = \sup_{f \in B_{X^*}} |f(x_0)|, \quad \|f_0\|_{X^*} = \sup_{x \in B_X} |f_0(x)|.$$

Les bornes supérieures sont-elles atteintes ?

Exercice 2 Hyperplans

Montrer que dans un espace vectoriel normé, un hyperplan est soit fermé soit dense. Montrer que si f est une forme linéaire non identiquement nulle, l'hyperplan $\ker(f)$ est fermé si et seulement si f est continue.

Exercice 3 Jauge d'un convexe

Soit X un espace vectoriel topologique et $W \subset X$ un ouvert convexe contenant 0. Pour $x \in X$, on définit

$$j_W(x) = \inf\{t > 0 \,:\, x \in tW\}.$$

Montrer que j_W est une fonction à valeurs réelles, continue, positivement homogène, sous-additive et telle que $W = \{x \in X \,:\, j_W(x) < 1\}$. (*Vous pouvez d'abord considérer le cas d'un espace vectoriel normé.*)

Exercice 4 Séparation en dimension finie

Soit F et K deux convexes non vides disjoints de $\mathbf{R}^n$, avec F fermé et K compact. Montrer (sans utiliser le théorème de Hahn–Banach) que l'on peut séparer F et K au sens strict par un hyperplan.

Exercice 5 Séparation, contre-exemples

1. Donner un exemple, dans $\mathbf{R}^2$, de deux convexes fermés disjoints non vides ne pouvant pas être séparés au sens strict par un hyperplan.
2. Donner un exemple, en dimension infinie, de deux convexes disjoints non vides ne pouvant pas être séparés au sens large par un hyperplan fermé. Peut-on avoir un tel exemple en dimension finie ?
3. Donner un exemple, en dimension infinie, de deux convexes disjoints non vides ne pouvant pas être séparés au sens large par un hyperplan. **Indication :** *dans l'espace vectoriel des suites réelles à support fini, soit K l'ensemble des suites dont le dernier terme non nul est positif. Montrer que K est un convexe qui ne peut pas être séparé de $\{0\}$ par un hyperplan.*

Exercice 6 L'espace vectoriel topologique $L^{1/2}$ n'est pas localement convexe.

Soit X l'espace des fonctions mesurables $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ telles que $\int_0^1 |f(t)|^{1/2}\,\mathrm{d}t < +\infty$, quotienté par la relation d'équivalence donnée par l'égalité presque partout.

1. Montrer que X est un espace vectoriel.
2. Montrer que l'on définit une distance sur X par la formule $d(f,g) = \int_0^1 |f(t) - g(t)|^{1/2}\,\mathrm{d}t$, et que la topologie associée fait de X un espace vectoriel topologique.
3. Montrer que les seuls ouverts convexes de X sont $\emptyset$ et X. (**Indication.** *Montrer que l'enveloppe convexe d'une boule ouverte $B(x,r)$ contient la boule ouverte $B(x,\sqrt{2}r)$*).
   En déduire que toute forme linéaire continue sur X est nulle.

Exercice 7 Montrer qu'un espace vectoriel de dimension finie admet une unique topologie qui en fait un espace vectoriel topologique.

Exercice 8 Séparable ?

Déterminer si les espaces suivants sont séparables

1. $L^\infty([0,1])$.
2. $C([0,1])$, l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$, muni de la norme du supremum.
3. $\mathscr{L}(\ell_2,\ell_2)$, l'espace des opérateurs continus sur un espace de Hilbert séparable de dimension infinie, muni de la norme-opérateur.
4. Un sous-espace d'un espace normé séparable.