Contrôle partiel du mardi 7 mars

Exercice 1

Soit X un espace de Banach et $E \subset X$ un sous-espace fermé tel que $E \neq X$. Montrer qu'il existe un hyperplan fermé H tel que $E \subset H$.

Indication. *On pourra appliquer le théorème de séparation de Hahn–Banach.*

Solution. Soit $z \in X \setminus E$. Puisque E est fermé et $\{z\}$ compact, il existe par le théorème de Hahn–Banach une forme linéaire continue $\ell \in X^*$ vérifiant

$$\sup_{x \in E} \ell(x) < \ell(z).$$

Le sous-espace vectoriel $\ell(E) \subset \mathbf{R}$ est majoré donc réduit à $\{0\}$. Ainsi le sous-espace $H = \ker \ell$ contient E, c'est un hyperplan car $\ell \neq 0$ et il est fermé puisque ℓ est continue.

Exercice 2

Soit $(e_n)_{n \in \mathbf{N}}$ la base hilbertienne canonique de l'espace de Hilbert réel ℓ_2, et soit $(\lambda_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de nombres réels.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur (λ_n) pour que la suite $(\lambda_n e_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge fortement vers 0.
   Solution. Une suite (u_n) converge fortement vers 0 si et seulement si $\lim \|u_n\| = 0$. Ainsi, la suite $(\lambda_n e_n)$ converge fortement vers 0 si et seulement si $\lim \lambda_n = 0$.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur (λ_n) pour que la suite $(\lambda_n e_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge faiblement vers 0.
   Indication. *Utiliser le théorème de Banach–Steinhaus.*
   Solution. Montrons que la suite $(\lambda_n e_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge faiblement vers 0 si et seulement si la suite (λ_n) est bornée.
   — Supposons (λ_n) bornée. Soit $x = (x_n) \in \ell_2$; observons que $\lim x_n = 0$ puisque la série $\sum x_n^2$ converge. On a $\langle x, \lambda_n e_n \rangle = \lambda_n x_n$ et cette quantité tend vers 0 (comme produit d'une suite bornée et d'une suite de limite 0) ; ainsi $(\lambda_n e_n)$ tend faiblement vers 0.
   — Supposons que la suite $(\lambda_n e_n)$ converge faiblement vers 0 ; alors la famille $(\lambda_n e_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est ponctuellement bornée dans $(\ell_2)^*$ identifié à ℓ_2. Par le théorème de Banach–Steinhaus, elle est donc bornée. Puisque $\|\lambda_n e_n\| = |\lambda_n|$, on en déduit que la suite (λ_n) est bornée.

Exercice 3

Soient X et Y des espaces de Banach, $T : X \to Y$ une application linéaire continue. On rappelle que l'orthogonal d'une partie A de X est $A^\perp = \{f \in X^* : \forall x \in A,\ f(x) = 0\}$.

1. (question de cours) Rappeler la définition de T^*, montrer que T^* est continue et que $\|T\| = \|T^*\|$.
   Solution. C'est dans le cours.
2. Montrer que $\ker(T^*) = \mathrm{Im}(T)^\perp$.
   Solution. Soit $f \in Y^*$. On a
   $$f \in \mathrm{Im}(T)^\perp \iff \forall x \in X, f(Tx) = 0 \iff \forall x \in X, (T^*f)(x) = 0 \iff T^*f = 0 \iff f \in \ker(T^*),$$
   d'où l'égalité voulue.
3. Montrer que $\ker(T)^\perp = \overline{\mathrm{Im}(T^*)}^{\sigma(X^*,X)}$.
   Solution.
   — Soit $f \in X^*$ dans l'image de T^* ; on a donc $f = T^*g$ pour $g \in Y^*$. Pour tout $x \in \ker T$, on a $f(x) = (T^*g)(x) = g(Tx) = 0$, ce qui montre l'inclusion $\mathrm{Im}(T^*) \subset \ker(T)^\perp$.
   — L'orthogonal de toute partie $A \subset X$ est fermé pour la topologie faible* $\sigma(X^*, X)$ (c'est une intersection de fermés, puisque pour tout $x \in X$ l'application $f \mapsto f(x)$ est continue pour la topologie faible*). En posant $W = \overline{\mathrm{Im}(T^*)}^{\sigma(X^*,X)}$, on a donc l'inclusion $W \subset \ker(T)^\perp$.

— Soit $f \in X \setminus W$. Par le théorème de Hahn–Banach appliqué à l'espace localement convexe $(X^*, \sigma(X^*, X))$, on peut séparer le fermé W du compact $\{f\}$. Comme tout forme linéaire continue sur $(X^*, \sigma(X^*, X))$ est du type $g \mapsto g(x)$, il existe $x \in X$ tel que

$$\sup_{g \in W} g(x) < f(x).$$

Puisque $\{g(x) : g \in W\}$ est un sous-espace vectoriel majoré de $\mathbf{R}$ il est réduit à $\{0\}$. Pour tout $h \in Y^*$, on a $T^*h \in W$ donc $0 = (T^*h)(x) = h(Tx)$. Ceci implique $Tx = 0$ donc $x \in \ker(T)$. Puisque $f(x) > 0$, on a $f \notin \ker(T)^\perp$. On a bien montré l'égalité $W = \ker(T)$.

Exercice 4

Soit X un espace de Banach et M un sous-espace fermé. Une application linéaire $p : X \to X$ est un projecteur si elle vérifie $p^2 = p$. On considère les propriétés suivantes.

(i) Il existe un projecteur continu $p : X \to X$ d'image M.

(ii) Il existe un sous-espace fermé $N \subset X$ tel que $X = M \oplus N$.

1. Montrer que (i) implique (ii).
   Solution. Il suffit de poser $N = \ker p$. C'est un sous-espace fermé puisque p est continu ; et tout projecteur p sur un espace vectoriel X vérifie $X = \ker(p) \oplus \mathrm{Im}(p)$.
2. Montrer que (ii) implique (i).
   Solution. Puisque M et N sont fermés dans X, ce sont des espaces de Banach, et l'espace $M \times N$ muni de la norme $\|(x,y)\| = \|x\| + \|y\|$ est donc aussi un espace de Banach. L'application $u : M \times N \to X$ définie par $u(x,y) = x + y$ est une bijection linéaire qui est de norme $\leqslant 1$ (par l'inégalité triangulaire). Par le théorème d'isomorphisme de Banach, u^{-1} est continue. L'application $p = q \circ u^{-1}$, où $q : M \times N \to M$ est l'application continue $(x,y) \mapsto x$, est donc également continue.

Lorsque les propriétés équivalentes (i) et (ii) sont vérifiées, on dit que le sous-espace M est *complémenté*. Les questions 3., 4. et 5. sont indépendantes ; les questions 5(c) et 5(d) sont plus difficiles.

3. On suppose dans cette question que X est un espace de Hilbert. Montrer que tout sous-espace vectoriel fermé de X est complémenté.
   Solution. Si M est un sous-espace fermé d'un espace de Hilbert, son supplémentaire orthogonal $N = M^\perp$ est fermé ; la propriété (ii) est donc vérifiée.
4. On suppose dans cette question que $\dim(M) < +\infty$. Montrer que M est complémenté.
   (**Indication.** *Étant donnée une base de M, appliquer le théorème de prolongement de Hahn–Banach aux éléments de la base duale*)
   Solution. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de M et $f_1, \ldots, f_n$ la base duale. Chaque f_i est une forme linéaire sur M, continue car M est de dimension finie. Par le théorème de prolongement de Hahn–Banach, il existe pour chaque i une formé linéaire continue $\ell_i \in X^*$ qui prolonge f_i. L'application $p : X \to X$ définie par
   $$p(x) = \sum_{i=1}^{n} \ell_i(x) e_i$$
   est continue et c'est un projecteur d'image M, donc (i) est vérifié.
5. Le but de cette question est de donner un exemple de sous-espace non complémenté.
   (a) Montrer que c_0 (l'ensemble des suites tendant vers 0) est un sous-espace fermé de ℓ_∞.
   Solution. Les application $\limsup : \ell_\infty \to \mathbf{R}$ et $\liminf : \ell_\infty \to \mathbf{R}$ sont continues car 1-lipschitziennes, et $c_0 = \limsup^{-1}(\{0\}) \cap \liminf^{-1}(\{0\})$ est donc fermé.
   (b) Montrer qu'il existe une famille non dénombrable $(I_\alpha)_{\alpha \in A}$ de parties infinies de $\mathbf{N}$ telles que $I_\alpha \cap I_\beta$ est fini pour tout $\alpha \neq \beta$. **Indication.** *Écrire $\mathbf{Q} = \{z_n : n \in \mathbf{N}\}$ et définir I_α comme l'ensemble des indices d'une sous-suite (n_k) telle que $\lim z_{n_k} = \alpha$.*
   Solution. Soit $A = \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$. Pour $\alpha \in A$, il existe par densité de $\mathbf{Q}$ une sous-suite (n_k) telle que $\lim z_{n_k} = \alpha$. L'ensemble $I_\alpha = \{n_k\}$ est infini ; et si $\beta \neq \alpha$ l'enseble $I_\alpha \cap I_\beta$ est fini (deux suites réelles de limites distinctes ne prennent qu'un nombre fini de valeurs commnues).
   (c) Pour $\alpha \in A$, on note $x_\alpha \in \ell_\infty$ l'indicatrice de I_α. Supposons qu'il existe un projecteur continu $p : \ell_\infty \to \ell_\infty$ d'image c_0 et posons $q = \mathrm{id} - p$. Montrer que pour toute partie finie $F \subset A$ on a $\|q(\sum_{\alpha \in F} x_\alpha)\| \leqslant \|q\|$.

Solution. Soit $y = \sum_{\alpha \in F} x_\alpha$ et soit z l'indicatrice de $\bigcup_{\alpha \in F} I_\alpha$. Alors $y - z$ est à support fini (si la $k$ème coordonnée de $y - z$ est non nulle, il existe $\alpha \neq \beta$ dans F tel que $k \in I_\alpha \cap I_\beta$ et il n'y a qu'un nombre fini de tels k) donc $p(y - z) = y - z$ et $q(y - z) = 0$. On a donc

$$\|q(y)\| = \|q(z)\| \leqslant \|q\|$$

car $\|z\| = 1$.

(d) Montrer qu'il existe un réel $k \in \mathbf{N}$ tel que l'ensemble $\{\alpha \in A \ : \ q(x_\alpha)_k \neq 0\}$ est infini non dénombrable. Aboutir à une contradiction et en déduire que c_0 n'est pas un sous-espace commplémenté de ℓ_∞.

Solution. Pour tout $\alpha \in A$, on a $x_\alpha \notin c_0$ puisque I_α est infini, et donc $q(x_\alpha) \neq 0$. Si on note C_k l'ensemble $\{\alpha \in A \ : \ q(x_\alpha)_k \neq 0\}$, on a donc $A = \bigcup_k C_k$. Si tous les ensembles C_k étaient dénombrables, leur réunion le serait également, d'où contradiction. De la même manière, on en déduit l'existence d'un rationnel $\varepsilon > 0$ et d'un signe $s \in \{-1, 1\}$ tel que l'ensemble $B = \{\alpha \in A \ : \ sq(x_\alpha)_k \geqslant \varepsilon\}$ est infini non dénombrable. Pour toute partie finie $F \subset B$, on a donc $\|q(\sum_{\alpha \in F} x_\alpha)\| \geqslant \varepsilon \mathrm{card}(F)$, ce qui contredit la question précédente puisque F peut être choisi arbitrairement grand. Ainsi c_0 n'est pas complémenté dans ℓ_∞.