Contrôle partiel du mardi 7 mars

Exercice 1

Soit X un espace de Banach et $E \subset X$ un sous-espace fermé tel que $E \neq X$. Montrer qu'il existe un hyperplan fermé H tel que $E \subset H$.
Indication. *On pourra appliquer le théorème de séparation de Hahn–Banach.*

Exercice 2

Soit $(e_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la base hilbertienne canonique de l'espace de Hilbert réel ℓ_2, et soit $(\lambda_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de nombre réels.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur (λ_n) pour que la suite $(\lambda_n e_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge fortement vers 0.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur (λ_n) pour que la suite $(\lambda_n e_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge faiblement vers 0.

Exercice 3

Soient X et Y des espaces de Banach, $T : X \to Y$ une application linéaire continue. On rappelle que l'orthogonal d'une partie A de X est $A^\perp = \{f \in X^* \;\; \forall x \in A,\; f(x) = 0\}$.

1. Montrer que $\|T\| = \|T^*\|$.
2. Montrer que $\ker(T^*) = \mathrm{Im}(T)^\perp$.
3. Montrer que $\ker(T)^\perp = \overline{\mathrm{Im}(T^*)}^{\sigma(X^*,X)}$.

Exercice 4

Soit X un espace de Banach et M un sous-espace fermé. On considère les propriétés suivantes.
(i) Il existe une projection continue $p : X \to X$ d'image M.
(ii) Il existe un sous-espace fermé $N \subset X$ tel que $X = M \oplus N$.

1. Montrer que (i) implique (ii).
2. Montrer que (ii) implique (i).

Lorsque les propriétés équivalentes (i) et (ii) sont vérifiées, on dit que le sous-espace M est *complémenté*. Les questions 3., 4. et 5. sont indépendantes.

3. On suppose dans cette question que X est un espace de Hilbert. Montrer que M est complémenté.
4. On suppose dans cette question que $\dim(M) < +\infty$. Montrer que M est complémenté.
(**Indication.** *Étant donnée une base de M, appliquer le théorème de prolongement de Hahn–Banach aux éléments de la base duale*)
5. Le but de cette question est de donner un exemple de sous-espace non complémenté.
   (a) Montrer que c_0 (l'ensemble des suites tendant vers 0) est un sous-espace fermé de ℓ_∞.
   (b) Montrer qu'il existe une famille non dénombrable $(I_\alpha)_{\alpha\in A}$ de parties infinies de $\mathbf{N}$ telles que $I_\alpha \cap I_\beta$ est fini pour tout $\alpha \neq \beta$. **Indication.** *Écrire $\mathbf{Q} = \{z_n : n \in \mathbf{N}\}$ et définir I_α comme l'ensemble des termes d'une sous-suite (n_k) telle que $\lim z_{n_k} = \alpha$.*
   (c) Pour $\alpha \in A$, on note $x_\alpha \in \ell_\infty$ l'indicatrice de I_α. Supposons qu'il existe une projection continue $p : \ell_\infty \to \ell_\infty$ d'image c_0 et posons $q = \mathrm{id} - p$. Montrer que pour toute partie finie $F \subset A$ on a $\|q(\sum_{\alpha\in F} x_\alpha)\| \leqslant \|q\|$.
   (d) Montrer qu'il existe un réel $k \in \mathbf{N}$ tel que l'ensemble $\{\alpha \in A : q(x_\alpha)_k \neq 0\}$ est infini non dénombrable. Aboutir à une contradiction et en déduire que c_0 n'est pas un sous-espace commplémenté de ℓ_∞.