Vous devez, par groupes de 1, 2 ou 3 élèves

- rendre ce devoir maison, même partiellement résolu, d'ici le 9 avril

ou

- présenter oralement, accompagné d'une rédaction en LaTeX, un des exercices de TD non traités en classe

Devoir maison
Théorème de représentation de Riesz

Soit (K, d) un espace métrique compact. On note $\mathcal{B}$ la tribu borélienne sur K, c'est-à-dire la tribu engendrée par les ouverts.

Une forme linéaire $\ell : C(K) \to \mathbf{R}$ est dite *positive* si elle vérifie $\ell(f) \geqslant 0$ pour tout fonction $f \in C(K)$ à valeurs positives. Le but de ce devoir est de montrer le théorème de représentation de Riesz sous les deux formes suivantes.

Théorème (Théorème de représentation de Riesz, cas positif)**.** *Soit $\ell : C(K) \to \mathbf{R}$ une forme linéaire positive. Alors il existe une unique mesure finie μ sur $(K, \mathcal{B})$ telle que*

$$\ell(f) = \int_K f \,\mathrm{d}\mu$$

pour toute fonction $f \in C(K)$.

Théorème (Théorème de représentation de Riesz, cas général)**.** *Soit $\ell : C(K) \to \mathbf{R}$ une forme linéaire continue. Alors il existe deux mesures finies μ et ν sur $(K, \mathcal{B})$ telles que*

$$\ell(f) = \int_K f \,\mathrm{d}\mu - \int_K f \,\mathrm{d}\nu$$

pour toute fonction $f \in C(K)$.

Soit ℓ une forme linéaire positive sur $C(K)$.

1. Montrer que ℓ est continue et que $\|\ell\| = \ell(\mathbf{1}_K)$.
2. Soit (f_n) une suite croissante d'éléments de $C(K)$ qui converge simplement vers $f \in C(K)$. Montrer que la convergence est uniforme, puis que $\ell(f) = \lim_{n\to\infty} \ell(f_n)$.
3. Soit $f : K \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$. On dit que f est *semi-continue inférieurement* s'il existe une suite croissante (f_n) d'éléments de $C(K)$ telle que $\lim f_n(x) = f(x)$ pour tout $x \in K$. On note $SCI(K)$ l'ensemble des fonctions semi-continues inférieurement de K dans $\mathbf{R} \cup \{+\infty\}$.
   (a) Montrer que pour tout ouvert O de K, la fonction $\mathbf{1}_O$ est semi-continue inférieurement.
   (b) Montrer que si f et g sont semi-continues inférieurement, alors les fonctions $f + g$, $\max(f, g)$ et $\min(f, g)$ le sont aussi.
   (c) Soit $A \subset C(K)$ dénombrable. Montrer que la fonction $x \mapsto \sup\{f(x) \ : \ f \in A\}$ est semi-continue inférieurement.

4. On définit $\ell^* : SCI(K) \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ par la formule

$$\ell^*(f) = \sup\{\ell(g) \ : \ g \in C(K), \ g \leqslant f\}$$

   (a) Montrer que si $f \in C(K)$ alors $\ell^*(f) = \ell(f)$.
   (b) Montrer que si $f, g \in SCI(K)$ vérifient $f \leqslant g$, alors $\ell^*(f) \leqslant \ell^*(g)$.
   (c) Montrer que si (f_n) est une suite croissante d'éléments de $SCI(K)$, alors la fonction f définie par $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ est dans $SCI(K)$ et vérifie $\ell^*(f) = \lim_{n\to\infty} \ell^*(f_n)$.
   (d) Montrer que si $f, g \in SCI(K)$ alors $\ell^*(f+g) = \ell^*(f) + \ell^*(g)$. Montrer que si $(f_n) \subset SCI(K)$ est une suite de fonctions positives, alors $\sum f_n \in SCI(K)$ et $\ell^*(\sum f_n) = \sum \ell^*(f_n)$.

5. On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des fonctions bornées $f : K \to \mathbf{R}$ ayant la propriété suivante : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $g, h \in SCI(K)$ telles que $-h \leqslant f \leqslant g$ et $\ell^*(g+h) < \varepsilon$. Pour $f \in \mathcal{E}$, on pose

$$\tilde{\ell}(f) = \inf\{\ell^*(g) \ : \ g \in SCI(K), \ f \leqslant g\} \overset{*}{=} \sup\{-\ell^*(h) \ : \ h \in SCI(K), \ -h \leqslant f\}$$

   (a) Justifier l'égalité $\overset{*}{=}$.
   (b) Montrer que $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel contenant $C(K)$. Montrer que $\tilde{\ell}$ est une forme linéaire sur $\mathcal{E}$ qui prolonge ℓ et qui prend des valeurs positives sur les fonctions positives.
   (c) Montrer que si $f \in SCI(K)$ est bornée, alors $f \in \mathcal{E}$ et $\tilde{\ell}(f) = \ell^*(f)$.
   (d) Montrer que si $f, g \in \mathcal{E}$ alors $\max(f, g) \in \mathcal{E}$.
   (e) Soit $(f_n)_{n\geqslant 1} \subset \mathcal{E}$ une suite croissante de fonctions positives qui converge simplement vers une fonction bornée f. On suppose que $\tilde{\ell}(f_n) < \varepsilon$ pour tout n. Montrer qu'il existe $g \in SCI(K)$ telle que $f \leqslant g$ et $\tilde{\ell}(g) < 2\varepsilon$.
   Indication : *prendre g_n et h_n dans $SCI(K)$ telles que $0 \leqslant -h_n \leqslant f_n \leqslant g_n$ et $\ell^*(g_n + h_n) < 2^{-n}\varepsilon$, puis montrer que $g = \lim_{n\to\infty} \max(g_1, \ldots, g_n)$ convient*
   (f) En déduire que si une suite $(f_n) \subset \mathcal{E}$ converge simplement vers une fonction f bornée, alors $f \in \mathcal{E}$ et $\tilde{\ell}(f) = \lim_{n\to\infty} \tilde{\ell}(f_n)$.
   (g) On note
$$\mathcal{F} = \{A \in \mathcal{B} \ : \ \mathbf{1}_A \in \mathcal{E}\}.$$
   Montrer que $\mathcal{F}$ est une tribu puis que $\mathcal{F} = \mathcal{B}$.
   (h) Pour $A \in \mathcal{B}$, on pose $\mu(A) = \tilde{\ell}(\mathbf{1}_A)$. Montrer que μ est une mesure sur $(K, \mathcal{B})$.
   (i) Montrer que pour toute fonction $f \in C(K)$, on a
$$\ell(f) = \int_K f \, \mathrm{d}\mu.$$

6. Montrer la partie «unicité» du théorème de représentation Riesz (cas positif).
7. En déduire le cas général du théorème de représentation de Riesz.