Feuille d'exercices numéro 1
Convexité : la théorie de Brunn–Minkowski

Exercice 1.1 Norme associée à un convexe symétrique
Soit $K \subset \mathbf{R}^n$ un corps convexe symétrique. Montrer que la formule

$$\|x\| = \inf\{t \geqslant 0 \,:\, x \in tK\}$$

définit une norme sur $\mathbf{R}^n$ pour laquelle K est la boule-unité.

Exercice 1.2 Théorème de séparation de Hahn–Banach.
Montrer que si K et L sont deux convexes compacts disjoints de $\mathbf{R}^n$, il existe $x \in \mathbf{R}^n$ tel que

$$\sup_{y \in K} \langle x|y \rangle < \inf_{z \in L} \langle x|z \rangle.$$

Il est hors de question d'utiliser l'axiome du choix.

Exercice 1.3 Bipolaire.

1. Si K est un corps convexe symétrique, montrer que $K = K^{\circ\circ}$.
2. Si A est une partie quelconque de $\mathbf{R}^n$, montrer que $(A^\circ)^\circ = \overline{\mathrm{conv}}(A \cup \{0\})$.

Exercice 1.4 Somme de Minkowski
Soient K, $L \subset \mathbf{R}^n$. Déterminer si les énoncés suivants sont vrais ou faux.

1. Si K et L sont ouverts, alors $K + L$ est ouvert.
2. Si K et L sont fermés, alors $K + L$ est fermé.
3. Si K et L sont compacts, alors $K + L$ est compact.

Exercice 1.5 Polarité.

1. Calculer le polaire des parties suivantes de $\mathbf{R}^n$: un singleton, un sous-espace (vectoriel).
2. Montrer que $(K \cup L)^\circ = K^\circ \cap L^\circ$.
3. Montrer que si K et L sont des convexes fermés contenant 0, alors $(K \cap L)^\circ = \overline{\mathrm{conv}}(K^\circ \cup L^\circ)$.
4. Soit E un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^n$, et P_E la projection orthogonale sur E. Montrer que pour tout convexe $K \in \mathbf{R}^n$ vérifiant $0 \in \mathrm{int}(K)$, on a
$$(P_E K)^\circ = K^\circ \cap E \;\text{ et } (K \cap E)^\circ = P_E(K^\circ),$$
où dans les membres de gauche la polarité est prise à l'intérieur de E.

Exercice 1.6 Fonction d'appui.
Si $K \subset \mathbf{R}^n$, on pose $h_K(x) = \sup_{y \in K} \langle x|y \rangle$ pour $x \in \mathbf{R}^n$.

1. Montrer que si K et L sont deux corps convexes, on a les équivalences $K \subset L \iff h_K \leqslant h_L$ et $K \subset \mathrm{int}\, L \iff h_K < h_L$.
2. Montrer que $\delta(K, L) = \|h_K - h_L\|_\infty$, où $\|f\|_\infty = \sup\{|f(u)| \,:\, u \in S^{n-1}\}$.

Exercice 1.7 Sections parallèles d'un corps convexe symétrique.
Soit K un corps convexe symétrique et E un sous-espace de dimension k ; montrer que parmi toutes les sections de K parallèles à E, c'est celle qui passe par l'origine qui a le plus grand volume k-dimensionnel.

Exercice 1.8 Inégalité isodiamétrique
Le diamètre d'une partie $K \subset \mathbf{R}^n$ est défini comme $\mathrm{diam}(K) = \sup\{|x - y| \,:\, x,\ y \in K\}$. Montrer que si B est une boule euclidienne de même volume que K, on a $\mathrm{diam}(K) \geqslant \mathrm{diam}(B)$.

Exercice 1.9 Symétrisation de Steiner

On note S_u la symétrisation de Steiner dans la direction $u \in S^{n-1}$, et K, L des corps convexes. Montrer les propriétés suivantes

1. $S_u(\lambda K) = \lambda S_u(K)$,
2. $S_u(K) + S_u(L) \subset S_u(K + L)$,
3. S_u est continue pour la distance de Hausdorff,
4. $a(S_u(K)) \leqslant a(K)$.

Exercice 1.10 Théoème de Carathéodory

Soit $A \subset \mathbf{R}^n$. Montrer que tout élément de $\operatorname{conv} A$ peut s'écrire comme combinaison convexe d'au plus $n + 1$ éléments de A.

Exercice 1.11 Points extrémaux

Soit $K \subset \mathbf{R}^n$ un corps convexe non vide. Un point $x \in K$ est extrémal si l'égalité $x = \lambda y + (1 - \lambda)z$ pour $0 < \lambda < 1$ et y, $z \in K$ implique $x = y = z$.

1. Montrer que K possède au moins un point extrémal.
2. Montrer que K est l'enveloppe convexe de ses points extrémaux (procéder par récurrence sur n en utilisant la question 1.).

Exercice 1.12 Moyenne harmonique de convexes

Montrer que pour K, L des corps convexes de $\mathbf{R}^n$, on a

$$\left(\frac{K^\circ + L^\circ}{2}\right)^\circ \subset \frac{K + L}{2}.$$