

Espaces euclidiens / matrices symétriques.

E Espace euclidien = $\mathbb{R}$ -ev muni d'un produit scalaire
forme bilinéaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
la forme quadratique
associée est définie positive

On suppose $\dim(E) < \infty$.

$u: E \rightarrow E$ est symétrique si $\forall x, y \in E$
 $\langle x, u(y) \rangle = \langle u(x), y \rangle$ (*)

Si (e_i) est une base orthonormale de E ($\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$)
et M la matrice de u dans cette base,
alors u symétrique (*) (*) vérifie pour $x = e_i, y = e_j \forall i, j$
 $(\Rightarrow) M_{ij} = M_{ji} \quad \forall i, j$
 $(\Rightarrow) M = M^t$
 $n = \dim(E)$

Th. spectral Si $u: E \rightarrow E$ endomorphisme symétrique
[$\exists$ une base orthonormale qui diagonalise u
 $(e_i)_{i=1}^n \quad \exists (\lambda_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n \quad u(e_i) = \lambda_i e_i$]

En terme matriciels : $\forall M \in S_n(\mathbb{R}) \exists O \in O(n)$ tq OMO^t [$O^t = O^{-1}$]
est diagonale.

Exo 1 On montre que tout endo. symétrique admet 1 v.p.
dans $\mathbb{R}$.

1. $S = \{x \in E \mid \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = 1\}$ est fermé
et borné dans E ,
donc compact.

$f: S \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \langle x, u(x) \rangle$ est continue donc atteint
son maximum en un point $x_0 \in S$

Montrons que x_0 est un vecteur propre.

Soit $z \in S$ tel que $z \perp x_0 \quad \forall \theta \in \mathbb{R} \quad \underbrace{\| \cos(\theta)x_0 + \sin(\theta)z \|}_{=1} = 1$ (Pythagore)

Alors $f(\cos(\theta)x_0 + \sin(\theta)z) \leq f(x_0)$

$\langle \cos(\theta)x_0 + \sin(\theta)z, \cos(\theta)u(x_0) + \sin(\theta)u(z) \rangle \leq f(x_0)$

$$\cos^2(\theta) f(x_0) + \cos(\theta) \sin(\theta) \langle x_0, u(x_0) \rangle + \sin^2(\theta) f(z) \\ + \cos(\theta) \sin(\theta) \langle u(x_0), z \rangle + \sin^2(\theta) f(z)$$

$$(1 - \cos^2(\theta)) f(x_0) + 2 \cos(\theta) \sin(\theta) \langle x_0, u(x_0) \rangle + \sin^2(\theta) f(z) \geq 0$$

quand $\theta \rightarrow 0$ $= 2\theta \langle x_0, u(x_0) \rangle + o(\theta) \geq 0$

d'où nécessairement $\langle x_0, u(x_0) \rangle \geq 0$

(sinon, $\theta \langle x_0, u(x_0) \rangle > 0$ par $\begin{pmatrix} \theta x_0 \\ \theta u(x_0) \end{pmatrix}$ assez petit
selon que $\begin{cases} \langle x_0, u(x_0) \rangle > 0 \\ \langle x_0, u(x_0) \rangle < 0 \end{cases}$)

On a : $\forall z \in S \quad z \perp x_0 \Rightarrow z \perp u(x_0)$

Ecrivons $u(x_0) = \alpha x_0 + \beta z$ pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
 $z \perp x_0 \quad z \in S$

$0 = \langle z, u(x_0) \rangle = \beta \|z\|^2$ donc $\beta = 0$

Finalement : $u(x_0) = \alpha x_0$ pour un $\alpha \in \mathbb{R}$
 $\Rightarrow x_0$ est un vecteur propre

(2) Soit M la matrice de u dans une B.O.N. $M = {}^t M$
On veut montrer que M admet une v.p. réelle

On sait que M admet une v.p. complexe λ

Soit X un vecteur propre correspondant $MX = \lambda X$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$M \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$X^* = (\bar{x}_1 \dots \bar{x}_n)$$

$$M \in M_n(\mathbb{R}) \Rightarrow M = {}^t M$$

$$X^* M X = X^* \lambda X = (\lambda X)^* X = \bar{\lambda} X^* X$$

$$X^* X = \sum \bar{x}_i x_i = \sum |x_i|^2 > 0 \text{ car } X \neq 0$$

d'où $\lambda = \bar{\lambda}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

On a $MX = \lambda X \Rightarrow M \operatorname{Re}(X) = \lambda \operatorname{Re}(X)$
et donc $M \bar{X} = \lambda \bar{X} \Rightarrow M \operatorname{Im}(X) = \lambda \operatorname{Im}(X)$

Comme $X \neq 0$, au moins un des vecteurs
 $\operatorname{Re}(X)$ et $\operatorname{Im}(X)$ est non nul

$\Rightarrow M$ admet un vecteur propre réel correspondant
à λ .

$$\begin{cases} \exists X \in \mathbb{C}^n \\ MX = \lambda X \end{cases}$$

Exo 2 Soit u endomorphisme symétrique de E
On montre le th. spectral par récurrence sur $\dim(E)$.

$n \rightarrow n+1$

Par l'exo 1, u admet un vecteur propre x_0
de v.p. λ , avec $\|x_0\|=1$

$$\text{Soit } F = x_0^\perp = \{y \in E \mid \langle x_0, y \rangle = 0\}$$

F est stable par u : $y \in F \implies \langle x_0, u(y) \rangle = \langle u(x_0), y \rangle = \lambda \langle x_0, y \rangle = 0$
donc $u(y) \in F$.

$u|_F$ est un endomorphisme de F , qui est symétrique
Par hypothèse de récurrence, il existe une b.o.n. de F $(e_i)_{i=1}^n$
qui diagonalise $u|_F$

Alors $(x_0, e_1, \dots, e_n)$ est une b.o.n. de E
qui diagonalise u .

Exo 3 Décomposition polaire

1) $M \in S_n^+(\mathbb{R})$, par le th. spectral

On peut diagonaliser M en $P \Delta P^t$ $P \in O_n(\mathbb{R})$

$$\text{avec } \Delta = \text{diag} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \lambda_i \geq 0.$$

$$\text{On pose } \Delta' = \text{diag} \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} \quad \Delta'^2 = \Delta$$

$$\text{Soit } N = P \Delta' P^t ; \text{ on a } N^2 = M$$

$$N^t = (P^t \Delta' P)^t = P \Delta' P^t = N \quad \text{donc } N \in S_n(\mathbb{R})$$

comme les v.p. de N sont ≥ 0 ,
 N est dans $S_n^+(\mathbb{R})$.

N est unique

$$\text{Soit } Q \in S_n^+(\mathbb{R}) \text{ tel que } Q^2 = N^2 = M.$$

fait : N est un polynôme en N^2

$$(\exists p \in \mathbb{R}(X) \quad p(N^2) = N)$$

Il suffit de choisir p tel que $p(\lambda_i) = \sqrt{\lambda_i}$
pour $\lambda_i \in \text{sp}(N^2)$

(polynôme interpolateur)

$$N = P \Delta' P^t \quad N^2 = P \Delta^2 P^t \quad p(N^2) = P p(\Delta^2) P^t = P \Delta' P^t = N$$

$$z = r e^{i\theta}$$

$$A = S U$$

$$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow \\ S_n(\mathbb{R}) & O_n \end{matrix}$$

$$M \in S_n^+(\mathbb{R})$$

M est symétrique et

$$\lambda_i \text{ v.p. } \geq 0$$

$$\text{ou } X^t M X \geq 0 \quad \forall X$$

Comme $Q^2 = N^2$, Q commute avec N^2 , donc avec tout polynôme en N^2 , donc avec N .

Alors Q et N sont diagonalisables dans une même base

$$(e_i) \quad \begin{aligned} Q(e_i) &= \lambda_i e_i & Q^2(e_i) &= \lambda_i^2 e_i & \text{d'où } \lambda_i^2 &= \mu_i^2 \\ N(e_i) &= \mu_i e_i & N^2(e_i) &= \mu_i^2 e_i & \text{et donc } \lambda_i &= \mu_i \end{aligned}$$

car Q et N sont à vp ≥ 0 .
et donc $Q = N$.

(2) M^r toute $A \in GL_n(\mathbb{R})$ peut s'écrire comme $A = US$
 $U \in O(n) \quad S \in S_n^+(\mathbb{R})$
 (on peut $S \in S_n^+(\mathbb{R})$)

(on a aussi une écriture $A = TV$
 $S \in S_n^+(\mathbb{R}) \quad V \in O(n)$
 comme on le voit on applique la décomp. polar à A^t).

$$\boxed{\begin{aligned} &A^t = U^t \\ \text{Si } A &= US & A^t A &= (US)^t US = S^t U^t US = S^t S = S^2 \end{aligned}}$$

$A^t A$ est symétrique et positive (car si $A^t A X = \lambda X$
 $X^t A^t A X = \lambda X^t X$
 $(A X)^t (A X) = \lambda X^t X$
 ≥ 0 donc $\lambda \geq 0$)

Soit $S \in S_n^+$ tel que $S^2 = A^t A$ (d'après 1)

S est inversible car A l'est. Posons $U = A S^{-1}$

$$\text{On a } U^t U = (A S^{-1})^t A S^{-1} = S^{-1} A^t A S^{-1} = S^{-1} S^2 S^{-1} = \text{Id}$$

et $U \in O(n)$. On a bien $A = US$ avec $U \in O(n)$ et $S \in S_n^+$

3. Si $A = US$ alors $A^t A = S^2$ et S est uniquement déterminé par cette équation d'après le 1.
 et nécessairement $U = A S^{-1}$.

4. On utilise la densité de GL_n dans $M_n(\mathbb{R})$.

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Il existe une suite (A_k) de matrices inversibles avec $\lim A_k = A$

D'après le 2, pour tout k on peut écrire

$$A_k = U_k S_k \text{ avec } U_k \in O(n) \quad S_k \in S_n^+.$$

Fait $O(n)$ est compact dans $M_n(\mathbb{R})$
 car $O(n)$ est fermé et borné

car $O(n)$ est fermé et borné

$$\{M \in M_n \mid M^t M = Id\}$$

$$\cap_{i,j} \{M \mid s_{ij} = (M^t M)_{i,j}\}$$

fermé car $M \mapsto (M^t M)_{i,j}$ est continue

$O(n)$ est borné : pour $M \in O(n)$ $|M_{ij}| \leq 1$
(la norme euclidienne d'une ligne étant 1)

$$\forall M \in O(n) \quad \|M\| \leq 1 \text{ où } \|M\| = \sup_{i,j} |M_{ij}|$$

Quitte à extraire de (U_k) une sous-suite convergente, on peut supposer que (U_k) converge vers $U \in O(n)$.

$$A_k = U_k S_k \quad S_k = U_k^{-1} A_k = U_k^t A_k$$

$$\downarrow \quad \searrow$$

$$U^t \quad A$$

donc $\lim_k S_k = U^t A$

Pour $S = \lim_k S_k = U^t A \in S_n^+$ (S_n^+ est fermé dans $M_n(\mathbb{R})$)

donc $A = US$

Fait $S_n^+ = \{A \in S_n \mid \forall X \in \mathbb{R}^n \quad X^t A X \geq 0\}$

Intersection de fermé
à X fixé $\{A \mid X^t A X \geq 0\}$ fermé

$\subseteq$ Si $A \in S_n^+$ on peut la diagonaliser dans une BON (e.i.) [th. spectral] avec des v.p. $\lambda_i \geq 0$

$$\text{Soit } X \in \mathbb{R}^n, \quad X = \sum x_i e_i \quad A e_j = \lambda_j e_j$$

$$X^t A X = (\sum x_i e_i)^t A (\sum x_j e_j)$$

$$= \sum_{i,j} x_i x_j \underbrace{e_i^t A e_j}_{\substack{0 \text{ si } i \neq j \\ \lambda_i \text{ si } i=j}} = \sum_i \lambda_i x_i^2 \geq 0$$

$$\geq \text{Si } \lambda \text{ est une v.p. de } A \text{ de } \vec{v} \text{ p. } \lambda \text{ avec } \|\vec{v}\| = 1$$

$$0 \leq \vec{v}^t A \vec{v} = \lambda \vec{v}^t \vec{v} = \lambda$$

On perd l'unicité dans $M_n(\mathbb{R})$

$A = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{zéro}}}{0}$ s'écrit $A = U \cdot 0$ pour tout $U \in O_n(\mathbb{R})$.

Décomposition en valeurs singulières

$$A \in M_n(\mathbb{R})$$

$$A = U_1 \Delta U_2 \quad U_1, U_2 \in O_n(\mathbb{R})$$

$$\Delta \text{ diagonale}$$

$$\Delta = \begin{pmatrix} \delta_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \delta_n \end{pmatrix} \text{ avec } \delta_1 \geq \dots \geq \delta_n$$

① On va le déduire comme conséquence de la décomposition polaire

$$\text{On a } A = US \quad \text{pour } U \in O(n) \\ S \in S_n^+$$

Par le th. spectral, il existe $U' \in O(n)$ tq $U'SU'^t = \Delta$
est diagonale

$$A = \underbrace{UU'^t}_{U_1} \underbrace{\Delta U'}_{U_2}$$

$$S = U'^t \Delta U'$$

les coefficients diagonaux de Δ sont ≥ 0 .

Par imposition $\delta_1 \geq \dots \geq \delta_n$, on peut obtenir la base (e_i) de $\vec{V}$ p. de S de telle sorte que les v.p. correspondantes soient dans l'ordre décroissant.

On a donc $\exists \pi \in \mathbb{S}_n$ tel que $\delta_{\pi(1)} \geq \delta_{\pi(2)} \geq \dots \geq \delta_{\pi(n)}$

Si P_π est la matrice de permutation associée

$$P_\pi(e_i) = e_{\pi(i)}$$

$$\begin{pmatrix} \delta_{\pi(1)} & & \\ & \ddots & \\ & & \delta_{\pi(n)} \end{pmatrix} = P_\pi^{-1} \begin{pmatrix} \delta_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \delta_n \end{pmatrix} P_\pi$$

$$\begin{aligned} z(e_i) &= P_\pi^{-1} \Delta P_\pi(e_i) \\ &= P_\pi^{-1} \Delta e_{\pi(i)} = P_\pi^{-1} (\delta_{\pi(i)} e_{\pi(i)}) = \delta_{\pi(i)} e_i. \end{aligned}$$

U_1 et U_2 ne sont jamais uniques : si V est une matrice diagonale de ± 1 ($\Leftrightarrow V$ diagonale et orthogonale)

$$V \Delta V = V^2 \Delta = \Delta$$

$$U_1 \Delta U_2 = (U_1 V) \Delta (V U_2)$$

2) Par contre Δ est unique

On a

$$S_k = \sup_{F} \inf_{z \in S^{n-1} \cap F} \|Az\|$$

$\| \cdot \|$ norme euclidienne
 S^{n-1} sphère unité

↑
prise sur l'ensemble des sous-espaces de dimension k de E .

cas particulier $k=1$ $\dim F=1$ $S^{n-1} \cap F = \{\pm z\}$
 $\|Az\| = \|A[-z]\|$

cas particulier $k=1$ $\dim F=1$ $S^{n-1} \cap F = \{\pm z\}$
 $\|Az\| = \|A(z/n)\|$
 et la formule devient $S_1 = \sup_{x \in S^{n-1}} \|Ax\|$

Maintenant la formule. Si $A = U_1 \Delta U_2$ $\|Ax\| = \|U_1 \Delta U_2 x\|$
 $= \|\Delta U_2 x\|$ car U_1 orthogonale

$$\gamma_k = \sup_F \inf_{\substack{x \in F \\ \|x\|=1}} \|Ax\|$$

$F \mapsto U_2^{-1}(F)$
 est une bijection de
 l'ensemble des sous-espaces
 de dim. k de E

$$= \sup_F \inf_{\substack{x \in U_2^{-1}(F) \\ \|x\|=1}} \|\Delta U_2 x\|$$

$$\Delta = \begin{pmatrix} \delta_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \delta_n \end{pmatrix}$$

$$= \sup_F \inf_{\substack{y \in F \\ \|y\|=1}} \|\Delta y\|$$

$$\|\Delta y\|^2 = \sum_{i=1}^n \delta_i^2 y_i^2$$

$y_2 =$
 $U_2 x = y$
 $x = U_2^{-1} y$
 $\|x\| = \|y\|$

• $\gamma_k \geq \delta_k$ on choisit $F = \text{vect}(e_1, \dots, e_k)$

$$\gamma_k \geq \inf_{\substack{y \in F \\ \|y\|=1}} \|\Delta y\|$$

$y \in F_k$ s'écrit
 $y = \sum_{i=1}^k y_i e_i$

$$\|\Delta y\|^2 = \sum_{i=1}^k \delta_i^2 y_i^2$$

$$\geq \delta_k^2 \sum_{i=1}^k y_i^2 = \delta_k^2$$

donc $\gamma_k \geq \delta_k$

• $\gamma_k \leq \delta_k$ Soit F un sous-espace de dim. k .

Prenons $G = \text{vect}(e_{k+1}, \dots, e_n)$

$$\dim(G) = n - k + 1$$

$$\dim(F) + \dim(G) = n + 1 > \dim(E)$$

donc $\dim(F \cap G) \geq 1$

$$\dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G) \geq \dim(F) + \dim(G) - 1$$

$$\geq \dim(F) + \dim(G) - 1 \geq 1$$

donc il existe $y \in F \cap G$ de norme 1

y s'écrit $\sum_{i=k+1}^n y_i e_i$
 et $\|\Delta y\|^2 = \sum_{i=k+1}^n \delta_i^2 y_i^2 \leq \delta_k^2$

on a bien montré $\gamma_k \leq \delta_k$ en prenant
 la base irr. sur F .

On dit que les (δ_k) sont les valeurs singulières de A .

$$A = U_1 \Delta U_2^t \quad A^t A = U_2^t \Delta^2 U_2$$

$$A A^t = U_1 \Delta^2 U_1^t$$

λ_k sont les racines carrées des v.p. de $A^t A$
ou de $A A^t$.

Exo 5 $f \in L(E)$ E espace euclidien

CNS parce que f préserve l'orthogonalité

$$(x \perp y \Rightarrow f(x) \perp f(y)). (*)$$

les isométries contiennent, les homothéties aussi

En fait $(*) \Leftrightarrow f = \lambda u$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$
 u orthogonal ($\Leftrightarrow$ isométrie)

$\Leftarrow$ si $x \perp y$

$$\langle \lambda u(x), \lambda u(y) \rangle = \lambda^2 \langle x, u^t u y \rangle = \lambda^2 \langle x, y \rangle = 0.$$

$\Rightarrow$ soit u un tel endomorphisme

Soient x, y orthogonaux de norme 1.

Alors $x - y \perp x + y$

On a alors $u(x) - u(y) \perp u(x) + u(y)$

$$\langle u(x) - u(y), u(x) + u(y) \rangle = 0$$

$$\|u(x)\|^2 - \|u(y)\|^2 = 0$$

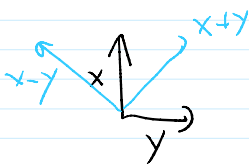
$$\text{donc } \|u(x)\| = \|u(y)\|$$

Si (e_i) est une BON, posons

$$\lambda = \|u(e_1)\| ; \text{ on a } \lambda = \|u(e_i)\| \quad \forall i$$

$$\begin{cases} \text{si } \lambda = 0 & u(e_i) = 0 \quad \forall i \quad \text{donc } u = 0 \\ \text{si } \lambda \neq 0 & \left(\frac{1}{\lambda} u(e_i) \right)_{1 \leq i \leq n} \text{ est une BON} \end{cases}$$

$\frac{1}{\lambda} u$ envoie une BON sur une BON
+ ... isométrie.

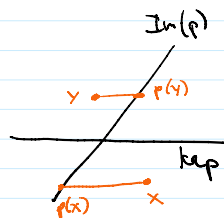


$\frac{1}{\lambda}u$ envoie une BON sur une BON
et donc c'est une isométrie.

EXO 6

E espace euclidien

p projecteur de E $p^2 = p$



(a) $\ker(p) \perp \text{Im}(p)$

(b) p symétrique $\langle x, p(y) \rangle = \langle p(x), y \rangle$

(c) p 1-lipschitienne $\|p(x)\| \leq \|x\|$

(a) $\Rightarrow$ (b)

$$\begin{aligned} x &= x_0 + x_1 & x_0, x_1 &\in \ker p \\ y &= y_0 + y_1 & y_0, y_1 &\in \text{Im } p \end{aligned} \quad p(y) = y_1$$

$$\langle x, p(y) \rangle = \langle x, y_1 \rangle = \langle x_0 + x_1, y_1 \rangle = \langle x_1, y_1 \rangle$$

car $x_0 \perp y_1$

et $\langle p(x), y \rangle = \langle x_1, y_1 \rangle$.

(b) $\Rightarrow$ (a)

$$\begin{aligned} x &\in \ker p & y &\in \text{Im } p \\ y &= p(y) \end{aligned} \quad \begin{aligned} \langle x, y \rangle &= \langle x, p(y) \rangle \\ &= \langle p(x), y \rangle = 0 \end{aligned}$$

(a) $\Rightarrow$ (c)

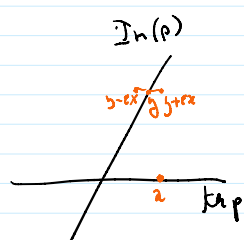
$$\begin{aligned} x &= x_0 + x_1 & p(x) &= x_1 \\ x_0 &\in \ker p & x_1 &\in \text{Im } p \end{aligned} \quad \begin{aligned} \|p(x)\| &= \|x_1\| \\ \|x\| &= \sqrt{\|x_0\|^2 + \|x_1\|^2} \end{aligned}$$

$\|x_1\| \leq \|x\|$

(c) $\Rightarrow$ (a) Supposons p 1-lipschitienne. On veut montrer que $\ker p \perp \text{Im } p$

Soit $x \in \ker p$
 $y \in \text{Im } p$

$$\begin{aligned} p(x+y) &= y \\ \|y\| &\leq \|x+y\| \\ \|y\|^2 &\leq \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2 \end{aligned}$$



On remplace x par ϵx $p(\epsilon x + y) = y$

donc $\|y\|^2 \leq \|\epsilon x + y\|^2 = \epsilon^2 \|x\|^2 + 2\epsilon \langle x, y \rangle + \|y\|^2$

En faisant $\epsilon \rightarrow 0^+$ on a $\langle x, y \rangle \geq 0$
 $\epsilon \rightarrow 0^-$ on a $\langle x, y \rangle \leq 0$

donc $\langle x, y \rangle = 0$ et donc $\ker p \perp \text{Im } p$

2) p, q 2 projecteurs orthogonaux
 pq projecteur $\Leftrightarrow p$ et q commutent

$\Leftrightarrow (pq)^2 = pqpq = p^2q^2 = pq$

$\Rightarrow$ On suppose que pq est un projecteur

Or p et q ont 1-lipschitien (par 1)

donc pq aussi

et donc pq est symétrique (par 1)

$$(pq)^t = q^t p^t = qp$$

$$\begin{aligned} A, B &\in S_n \\ AB &= BA \\ &\Downarrow \\ AB &\in S_n \end{aligned}$$

$$pq = (pq)^t = qp$$

donc p et q commutent.

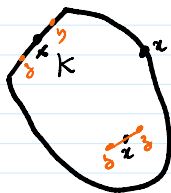
Remarque $p+q$ est un projecteur $\Leftrightarrow pq=qp=0$
 (sans hypothèse d'orthogonalité)

Exo 7

$$\|u\| = \sup_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|}$$

si u est une isométrie $\|u\|=1$

$B = \{u \in \mathcal{L}(E) \mid \|u\| \leq 1\}$ est un univers compact de $\mathcal{L}(E)$.



K convexe

$\frac{x+z}{2}$ est un point extrême

si $x = \frac{y+z}{2}$ $y, z \in K$
 implique $x=y=z$

Les points extrêmes de B sont les isométries.

On peut identifier $\mathcal{L}(E)$ à $M_n(\mathbb{R})$ en fixant une base de E

$\|M\| = \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ x \neq 0}} \frac{\|Mx\|}{\|x\|}$ et les points extrêmes de la boule unité sont $O(n)$.

Outil: décomposition polaire

$$M \in B \quad M = US$$

on est ramené à montrer que M extrême
 $\Leftrightarrow S = Id$