

Exo 1 E $\mathbb{R}$ -ev. $\dim(E) < \infty$. $(e_1, \dots, e_n)$ base de E
 $\omega : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ bilinéaire

$$M = (\omega(e_i, e_j))_{i,j}$$

1) (a) M inversible $\Leftrightarrow$ (b) $\forall f \in E^* \exists ! x \in E$
 $f(\cdot) = \omega(a, \cdot)$

$\Leftrightarrow$ (c) $\{x \in E : \forall y \in E \omega(a, y) = 0\} = \{0\}$.

Rappel On associe à ω l'application linéaire
 $\varphi : E \rightarrow E^*$
 $x \mapsto \omega(x, \cdot)$

- La condition (b) dit que φ est bijective
- La condition (c) dit que $\ker \varphi = \{0\}$

Comme $\dim(E) = \dim(E^*)$, φ injective $\Leftrightarrow \varphi$ bijective
 d'où (b) $\Leftrightarrow$ (c)

$$M_{ij} = \omega(e_i, e_j)$$

$$\text{donc } \varphi(e_i)(e_j) = M_{ij} \quad \forall i, j$$

$$\text{donc } \forall i \varphi(e_i) = \sum_j M_{ij} e_j^*$$

et la matrice de φ dans les bases B et B^*
 est ${}^t M$.

et donc (c) $\Leftrightarrow {}^t M$ inversible $\Leftrightarrow M$ inversible.

On appelle forme symplectique une forme bilinéaire
 non dégénérée antisymétrique. $\omega(x, y) = -\omega(y, x)$
 ($\Leftrightarrow$ alternée)

$$2) \quad J_n = J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} \in M_{2n}(\mathbb{R})$$

ω forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^{2n}$ de matrice J dans
 la base canonique.

$$\cdot \quad J_n^2 = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -I_n & 0 \\ 0 & -I_n \end{pmatrix} = -I_{2n}$$

donc J_n^2 est inversible

et donc J_n est inversible

$$\left[\begin{array}{l} A \text{ inversible} \Leftrightarrow A^2 \text{ inversible} \\ \Rightarrow \text{ok} \\ \Leftrightarrow \text{si } \text{rg}(A) < n, \text{rg}(A^2) < n \\ A[A(A^2)^{-1}] = Id \end{array} \right]$$

- La forme bilinéaire $\tilde{w}(x, y) = w(y, x)$ a pour matrice dans la base canonique ${}^t J = -J$.
Ainsi $\tilde{w}$ et $-w$ ont même matrice dans la base canonique et donc $\tilde{w} = -w \Rightarrow w$ antisymétrique.

Remarque J_n est semblable à $\begin{bmatrix} J_n & & \\ & \ddots & \\ & & J_n \end{bmatrix}$

$J_n e_i = -e_{n+1-i}$
 $J_n e_{n+1-i} = e_i$
 $1 \leq i \leq n$

$\begin{bmatrix} & & 1 \\ & & \\ -1 & & \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & 1 \end{bmatrix}$

via le changement de base
 $(e_1, \dots, e_{2n}) \rightarrow (e_1, e_{n+1}, e_2, e_{n+2}, \dots, e_n, e_{2n})$

(1) $u \in L(\mathbb{R}^{2n})$ M sa matrice dans la base canonique

$\forall x, y \in \mathbb{R}^{2n} \quad w(u(x), u(y)) = w(x, y) \Leftrightarrow ?$

$(x, y) \mapsto w(u(x), u(y))$ Posons $w' = w(u(x), u(y))$. La matrice de w' dans la base canonique est $w'(e_i, e_j) = w(u(e_i), u(e_j))$

$$= w\left(\sum_k M_{ki} e_k, \sum_l M_{lj} e_l\right)$$

$$= \sum_{k,l} M_{ki} M_{lj} J_{kl} = ({}^t M J M)_{ij}$$

donc u préserve la forme $w \Leftrightarrow {}^t M J M = J$.

(les formes bilinéaires w et w' sont égales si leurs matrices dans la base canonique sont égales)

3. E muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$

$u \in L(E) \quad u^* \text{ l'adjoint} \quad \langle u(a), b \rangle = \langle a, u^*(b) \rangle.$

Si $u \in GL(E)$ vérifie $u^* = -u$, alors $w_u : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$
 $(x, y) \mapsto \langle x, u(y) \rangle$
est symplectique.

- w_u est bilinéaire par linéarité de u et bilinéarité du produit scalaire.

- Vérifions la condition (c) de la question 2

Soit $x \in E$

$$\forall y \in E \quad w_u(x, y) = 0 \Leftrightarrow \forall y \in E \quad \langle x, u(y) \rangle = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall z \in E \quad \langle x, z \rangle = 0$$

$$\forall y \in E \quad \omega_u(x, y) = 0 \Leftrightarrow \forall y \in E \quad \langle x, u(y) \rangle = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall y \in E \quad \langle x, y \rangle = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \quad \text{en choisissant } y = x$$

est surjective

Ainsi ω_u est non dégénérée

$$\forall x, y \in E \quad \omega_u(x, y) = \langle x, u(y) \rangle = \langle u^*(x), y \rangle = -\langle u(x), y \rangle$$

$$= -\langle y, u(x) \rangle = -\omega_u(y, x)$$

ainsi ω_u est antisymétrique.

(b) Réciproquement, soit ω une forme symplectique sur E .
On cherche $u \in GL(E)$ tel que $\omega(x, y) = \langle x, u(y) \rangle \quad \forall x, y \in E$

• Soit $y \in E \quad x \mapsto \omega(x, y)$ est une forme linéaire sur E

[or toute forme linéaire sur un espace euclidien est de la forme $\langle \cdot, z \rangle$ pour un $z \in E$ unique]

Notons $u(y)$ l'unique $z \in E$ vérifiant
 $\langle x, z \rangle = \omega(x, y) \quad \forall x \in E$.

Vérifions que l'application $u: E \rightarrow E$ ainsi définie est linéaire

Soient $y_1, y_2 \in E \quad \lambda \in \mathbb{R}$

$$u(y_1 + \lambda y_2) = u(y_1) + \lambda u(y_2)$$

$$\forall x \in E \quad \omega(x, y_1 + \lambda y_2)$$

$$= \omega(x, y_1) + \lambda \omega(x, y_2)$$

$$= \langle x, u(y_1) \rangle + \lambda \langle x, u(y_2) \rangle$$

$$= \langle x, u(y_1) + \lambda u(y_2) \rangle$$

Or $u(y_1 + \lambda y_2)$ est l'unique $z \in E$ vérifiant
 $\omega(x, y_1 + \lambda y_2) = \langle x, z \rangle \quad \forall x \in E$

On a donc $u(y_1 + \lambda y_2) = u(y_1) + \lambda u(y_2)$.

On a $\forall x, y \in E \quad \omega(x, y) = \langle x, u(y) \rangle$

Soit $y \in \ker(u)$; $\forall x \in E \quad \omega(x, y) = -\omega(y, x) = 0$
comme ω est non-dégénérée cela implique
par le no. 1 $y = 0$.

$$\forall x, y \in E \quad \omega(x, y) = \langle x, u(y) \rangle$$

$$-\omega(y, x) = -\langle y, u(x) \rangle = -\langle u^*(y), x \rangle$$

$$= \langle x, -u^*(y) \rangle$$

on a donc $\forall y \in E \quad u(y) = -u^*(y)$
et $u = -u^*$.

On a $\det(u) = \det(u^*) = \det(-u) = (-1)^{\dim E} \det(u)$
comme u est inversible, cela implique $\dim E$ pair.

$$\Gamma(u) = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & -u^* \end{pmatrix} \quad \det \Gamma(u) = \det(u) \det(-u^*) = (-1)^{\dim E} \det(u)^2$$

comme n est inversible, cela implique $\dim E$ pair.

4. Soit $Sp_{2n} = \{M \in M_{2n}(\mathbb{R}) \text{ tq } {}^t M J M = J\}$.

Si $M \in Sp_{2n}$, $\det({}^t M J M) = \det(J)$

$\det(n^2 \det(J))$

comme $\det(J) \neq 0$, on a $\det(n)^2 = 1$.

(a) Sp_2 ?

$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ${}^t M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$

${}^t M J M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c & a \\ -d & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -bc+ad \\ -ad+bc & 0 \end{pmatrix}$

Ainsi, ${}^t M J M = J$ équivaut à $ad-bc=1$
donc à $\det(M)=1$

$Sp_2 = SL_2(\mathbb{R})$

(b) Sp_{2n} sous-groupe de $GL_{2n}(\mathbb{R})$ stable par transposée
($M \in Sp_{2n} \Rightarrow {}^t M \in Sp_{2n}$)

$Sp_{2n} \subset GL_{2n}(\mathbb{R})$ car tout élément de Sp_{2n}
a déterminant ± 1 .

• Si $M, N \in Sp_{2n}$ ${}^t(MN)J(MN)$
 $= {}^t N {}^t M J M N$
 $= {}^t N J N$ car $N \in Sp_{2n}$
 $= J$ — N —

• Soit $M \in Sp_{2n}$ ${}^t M J M = J$
implique $({}^t M J M)^{-1} = J^{-1}$
 $M^{-1} ({}^t M)^{-1} J^{-1} = J^{-1}$
donc ${}^t M^{-1} \in Sp_{2n}$ (*)

• Soit $N \in Sp_{2n}$ ${}^t N J N = J$
 ${}^t N {}^t N J N N^{-1} = {}^t N J N^{-1}$
 $J = {}^t N J N^{-1}$
donc $N^{-1} \in Sp_{2n}$ (**)

• De (*) et (**) on déduit que $N \in Sp_{2n}$
 $\Downarrow$
 ${}^t N \in Sp_{2n}$

(c) Soit $N \in Sp_{2n}$ λ racine de P_N ← polynôme caractéristique
 $\Downarrow$
 λ racine de P_N avec multiplicité

... polygone caractéristique

$\lambda, \frac{1}{\lambda}$ racines de P_n , même multiplicité.

• Comme P_n est à coefficients réels

$$P_n(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \overline{P_n(\lambda)} = 0$$

$$P_n''(\bar{\lambda})$$

donc $\bar{\lambda}$ est aussi racine de P_n .

Soit k la multiplicité de λ .

$$\text{Alors } P_n(\lambda) = P_n'(\lambda) = \dots = P_n^{(k-1)}(\lambda) = 0 \text{ et } P_n^{(k)}(\lambda) \neq 0$$

En conjuguant, $P_n(\bar{\lambda}) = P_n'(\bar{\lambda}) = \dots = P_n^{(k-1)}(\bar{\lambda}) = 0$ et $P_n^{(k)}(\bar{\lambda}) \neq 0$
 (P_n étant à coeff. réels) donc $\bar{\lambda}$ a multiplicité k .

• ${}^t n J n = J \Leftrightarrow {}^t n = J n^{-1} J^{-1}$

Ainsi ${}^t n$ et n^{-1} sont semblables et donc ont même polygone caractéristique.

$P_{{}^t n} = P_n$ donc n et n^{-1} ont même polygone caractéristique.

λ racine de multiplicité k de P_n
 $\lambda \xrightarrow{\quad} k$ de $P_{n^{-1}}$ (X)

donc $2n \forall \lambda \neq 0$

$$P_{n^{-1}}(x) = \det(n^{-1} - x I_{2n})$$

$$= \det(n^{-1}) \det(I_{2n} - x n)$$

$$= \det(n^{-1}) (-1)^{2n} x^{2n} P_n\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\det(I_{2n} - x n)$$

$$\det\left(\lambda \left(\frac{1}{\lambda} I_{2n} - n\right)\right)$$

$$= \lambda^{2n} (-1)^{2n} \det\left(n - \frac{1}{\lambda} I_{2n}\right)$$

et donc λ racine de $P_{n^{-1}}$ avec multiplicité k
 $\forall \lambda \neq 0$
 $\lambda \xrightarrow{\quad} k$ de P_n (X*)

donc le résidu avec (X) + (X*)

(d) admis (pas dur)

(e) $Sp_{2n} \cap O(2n)$ est un sous-groupe compact de $O(2n)$
 (on de $GL_{2n}(\mathbb{R})$).

• sous-groupe: déjà vu.

• $O(n)$ est un sous-groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$

• Il suffit de voir que Sp_{2n} est fermé dans $M_{2n}(\mathbb{R})$;

$M \mapsto {}^t n J n - J$ est continue sur $M_{2n}(\mathbb{R})$

donc l'ensemble zéro de n est fermé.

$M \mapsto {}^t M J M - J$ est continue sur $M_n(\mathbb{R})$

donc l'image réciproque de 0 est fermée,

et alors $Sp_{2n} \cap O(2n)$ est fermé dans $O(2n)$,
donc compact.

⚠ Sp_2 n'est pas compact ; il n'est pas borné
 $\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & \frac{1}{x} \end{pmatrix}$ n'est pas borné quand $x \rightarrow 0$ ou $x \rightarrow \infty$.

Exo 3

$$S_n^{++} = \{ M \in S_n(\mathbb{R}), \text{ définis positifs} \}.$$

Soit $A \in S_n$. Alors on a équivalence entre

(1) les valeurs propres de A sont dans $\mathbb{R}_+^*$

(2) $\forall X \in \mathbb{R}^n, X \neq 0 \quad {}^t X A X > 0$

Preuve (2) $\Rightarrow$ (1) Si λ une valeur propre de v.p. X ($X \neq 0$)
 $0 < {}^t X A X = {}^t X (\lambda X) = \lambda {}^t X X = \lambda \|X\|^2$
d'où $\lambda > 0$.

(1) $\Rightarrow$ (2) On peut diagonaliser A dans une base
orthonormale $A = {}^t O \Delta O$ avec $O \in O(n)$
 $\Delta = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$
avec $\lambda_i > 0$

$${}^t X A X = {}^t X {}^t O \Delta O X = {}^t (O X) \Delta O X$$

Or, si $Y \in \mathbb{R}^n \quad {}^t Y \Delta Y = \sum \lambda_i y_i^2 > 0$ si $Y \neq 0$
d'où ${}^t X A X > 0$

① S_n^{++} ouvert dans S_n
convexe

$\hookrightarrow$ Si $A, B \in S_n^{++} \quad t \in [0, 1]$

$\forall X \in \mathbb{R}^n, X \neq 0 \quad {}^t X (tA + (1-t)B) X$

$$= t \cdot \underbrace{{}^t X A X}_{> 0} + (1-t) \underbrace{{}^t X B X}_{> 0} > 0$$

donc $tA + (1-t)B \in S_n^{++}$, donc S_n^{++} est convexe.

choisissons une norme sur $M_n(\mathbb{R})$
[elles sont toutes équivalentes]

On peut prendre $\|M\| = \sup_{\substack{X \in \mathbb{R}^n \\ \|X\|=1}} \frac{\|MX\|}{\|X\|} \leftarrow \| \cdot \|$ norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$.

Soit $M \in S_n^{++}$
 $\alpha = \inf_{\substack{X \in \mathbb{R}^n \\ \|X\|=1}} {}^t X M X > 0$

car la borne inférieure est atteinte puisque

$$\alpha = \inf_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ \|x\|=1}} \|x\| > 0$$

car la borne inférieure est atteinte puisque $x \mapsto \|x\|$ est continue sur le compact S^{n-1} .

Sat $x \in S^{n-1}$, $t_X X = t_X M X + t_X (N-M) X$
 $\geq \alpha + t_X (N-M) X$

$$|t_X (N-M) X| = \langle X, (N-M) X \rangle$$

$$\leq \underbrace{\|X\|}_{=1} \cdot \underbrace{\|(N-M) X\|}_{\leq \|N-M\|} \leq \|N-M\|$$

$$t_X X \geq \alpha - \|N-M\|$$

Ainsi, dès que $\|N-M\| < \alpha$, on a $t_X X > 0$ $\forall x \in S^{n-1}$,
 donc $N \in S_n^{++}$.

On a donc montré que S_n^{++} est ouvert dans S_n .

Remarque: une autre preuve de " S_n^{++} ouvert" utilise la question 3 de l'exo 2

$$\left[A \in S_n^{++} \Leftrightarrow \begin{matrix} \exists t \in \{1, \dots, n\} \\ \text{AES}_n \end{matrix} \det(A_{tt}) > 0 \right]$$

sous-matrice $(a_{ij})_{1 \leq i, j \leq p}$

Remarque de même, S_n^{+} est fermé dans S_n ,
 et dans S_n $S_n^{++} = \overline{S_n^{+}}$, $S_n^{+} = \overline{S_n^{++}}$

(2) Mq $\log(\det(\cdot))$ est concave sur S_n^{++}
 $[AES_n^{++} \rightarrow \det(A) > 0]$.

On doit montrer $\forall A, B \in S_n^{++} \quad \forall t \in (0, 1)$

$$\log \det(tA + (1-t)B) \geq t \log \det(A) + (1-t) \log \det(B)$$

ce qui équivaut à

$$\det(tA + (1-t)B) \geq \det(A)^t \det(B)^{1-t}$$

• Supposons $A = I_n$.

On doit montrer $\det(tI_n + (1-t)B) \geq \det(B)^{1-t}$.

Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$ les valeurs propres de B
 (comptées avec multiplicité)
 les valeurs propres de $tI_n + (1-t)B$ sont $t + (1-t)\lambda_1, \dots, t + (1-t)\lambda_n$
 $\det(tI_n + (1-t)B) = \prod_{i=1}^n (t + (1-t)\lambda_i) \stackrel{?}{\geq} \left(\prod_{i=1}^n \lambda_i\right)^{1-t}$

Montrons que $\forall x > 0 \quad t + (1-t)x \geq x^{1-t} \quad (*)$
 Cette inégalité équivaut à
 $\log(t + (1-t)x) \geq (1-t) \log x$
 et est vraie par concavité du logarithme.

Par $(*)$, on a $\forall t + (1-t)\lambda_i \geq \lambda_i^{1-t}$ pour tout i
 donc $\det(tI_n + (1-t)B) \geq \det(B)^{1-t}$

• Pour le cas général

$$\det(tA + (1-t)B) = \det(A) \det(tI_n + (1-t)A^{-1}B)$$

par lms S_n

Prends $A^{\frac{1}{2}}$ la matrice de S_n^{++}
 qui vérifie $(A^{\frac{1}{2}})^2 = A$, et $A^{-\frac{1}{2}} = (A^{\frac{1}{2}})^{-1}$

$$tA + (1-t)B = A^{\frac{1}{2}} (tI_n + (1-t)A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}}) A^{\frac{1}{2}}$$

$\in S_n, S_n^{++}$
et même S_n^{++} car
semblable à B .

on a donc

$$(A^{\frac{1}{2}})^2 = A \quad \det(tA + (1-t)B) = \det(A^{\frac{1}{2}}) \det(tI_n + (1-t)A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}}) \det(A^{\frac{1}{2}})$$

$$\Downarrow$$

$$\det(A^{\frac{1}{2}})^2 = \det(A)$$

$$\Downarrow$$

$$\det(A^{\frac{1}{2}}) = \sqrt{\det A}$$

$$\det(A^{-\frac{1}{2}}) = \frac{1}{\det(A^{\frac{1}{2}})} = \frac{1}{\sqrt{\det A}}$$

$$\Rightarrow \det A \cdot \det(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})^{1-t}$$

$$= \det(A) [\det(A)^{-1} \det(B)]^{1-t}$$

$$= \det(A)^{1-(1-t)} \det(B)^{(1-t)}$$

$$= \det(A)^t \det(B)^{1-t}$$

Même game de preuve pour
 $\forall A, B \in S_n^{++}$

$$\det(A+B)^{\frac{1}{n}} \geq \det(A)^{\frac{1}{n}} + \det(B)^{\frac{1}{n}}$$

Le déterminant apparaît quand on fait des changements de variable

Le déterminant apparaît quand on fait des changements de variable

λ_n = mesure de LEBESGUE sur $\mathbb{R}^n$.

$$A \in GL_n(\mathbb{R}) \quad \lambda_n(A(B)) = \det(A) \lambda_n(B)$$

$B \subset \mathbb{R}^n$ borélien

BRUNN-MINKOWSKI
(cf injet 2005)
 $A, B \subset \mathbb{R}^n$ compacts
 $\lambda_n(A+B)^{1/n} \geq \lambda_n(A)^{1/n} + \lambda_n(B)^{1/n}$
 $\{x+y, x \in A, y \in B\}$

Exo 2

1)

$$A \in S_n^+$$

A_p sous-matrice des p 1^{ères} lignes/colonnes

$$\text{Si } x \in \mathbb{R}^p \quad x = (x_1, \dots, x_p)$$

$$\text{notons } \tilde{x} = (x_1, \dots, x_p, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$$

$$0 \leq \tilde{x}^T A \tilde{x} = x^T A_p x \quad \text{donc avec la condition (2) d'avant,}$$

$$A_p \in S_p^+$$

$$\text{donc } \det(A_p) \geq 0$$

2)

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} A_p & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix}$$

$$\text{vérifie } \det(A_p) = 0$$

$$\text{mais } A \in S_n^+$$

car si c'était le cas on aurait $M \in S_n^+$.

$$\text{avec } M \in S_{n-p}^+$$

3)

Comme au 1, on montre

$$A \in S_n^{++} \Rightarrow \det(A_p) > 0 \quad \forall p$$



+ dur.

on le démontre par récurrence sur n .

Supposons vrai au rang $n-1$

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A_{n-1} & x \\ \hline t_x & \alpha \end{array} \right) \quad x \in \mathbb{R}^{n-1} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

On suppose $\det(A_p) > 0$ pour $p=1, \dots, n$

Par hypothèse de récurrence, $A_{n-1} \in S_{n-1}^{++}$

Soit $M = \left[\begin{array}{c|c} B & 0 \\ \hline t_y & 1 \end{array} \right]$ ${}^t M = \left[\begin{array}{c|c} B & y \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right]$

pour $B \in S_{n-1}$
 $y \in \mathbb{R}^{n-1}$

$$MA^t M = \left(\begin{array}{c|c} A_{n-1} & x \\ \hline t_x & \alpha \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} B & y \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{c|c} B & 0 \\ \hline t_y & 1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} BA_{n-1} & Bx \\ \hline t_y A_{n-1} t_x & t_y \alpha + 1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} BA_{n-1} B & BA_{n-1} y + \alpha \\ \hline (t_y A_{n-1} t_x) B & (t_y A_{n-1} t_x) y + t_y \alpha + 1 \end{array} \right)$$

On choisit B tel que $BA_{n-1} B = I_{n-1}$
 et y tel que $A_{n-1} y + \alpha = 0$

$$MA^t n = \left(\begin{array}{c|c} Id & 0 \\ \hline 0 & \beta \end{array} \right) \quad \det(A) > 0$$

$$\beta = \det(MA^t n) = \det(n)^2 \det(A) > 0$$

donc $A = \underbrace{n^{-1} \left(\begin{array}{c|c} Id & 0 \\ \hline 0 & \beta \end{array} \right) n}_{\in S_n^{++}}$ donc $A \in S_n^{++}$.