Complémentes sur les formes quadratiques et les matrices symétriques

Exercice 1. Groupe symplectique

Il intervient régulièrement dans les sujets d'écrits. Voici une présentation inspirée du sujet 2016.

Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension finie n et ω une forme bilinéaire sur E. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et $M = (\omega(e_i, e_j)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ la matrice de ω dans cette base.

1. Montrer l'équivalence entre
   (a) M est inversible,
   (b) pour tout $f \in E^*$, il existe un unique x dans E tel que pour tout $y \in E$, $\omega(x, y) = f(y)$,
   (c) $\{x \in E \,:\, \forall y \in E,\, \omega(x, y) = 0\} = \{0\}$.

   Lorsque ces conditions sont remplies, on dit alors que ω non dégénérée. On appelle forme symplectique une forme bilinéaire non dégénérée et antisymétrique (i.e. vérifiant $\omega(x, y) = -\omega(y, x)$ pour tous x, y dans E).

2. Soit $J = J_n$ la matrice carée de taille $2n$ donnée comme $J_n = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$ et ω la forme bilinéaire sur $\mathbf{R}^{2n}$ dont la matrice dans la base canonique est J_n.
   (a) Montrer que ω est une forme symplectique.
   (b) Soit $u \in L(E)$ un endorphisme et M sa matrice dans la bse canonique. Montrer que u vérifie $\omega(u(x), u(y)) = \omega(x, y)$ pour tous x, y dans E si et seulement si ${}^tMJM = J$.

3. On suppose E muni d'un produit scalaire $\langle \cdot | \cdot \rangle$. On notera $u^* \in L(E)$ l'endomorphisme adjoint d'un endomorphisme $u \in L(E)$, c'est-à-dire l'unique endomorpshisme de $L(E)$ vérifiant $\langle u(x)|y\rangle = \langle x|u^*(y)\rangle$ pour tous x, y dans E.
   (a) Soit $u \in GL(E)$ un endomorphisme vérfiant $u^* = -u$. Montrer que l'application $\omega_u : E \times E \to \mathbf{R}$ définie par $\omega_u(x, y) = \langle x|u(y)\rangle$ est une forme symplectique.
   (b) Réciproquement, soit ω une forme symplectique sur E. Montrer qu'il existe un unique endomorphisme u de E tel que $\omega = \omega_u$. Montrer que $u^* = -u$ et que u est inversible. En déduire que E est de dimension paire.

4. On note Sp_{2n} l'ensemble des *matrices symplectiques*

$$\mathrm{Sp}_{2n} = \{M \in M_{2n}(\mathbf{R}) \,:\, {}^tMJM = J\}$$

   (a) Expliciter Sp_2.
   (b) Montrer que Sp_{2n} est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_{2n}(\mathbf{R})$ stable par transposée.
   (c) Soit $M \in \mathrm{Sp}_{2n}$. Montrer que si $\lambda \in \mathbf{C}$ est une racine du polynôme caractéristique P_M, alors $\overline{\lambda}$ et $1/\lambda$ sont également racines de P_M, avec la même multiplicité.
   (d) Soit $M \in M_{2n}(\mathbf{R})$. Montrer l'équivalence entre
   — $M \in \mathrm{Sp}_{2n} \cap \mathrm{O}(2n)$,
   — $M \in \mathrm{Sp}_{2n}$ et $MJ = JM$,
   — $M \in \mathrm{O}_{2n}$ et $MJ = JM$.
   (e) Montrer que $\mathrm{Sp}_{2n} \cap \mathrm{O}(2n)$ est un sous-groupe compact de $\mathrm{O}(2n)$.

Exercice 2. Théorème de Sylvester

Soit A une matrice symétrique réelle de taille $n \times n$ et p un entier entre 1 et n. On définit A_p comme étant la matrice extraite de A contenant les p premières lignes et p premières colonnes de A.

1. Montrer que si A est positive, alors $\det(A_p) \geqslant 0$ pour tout $p \in \{1, \dots, n\}$.
2. La réciproque est-elle vraie ?
3. Montrer que A est définie positive si et seulement si $\det(A_p) >$ pour tout $p \in \{1, \dots, n\}$.
4. Pour $I \subset \{1, \dots, n\}$, on note A_I la matrice extraite de A conteant les lignes et colonnes d'indices dans I. Montrer que A est positive si et seulement si $\det(A_I) \geqslant 0$ pour tout sous ensemble non vide I de $\{1, \dots, n\}$.

Exercice 3. Concavité de $\log \det$

1. Montrer que l'ensemble S_n^{++} des matrices symétriques définies positives est un sous-ensemble convexe et ouvert de $M_n(\mathbf{R})$.
2. Montrer que la fonction $M \mapsto \log \det(M)$ est concave sur S_n^{++} (on commencera par traiter le cas où une des matrices intervenant dans l'inégalité de concavité est l'identité).

Exercice 4. Ordre de Löwner

Pour $A, B \in S_n$, on écrit $A \leqslant B$ si la matrice $B - A$ est positive.

1. Montrer que l'on définit ainsi une relation d'ordre, qui n'est pas totale.
2. Soient $A, B \in S_n^{++}$. Montrer que $A \leqslant B \iff B^{-1} \leqslant A^{-1}$.
3. Soient $A, B \in S_n^{+}$ deux matrices vérifiant $A \leqslant B$. Montrer que $\sqrt{A} \leqslant \sqrt{B}$ (si $M \in S_n^{+}$, on note $\sqrt{M}$ l'unique matrice de S_n^{*} véréifiant $(\sqrt{M})^2 = M$.