

Exo 1

 E k.e.v. $(e_i)_{i \in I}$ base de E Mq $\exists! (e_i^*)_{i \in I}$ dans E^* tq $e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$.Plus généralement : $\forall (\lambda_i)_{i \in I}$ dans k ,
 $\exists! f \in E^*$ tel que $f(e_i) = \lambda_i$.

$$\left(f\left(\sum_{i \in I} \alpha_i e_i\right) = \sum \lambda_i \alpha_i \right)$$

Appliqué à $\chi_i = \delta_{ij}$ (pour j fixé)
on obtient l'existence/unicité de e_j^* . $\bigwedge_{i \in I} e_j^*$ dépend de $(e_i)_{i \in I}$
et pas seulement de e_j

$$2) \quad a) \quad k^2 \quad \begin{array}{l} e_1 = (1, 1) \\ e_2 = (1, 0) \end{array} \quad \begin{array}{l} e_1^*(x, y) = y \\ e_2^*(x, y) = x - y \end{array}$$

b) $k_n[x]$ $(x^k)_{0 \leq k \leq n}$ base des monômes
la famille duale $(e_k^*)_{0 \leq k \leq n}$ ont
 $e_k^*\left(\sum_{i=0}^n a_i x^i\right) = a_k$.

c) $E = \mathbb{R}^{(N)}$ quel est le dual?
 E^* s'identifie à $\mathbb{R}^N \leftarrow$ toutes les suites

à $(v_n) \in \mathbb{R}^N$
on identifie l'élément de E^* donné

$$(u_n) \mapsto \sum_{n \in \mathbb{N}} u_n v_n$$

somme finie.

Réciproquement si $f \in E^*$
on pose $v_n = f(e_n)$

 (e_n) base canonique de $\mathbb{R}^{(N)}$.La famille duale de $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est

$$e_n^* = (0, \dots, \underset{\uparrow}{1}, 0, \dots) \in \mathbb{R}^N$$

et $(e_n^*)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas une base de $\mathbb{R}^N$
car $\text{vect}(e_n^*) = \mathbb{R}^{(N)} \subsetneq \mathbb{R}^N$.

$$(\mathbb{R}^{(N)})^* = \mathbb{R}^N$$

$(\mathbb{R}^N)^*$ ← compliqué
contient autre
chose que
 $\mathbb{R}^{(N)}$.

$$\sum \lambda_i e_i^* = 0$$

3. Si $\sum_{i \in I} \lambda_i e_i^* = 0$

on obtient $\lambda_j = 0$
en l'évaluant en e_j

4. Soit E de dim. finie $(e_i)_{i \in I}$ base de E , I fini
Soit $f \in E^*$, on a par $\lambda_i = f(e_i)$ somme finie
on a $f(x) = \sum_{i \in I} \lambda_i e_i^*(x)$ puisque

* est vraie pour
donc $x = e_j$ pour $x \in \text{vect}(e_j)$

vérifier cette égalité sur e_j
 $f(e_j) = (\sum \lambda_i e_i^*)(e_j) = \lambda_j$
(*) est vérifiée sur $\text{vect}(e_j) = E$.

On a donc $f \in \text{vect}(e_i^*)$, donc $\text{vect}(e_i^*) = E^*$.

5. $S: E \rightarrow E^{**}$
 $x \mapsto S_x: f \mapsto f(x)$

S est linéaire. Montrons qu'elle est injective.

Soit $x \in \ker(S)$ $\forall f \in E^* f(x) = 0$.

Si $x \neq 0$, soit (e_α) une base de E
avec $e_0 = x$
(on complète la famille
libre $\{x\}$ en une base)
Alors la base linéaire
 $f(e_0) = 1$ $f(e_\alpha) = 0$ si $\alpha \neq 0$
vérifie $f(x) \neq 0$.

d'où $x = 0$.
En dimension finie, S est surjective

Si $(e_i)_{i \in I}$ une base de E
 $(e_i^*)_{i \in I}$ la base duale

Si $f \in E^{**}$ on a $f = S(\sum f(e_i^*) e_i)$ (*)

identité sur E^*
on la vérifie pour $z = e_j^*$ $\forall z \in E^*$

$S(\sum f(e_i^*) e_i)(e_j^*)$
 $= e_j^*(\sum f(e_i^*) e_i) = f(e_j^*)$
il + vraie sur

$$= e_j^* (\sum f_i e_i^*) e_i = \delta_{ij}$$

donc elle est vraie sur
 $\text{vect}(e_j^*) = E^*$.

+ simple $\dim(E) = \dim(E^*) = \dim(E^{**})$
 et injectif $\Leftrightarrow$ bijectif.

6. OK si on identifie E à E^{**} .

(f_i) base de E^*

$\downarrow$
 (f_i^*) base duale dans E^{**}
 $\uparrow$
 $S(e_i)$

$\exists e_i$ tel que $f_i^* = S(e_i)$ $\leftarrow$ f est
 et (f_i) et la base duale de (e_i)
 $f_i(e_j) = S(e_j)(f_i) = f_j^*(f_i) = \delta_{ij}$

Exo 2

E, E^*

jouent un rôle
 symétrique en dim

$V \subset E$

$V^\perp \subset E^*$
 $\{f \in E^* : f(v) = 0\} \quad \forall v \in V$

$W \subset E^*$

$W^\circ \subset E$
 $\{x \in E : \forall f \in W, f(x) = 0\}$

(1)

$W^\circ = \bigcap_{f \in W} \ker(f)$ est un sous-espace
 $V^\perp = \bigcap_{v \in V} \ker(S(v))$

(2)

(a) $V \subset (V^\perp)^\circ$ si $x \in V \quad \forall f \in V^\perp, f(x) = 0$
 $\Rightarrow x \in (V^\perp)^\circ$

Si $V = (U^\perp)^\circ$, alors V est un
 ... rationnel.

Si E est un
 espace indiciel
 de dim finie
 on peut identifier
 $E^* \simeq E$
 Tout $f \in E^*$
 est de la forme
 $f(x) = \langle x, y \rangle$
 et alors $V^\perp$
 coïncide avec
 $\{y \in E : \langle x, y \rangle = 0 \quad \forall x \in V\}$

not surjective $f: E \rightarrow E^{**}$
 $f_i^* \in E^{**} = \text{Im } f$

fine

$\gamma = 03$

space

$\gamma = 0$

$\sqrt{t}^0$

Si $V = U^\perp$, alors V est un sous-espace vectoriel.

Réciproquement, soit V un sous-espace

Soit $(e_i)_{i \in I}$ une base de E

avec $J \subset I$ tq $\text{vect}((e_i)_{i \in J}) = V$.

(pour avoir une telle base, compléter une base de V en base)

$$V^\perp = \text{vect}((e_i^*)_{i \in I \setminus J}).$$

$$\left[\begin{array}{l} f \in E^* \text{ est de la forme } \sum \lambda_i e_i^* \\ f \in V^\perp \Leftrightarrow \forall i \in J, f(e_i) = 0 \Leftrightarrow \forall i \in J, \lambda_i = 0 \end{array} \right.$$

et de même $(V^\perp)^\perp = \text{vect}((e_i)_{i \in J})$

(b) Par symétrie de E et E^* , on a $W \subset W^{\perp\perp}$ avec égalité ssi W est un s

En particulier $V^\perp = V^{\perp\perp}$.

Exercice 3

Lemme E, F, G k.c.v.

$u: E \rightarrow F$ linéaire

$v: E \rightarrow G$

$\exists \varphi: F \rightarrow G$ linéaire tq. $v = \varphi \circ u$

$$\ker(u) \subset \ker(v)$$

on suppose E, F dim. finie pour s

Preuve du lemme

$$\Downarrow \ker(u) \subset \ker(\varphi \circ u) = v$$

$$\Uparrow \text{ On veut } \varphi: F \rightarrow G$$

Si $y = u(x)$ pour $x \in E$
 $\rightarrow \varphi(y) = v(x)$

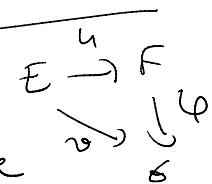
pace.

de E).

$\lambda \neq 0$

$\in J$) = V .

sub-space.



ϕ is
multiplication

ψ n'est
pas unique ;
il l'est
si ψ est
surjectif

Si $y = u(x)$ pour $x \sim$
 on pose $\varphi(y) = v(x)$.
 Cette définition ne dépend
 du choix de x car si
 $x_1 \sim x_2 \in \ker(u) \subset \ker$
 alors $v(x_1) = v(x_2)$

ok si
 $\dim F < +\infty$

On a défini ainsi φ .
 Soit F_1 un supplémentaire de
 Alors on étend φ à $F =$
 par $\tilde{\varphi}(z+y) = 0 + \varphi(y)$
 $\forall z \in F_1 \quad \forall y \in \text{Im}(u)$
 $\tilde{\varphi}: F \rightarrow G$ vérifie

E, F k-ev. dim finie

$$u: E \rightarrow F$$

$$t_u: F^* \rightarrow E^*$$

$$f \mapsto f \circ u$$

$$(1) \quad \underbrace{\ker(u)^\perp}_{\subset E^*} = \text{Im}(t_u)$$

Soit $f \in E^*$. On

$$f \in \ker(t_u)^\perp$$

$$\forall x \in \ker(u) \quad f(x) = 0$$

$$\ker(u) \subset \ker f$$

l'équivalence est

$$u \text{ injective} \Leftrightarrow \ker u = \{0\} \Leftrightarrow \ker$$

nd pos
 $u(x_1) = u(x_2)$
 $u(x_1)$
 (x_2)

$In(u) \rightarrow G$
 $In(u)$ sans f

$F_1 \oplus In(u)$
 (y)
 $\varphi \circ u = \sigma$

si u n'
 surjectif
 mais pos
 en
 général.

vent l'équivalence

$$\Leftrightarrow f \in Im(t_u)$$

$$\Downarrow \exists g \in E^* + q.$$

$$f = g \circ u.$$

$$\Leftrightarrow f(t_u)(g).$$

$) = 0$

$u(f)$

donnée par
 le lemme.

$$(u)^\perp = E^* \Leftrightarrow Im(t_u) = E^* \Rightarrow t_u \text{ surjective.}$$

u injective $\Leftrightarrow \text{Ker } u = \{0\} \Leftrightarrow \text{rg } u = \dim E$

Donc $V \subset E$

$$V = \{0\} \Leftrightarrow V^\perp = E^*$$

(2)

$$\text{rg}(^t u) = \dim \text{Im}(^t u) = \dim(\text{Ker } u)^\perp$$

$$\text{rg}(u) = \dim E - \dim(\text{Ker } u)$$

Soit $V \subset E$ un sous-espace

En effet si $V = \text{Vect}\{e_1, \dots, e_r\}$
 $E = \text{Vect}\{e_1, \dots, e_n\}$

$$V^\perp = \text{Vect}\{e_{r+1}, \dots, e_n\}$$

(4)

Si $(e_i)_{i \in I}$ base de E
 $(f_j)_{j \in J}$ base de F

$$M = \text{Mat}(J, I)$$

${}^t M$ = matrice de ${}^t u$ dans

$$M = (m_{ij})$$

$$m_{ij} = (f_i^* | u(e_j))$$

Si N la matrice de u
 dans (f_j^*) et (e_i^*)

$$m_{ij} = (e_i^* | ({}^t u(f_j^*))) = \langle e_i^*, u(f_j^*) \rangle$$

$$= ({}^t u(f_j^*))(e_i) = (f_j^* | e_i) = \delta_{ij}$$

Exo 5

E k-ev. de dim finie

$(u) = u \sim$
 $(\Rightarrow)^t u$ surjective.

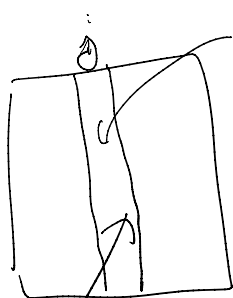
$n) \uparrow$

$$\dim(V^\perp) = \dim(E) - \dim(V)$$

$(e_i)_{i \in I}$ $J \subset I$
 $(e_i)_{i \in I}$

$(e_i^*)_{i \in I \setminus J}$ $\text{card}(I \setminus J)$
 $= \text{card}(I) - \text{card}(J).$

Matrice de u
 dans (e_i) et (f_j) .
 dans (f_j^*) et (e_i^*) .



j -eme colonne
 de $u(e_j)$
 dans la base (f_i)

$$u(e_i) = m_{ji}$$

Exo 5

E k-ev. de dim p
 $f, f_1, \dots, f_n \in E^*$

$$f \in \text{Vect}(f_1, \dots, f_n) \Leftrightarrow \ker(f)$$

$$\Rightarrow \text{ facile } f = \sum \lambda_i f_i \text{ imp}$$

$$\Leftarrow \text{ Supposons } (f_i) \text{ linéairement} \\ \text{complétons } (f_i) \text{ en une}$$

$p = \dim$
Il existe une base (e_i)
dont $(f_1, \dots, f_p)$

$$f_i(e_j) = \delta_{ij} \\ \forall i \neq j \\ e_i \in \ker(f_j)$$

$$f \in \text{Vect}(f_1, \dots, f_p) \text{ donc} \\ \text{tels que}$$

$$\lambda_i = f(e_i) \quad \delta_i \quad i >$$

$$\text{Donc } i > n \Rightarrow \lambda_i = f(e_i)$$

utile dans le th. des extrema

Exo 6

$$\mathbb{R}_n[x]$$

$$a_0, \dots, a_n \text{ des } \dots \\ \sum_i : \mathbb{R}_n[x] \rightarrow$$

$$f_1) \cap \dots \cap \ker(f_n) \subset \ker(f)$$

$$\text{siqne } \cap \ker(f_i) \subset \ker(f)$$

et indépendants et

$$\text{base } (f_1, \dots, f_p)$$

$$(E^*) \geq n \text{ de } E^*$$

de E

est la base duale.

$$\text{il existe } \lambda_1, \dots, \lambda_p$$

$$\text{que } f = \sum_{i=1}^p \lambda_i f_i$$

$$\text{et } e_i \in \ker(f_1) \cap \dots \cap \ker(f_n)$$

$$\subset \ker(f)$$

$$= 0. \text{ et donc } f = \sum_{i=1}^p \lambda_i f_i$$

liés
distincts

$\mathbb{R}$
 $\mathcal{D}(a_i)$

on

$$\xi_i: \mathbb{R}_n[X] \xrightarrow{p}$$

Alors $(\xi_i)_{0 \leq i \leq n}$ est une base
identifiant $\mathbb{R}_n[X]$

On cherche des polynômes

Les P_i sont les polynômes

$$P_i(X) = \frac{\prod_{j \neq i} (X - a_j)}{\prod_{j \neq i} (a_i - a_j)}$$

Comme (P_i) est une base
 (ξ_i) —
c'est

(2)

$$E = \mathbb{R}_n[X]$$

$$a \in \mathbb{R}$$

on cherche les φ
 $\varphi(C)$

$$F = \{ (X-a)^2 P : P \in \mathbb{R}_{n-2}[X] \}$$

on cherche $F^\perp$

IV -

$P(a_i)$.

base et on va
de quelle base de
c'est la base duale.

$P_0, \dots, P_n$ tels que

$$(P_j) = \delta_{ij}$$

$$(a_i) = \delta_{ij}$$

us de LAGRANGE

)

(a_i)

$$a \text{ a bien } P_j(a_i) = \delta_{ij}$$

ve de $\mathbb{R}_n[X]$

de $\mathbb{R}_n[X]^*$,

et la base duale.

$p \in E^*$ tq.

$$(L_A)^2(p) = 0 \quad \forall p \in k_{n-2}[X]$$

$\{X\}$ est un sous-espace
vectriel de E .

$\deg \phi_i = i$, degrés.

on cherche f

Si on pose $\Phi_i = (X-a)^i$

$(\Phi_0, \dots, \Phi_n)$ est

$$F = \text{vect}(\Phi_0, \dots, \Phi_n).$$

La base duale de F

$$\text{est } \Phi_i^*(P) = \frac{P^{(i)}(a)}{i!}$$

$$F^\perp = \text{vect}(\Phi_0^*, \Phi_1^*)$$

Réponse: les Φ de P_1

Exo 7

E est $F \subset E$

E/F ?

On

1)

$$\pi: E \rightarrow E/F$$

$$a \mapsto \overset{a}{x}$$

π

donc

E/F

est l

qui est

pro

une base de E (degrés
évolues)

$(\varphi_0, \dots, \varphi_n)$

[en effet
 $\varphi_i^*(\varphi_j) = \delta_{ij}$]

la forme

$$\rightarrow \alpha \varphi_0^*(p) + \beta \varphi_1^*(p) \\ = \alpha P(a) + \beta P'(a)$$

sous-e.v.

a la relation d'équivalence sur E

$\sim_F$

$$x \sim_F y \Leftrightarrow x - y \in F$$

l'ensemble des classes d'équivalences.

un espace vectoriel
 l'addition dans le groupe quotient

$$\text{et } \lambda \cdot x = (\lambda x)$$

Oh wki parpis
an lien
de x

l'ensemble des classes de x .

l'ensemble

$$\begin{array}{l} \text{Ex: } E = \mathbb{Z} \\ F \subset E \\ E/F \cong \end{array}$$

2) $(E/F)^{\times}$ s'identifie

à $f : \pi$

$x \in \ker(\pi) \Leftrightarrow$

et $\lambda \cdot \tilde{x} = (\lambda x)$

$L^p(X, \mu)$ fonctions de puissance
 p -ième μ -intégrable
 E sous-espace des fonctions
 nulle μ -pp.
 $L^p(X, \mu)$

$\tilde{x} \in \{f: E^* : f|_F = 0\}$

$E \rightarrow \mathbb{R}$ est nulle sur F

$\therefore E \rightarrow E/F$

$\Rightarrow \tilde{x} = 0 \Leftrightarrow x \in F$

$\Downarrow$

$\ker \pi \subset \ker f$

$\Uparrow$

lemme préc.

$\exists g: E/F \rightarrow \mathbb{R}$
 $f = g \circ \pi$

edont

tell me

Ainsi

de

$$3) \quad u \in L(\bar{E}, E)$$

$$(E/F)$$

$$(\bar{E}/F)^{\vee}$$

$$\Rightarrow \quad \exists F \quad S$$

$$\Leftarrow \quad \exists (E/F)$$

$g \mapsto g \circ \pi$ est une bijection
 the $(E/F)^*$ et $\{f: E^* \rightarrow F^* \mid f|_F = 0\}$
 $t_u \in L(E^*, E^*)$.

$\psi \subset E^*$
 $\uparrow$ par l'identification précédente
 stable par t_u

$(\Rightarrow) \quad \forall f \in E^* \text{ tq } f|_F = 0 \quad \text{on a}$

$$(t_u)(f) = f \circ u$$

stable par $u \quad f|_F = 0 \Rightarrow f \circ u|_F = 0$

$\Rightarrow \psi$ stable par t_u .

Soit $x \in F \quad \forall \psi \in F^\perp$

$$t_u(\psi) = \psi \circ u$$

$$\{f=0\}$$

$$f^\perp$$

$$(t_h)(f)|_F = 0$$

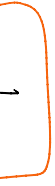
$$= 0$$

$$(a) = 0$$

$$\varphi(u(x)) = \underbrace{t_u(\varphi)}_{\in F^1}$$

On a donc $u(x) \in F^1 =$
 et donc F est stable par u .

$$(a_1) = 0$$



F