Dualité

Dans cette fiche, on considère un corps $\mathbf{k}$. Si E et F sont des $\mathbf{k}$-espaces vectoriels, on note $L(E,F)$ l'espace vectoriel des applications linéaires de E dans F. On note $E^* = L(E,\mathbf{k})$ le dual de E.

1 Les basiques

Exercice 1. Familles duales, bidual

1. Soit E un $\mathbf{k}$-espace vectoriel et $(e_i)_{i\in I}$ une base de E. Montrer qu'il existe une unique famille de vecteurs $(e_i^*)_{i\in I}$ vérifiant $e_i^*(e_j) = \delta_{i,j}$ pour tout (i,j) dans I^2. On dira que $(e_i^*)_{i\in I}$ est la *famille duale* de $(e_i)_{i\in I}$.
2. Exemples
   (a) Quelle est la famille duale de $\{(1,1),(1,0)\}$ dans $\mathbf{k}^2$?
   (b) Quelle est la famille duale de $\{X^k\}_{0\leqslant k\leqslant n}$ dans $\mathbf{k}_n[X]$?
   (c) Soiet $E = \mathbf{R}^{(\mathbf{N})}$ l'ensemble des suites réelles à support fini. Quel est son dual ? Quelle est la famille duale de la base canonique ? Montrer que ce n'est pas une base.
3. Montrer que la famille duale d'une base est libre.
4. Montrer que si E est de dimension finie, la famille duale d'une base est une base.
5. On note $E^{**} = (E^*)^*$ le *bidual* de E. Pour $x \in E$ et $f \in E^*$, on note $\delta_x(f) = f(x)$. Montrer que $x \mapsto \delta_x$ est une application linéaire injective de E dans E^{**}. Montrer qu'elle est surjective si E est de dimension finie.
6. Montrer que si E est de dimension finie, toute base de E^* est la famille duale d'une base de E.

Exercice 2. Orthogonalité

Soient E un $\mathbf{k}$-espace vectoriel de dimension finie, $V \subset E$ et $W \subset E^*$. On pose $V^\perp = \{f \in E^* : \forall x \in V,\ f(x) = 0\}$ et $W^\circ = \{x \in E : \forall f \in W,\ f(x) = 0\}$.

1. Montrer que $V^\perp$ et W° sont des $\mathbf{k}$-espaces vectoriels.
2. Montrer les énoncés suivants
   (a) $V \subset V^{\perp\circ}$. Dans quel cas a-t-on égalité ?
   (b) $V^\perp = V^{\perp\circ\perp}$.
3. Soit F un sous-espace vectoriel de E. Monter que $F = E$ si et seulement si $F^\perp = 0$.
4. Soient V_1 et V_2 deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer que

$$(V_1 + V_2)^\perp = V_1^\perp \cap V_2^\perp \text{ et } (V_1 \cap V_2)^\perp = V_1^\perp + V_2^\perp.$$

Exercice 3. Transposée

Soient E et F deux $\mathbf{k}$-espaces vectoriels de dimension finie et $u \in L(E,F)$. On note ${}^tu$ l'élément de $L(F^*,E^*)$ défini par

$$({}^tu(f))(x) = f(u(x))$$

pour tous x dans E et f dans F^*.

1. Montrer que $\ker(u)^\perp = \mathrm{Im}({}^tu)$, puis que u est injective si et seulement si ${}^tu$ est surjective.
2. Montrer que u et ${}^tu$ ont même rang.
3. Soit $u \in L(E,E)$ et E_1 un sous-espace vectoriel de E. Monter que E_1 est stable par u si et seulement si $E_1^\perp$ est stable par ${}^tu$.
4. Quel est le rapport avec la transposition des matrices ?

2 Les classiques

Exercice 4. Équations cartésiennes vs famille génératrice

1. Donner des équations cartésiennes du sous-espace de $\mathbf{R}^3$ engendré par les vecteurs $(1,2,3)$ et $(4,5,6)$. Même question pour le sous-espace de $\mathbf{R}^4$ engendré par les vecteurs $(1,2,3,4)$ et $(4,3,2,1)$.
2. Déterminer une base du sous-espace de $\mathbf{R}^4$ d'équations.

$$\begin{cases} x+y+z+2t=0 \\ 2x+y+3z+t=0 \end{cases}$$

Exercice 5. Un lemme classique
Soit E un $\mathbf{k}$-espace vectoriel de dimension finie et f, $f_1,\dots,f_n$ des éléments de E^*. Montrer que f est combinaison linéaire des (f_i) si et seulement si $\ker(f_1)\cap\cdots\cap\ker(f_n)\subset\ker(f)$.

Exercice 6. Quelques bases de polynômes

1. Soient $(a_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ des réels distincts. On note ξ_i la forme linéaire sur $\mathbf{R}_n[X]$ donnée par $P\mapsto P(a_i)$. Identifier une base de $\mathbf{R}_n[X]$ dont $(\xi_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ est la base duale.
2. Soient $n\geqslant 2$, $E=\mathbf{k}_n[X]$ et $a\in\mathbf{k}$. Déterminer les éléments $\varphi\in E^*$ qui vérifient $\varphi((X-a)^2P)=0$ pour tout $P\in\mathbf{k}_{n-2}[X]$.

Exercice 7. Quotients d'espaces vectoriels
Soient E un $\mathbf{k}$-espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace de E.

1. Rappeler la définition du quotient E/F.
2. Montrer que le dual de E/F s'identifie à $\{f\in E^* : f_{|F}=0\}$.
3. Soit $u\in L(E,E)$. Montrer que F est stable par u si et seulement si $(E/F)^*$ est stable par ${}^t u$.

3 Morceaux choisis

Exercice 8. Dualité dans $M_n(\mathbf{k})$

1. Montrer que le dual de $M_n(\mathbf{k})$ s'identifie à $M_n(\mathbf{k})$ (pour $A\in M_n(\mathbf{k})$, considérer $M\mapsto \operatorname{tr}(AM)$).
2. Déterminer les $\phi\in M_n(\mathbf{k})^*$ vérifiant $\phi(AB)=\phi(BA)$ pour tous A,B dans $M_n(\mathbf{k})$.
3. Soit $n\geqslant 2$. Montrer que tout hyperplan de $M_n(\mathbf{k})$ contient une matrice inversible.
4. Soit $T=\{AB-BA : A,B\in M_n(\mathbf{k})$. Montrer que le sous-espace vectoriel engendré par T est l'ensemble des matrices de trace nulle.
5. (*) Soit $\mathbf{k}=\mathbf{R}$. Montrer que T est un sous-espace vectoriel.

Exercice 9. Théorème de Auerbach

1. Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel normé de dimension finie. On munit E^* de la norme d'opérateur. Montrer qu'il existe une base (e_i) de E vérifiant $\|e_i\|=1$ et $\|e_i^*\|=1$ pour tout i (montrer qu'une famille (e_i) qui maximise $\det(e_i)$ convient.)
2. Soit F un sous-espace vectoriel de E. Montrer qu'il existe une projection d'image F et de norme inférieure à $\dim(F)$.

Exercice 10. Théorème de Hahn–Banach en dimension finie
Soit E un $\mathbf{R}$-espace de dimension finie et V un sous-espace vectoriel de E. Soit $f : V\to\mathbf{R}$ une forme linéaire. Montrer qu'il existe un prolongement de f à E qui a même norme que f.

(Se ramener au cas où V est de codimension 1, choisir $u\in E\setminus V$ et définir un prolongement $\tilde f$ par la formule $\tilde f(x+tu)=f(x)+ta$ pour pour $x\in V$ et $t\in\mathbf{R}$, où a est un réel à déterminer.)