Formes bilinéaires, formes quadratiques

Dans cette fiche, on considère un corps $\mathbf{k}$ de caractéristique différente de 2. Tous les espaces vectoriels sont supposés sur $\mathbf{k}$ et de dimension finie.

Exercice 1.

Soient E et F deux $\mathbf{k}$-espaces vectoriels.

1. On note $\mathrm{Bil}(E,F)$ l'ensembles des formes bilinéaires de $E \times F$ dans $\mathbf{k}$. Pour $b \in \mathrm{Bil}(E,F)$, on définit $\phi_b \in L(E,F^*)$ par $\phi_b(x) = b(x,\bullet)$. Montrer que $b \mapsto \phi_b$ est une bijection de $\mathrm{Bil}(E,F)$ sur $L(E,F^*)$.
2. On dit qu'une forme bilinéaire $b \in \mathrm{Bil}(E,E)$ est
   (a) symétrique si elle vérifie $b(x,y) = b(y,x)$ pour tous x,y dans E,
   (b) antisymétrique si elle vérifie $b(x,y) = -b(y,x)$ pour tous x,y dans E
   (c) alternée si elle vérifie $b(x,x) = 0$ pour tout x dans E.

   Montrer qu'une forme bilinéaire est alternée si et seulement elle est antisymétrique. Que se passe-t-il en caractéristique 2 ?

   Quelle la dimension du sous-espace de $\mathrm{Bil}(E,E)$ formé des formes symétriques (resp. antisymétriques) ?
3. Si $b \in \mathrm{Bil}(E,E)$, l'application $q : E \times E \to \mathbf{k}$ définie par $q(x) = b(x,x)$ est appelée forme quadratique associée à b. Montrer que toute forme quadratique est associée à une unique forme bilinéaire symétrique. Déterminez-la pour la forme $q(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + x_2x_3$ sur $\mathbf{k}^3$.

Exercice 2.

Soient E un espace vectoriel de dimension finie, $(e_1,\dots,e_n)$ une base de E et $q : E \to \mathbf{k}$ une fonction. Montrer l'équivalence entre

1. q est une forme quadratique,
2. il existe une matrice symétrique $A \in M_n(\mathbf{k})$ telle que pour tous $x_1,\dots,x_n$ dans $\mathbf{k}^n$
$$q\left(\sum_{i=1}^n x_ie_i\right) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_ix_j$$
3. il existe $\ell_1,\dots,\ell_p,\ell'_1,\dots,\ell'_p$ dans E^* tels que $q(x) = \sum_{j=1}^p \ell_j(x)\ell'_j(x)$.

Exercice 3.

Un résultat fondamental est que toute forme quadratique peut se diagonaliser. Montrer que les versions suivantes sont équivalentes, puis montrer la version (2) par récurrence sur la dimension de E.

1. Pour toute forme quadratique q sur un espace vectoriel de dimension finie E, il existe une base $(\ell_i)_{i\in I}$ de E^* et des scalaires $(\alpha_i)_{i\in I}$ dans $\mathbf{k}$ tels que pour tout $x \in E$
$$q(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i\ell_i(x)^2.$$
2. Pour toute forme quadratique q sur un espace vectoriel de dimension finie E, il existe une base $(x_i)_{i\in I}$ de E qui est q-orthogonale (c'est à dire telle que $b(x_i,x_j) = 0$ pour $i \neq j$, où b est la forme bilinéaire symétrique associée à q).
3. Toute matrice symétrique $M \in S_n(\mathbf{k})$ est congruente à une matrice diagonale (on dit que deux matrices A, B de $M_n(\mathbf{k})$ sont congruentes s'il existe $P \in GL_n(\mathbf{k})$ vérifiant $A = PBP^t$).

Exercice 4.

Diagonaliser la forme quadratique sur $\mathbf{k}^3$

$$q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 - x_1x_3 - x_2x_3.$$

Quel est son rang ?

Exercice 5.

Combien y a-t-il de classes de congruence dans $S_n(\mathbf{C})$? Dans $S_n(\mathbf{R})$?

Exercice 6.

Soit E un $\mathbf{k}$-espace vectoriel et $b \in L(E, E)$. Montrer que

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad b(x, y) = 0 \iff b(y, x) = 0$$

si et seulement si b est symétrique ou antisymétrique.

Exercice 7.

Calculer la signature des formes quadratiques suivantes

1. Sur $\mathbf{R}^n$, la forme quadratique $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto \sum_{i \neq j} x_i x_j$.
2. Sur $M_n(\mathbf{R})$, les formes quadratiques $M \mapsto \mathrm{tr}(M^2)$ et $M \mapsto \mathrm{tr}(MM^t)$.

Exercice 8.

1. Combien y a-t-il de carrés dans le corps fini $\mathbf{F}_q$?
2. Soient a et b dans $\mathbf{F}_q^*$. Montrer qu'il existe (x, y) dans $\mathbf{F}_q^2$ tels que $ax^2 + by^2 = 1$.
3. Combien y a-t-il de classes de congruence dans $S_n(\mathbf{F}_q)$?