Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2020-2021

Analyse matricielle – L3

Contrôle continu numéro 2

L'usage des notes de cours/TD et de la calculatrice est autorisé. Une réponse ne rapportera aucun point si elle n'est accompagnée d'aucune explication sur la démarche qui a permis de l'obtenir.

Exercice 1 On considère la matrice réelle :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 8 \\ -2 & 2 & -5 & -1 \\ 3 & 1 & 8 & 13 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer si OUI ou NON la matrice A admet une décomposition de Choleski. Justifier rigoureusement votre réponse.
2. Si vous avez répondu OUI à la question précedente, donnez la décomposition de Choleski de A. Si vous avez répondu NON, déterminez la décomposition LU de A (on admet son existence).
3. À l'aide de la décomposition effectuée, résoudre le système linéaire $Ax = b$ où $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Exercice 2 On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Donnez une décomposition QR de la matrice A en utilisant (au choix) la méthode de Gram–Schmidt ou l'algorithme de Householder.

Exercice 3 Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

1) Donnez la décomposition en valeurs singulières de A

2) Calculez le pseudo-inverse de A

3) Donnez toutes les solutions au sens des moindres carrés de $Ax = b$, où $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, en résolvant l'équation normale.

4) Trouvez la solution des moindres carrés qui est de norme minimale, de deux façons différentes.

Exercice 4 Soient α et β deux réels positifs ou nuls. On considère la matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ suivante :

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & -2 \\ 1 & \beta & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. A quelle condition sur α et β la méthode de Jacobi converge-t-elle ?
2. Même question pour la méthode de Gauss-Seidel.

Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2020-2021

Analyse matricielle – L3

Contrôle continu numéro 2

L'usage des notes de cours/TD et de la calculatrice est autorisé. Une réponse ne rapportera aucun point si elle n'est accompagnée d'aucune explication sur la démarche qui a permis de l'obtenir.

Exercice 1 On considère la matrice réelle :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 3 & -3 & 1 \\ -2 & -2 & 7 & -1 \\ 1 & -3 & -2 & -7 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer si OUI ou NON la matrice A admet une décomposition de Choleski. Justifier rigoureusement votre réponse.
2. Si vous avez répondu OUI à la question précedente, donnez la décomposition de Choleski de A. Si vous avez répondu NON, donnez la décomposition LU de A (on admet son existence).
3. À l'aide de la décomposition effectuée, résoudre le système linéaire $Ax = b$ où $b = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 2 On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Donnez une décomposition QR de la matrice A en utilisant (au choix) la méthode de Gram–Schmidt ou l'algorithme de Householder.

Exercice 3 Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

1) Donnez la décomposition en valeurs singulières de A

2) Calculez le pseudo-inverse de A

3) Donnez toutes les solutions au sens des moindres carrés de $Ax = b$, où $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, en résolvant l'équation normale.

4) Trouvez la solution des moindres carrés qui est de norme minimale, de deux façons différentes.

Exercice 4 Soient α et β deux réels positifs ou nuls. On considère la matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 1 \\ \beta & 1 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. A quelle condition sur α et β la méthode de Jacobi converge-t-elle ?
2. Même question pour la méthode de Gauss-Seidel.

Contrôle continu numéro 2

L'usage des notes de cours/TD et de la calculatrice est autorisé. Une réponse ne rapportera aucun point si elle n'est accompagnée d'aucune explication sur la démarche qui a permis de l'obtenir.

Exercice 1 On considère la matrice réelle :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ -2 & -2 & -5 & -1 \\ 1 & 5 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer si OUI ou NON la matrice A admet une décomposition de Choleski. Justifier rigoureusement votre réponse.
2. Si vous avez répondu OUI à la question précedente, donnez la décomposition de Choleski de A. Si vous avez répondu NON, donnez la décomposition LU de A (on admet son existence).
3. À l'aide de la décomposition effectuée, résoudre le système linéaire $Ax = b$ où $b = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 2 On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$. Donnez une décomposition QR de la matrice A en utilisant (au choix) la méthode de Gram–Schmidt ou l'algorithme de Householder.

Exercice 3 Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

1) Donnez la décomposition en valeurs singulières de A

2) Calculez le pseudo-inverse de A

3) Donnez toutes les solutions au sens des moindres carrés de $Ax = b$, où $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, en résolvant l'équation normale.

4) Trouvez la solution des moindres carrés qui est de norme minimale, de deux façons différentes.

Exercice 4 Soient α et β deux réels positifs ou nuls. On considère la matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ suivante :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & \beta \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

1. A quelle condition sur α et β la méthode de Jacobi converge-t-elle ?
2. Même question pour la méthode de Gauss-Seidel.