Fin exo 1.8

mercredi 17 mars 2021 08:16

$A = xy^* + yx^*$ est de rang 2.

A est hermitienne ; ses valeurs propres sont $\lambda_1, \lambda_2, \underbrace{0, \dots, 0}_{\text{multiplicité } n-2}$

On rappelle que $y^*x = \langle y, x \rangle$.

On a aussi $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{trace dans} \\ M_n(\mathbb{C})}}{tr(xy^*)} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{trace dans} \\ M_1(\mathbb{C})}}{tr(y^*x)} = \langle y, x \rangle$

On a $\lambda_1 + \lambda_2 = tr(A) = tr(xy^*) + tr(yx^*) = \langle y, x \rangle + \langle x, y \rangle$
$= 2 \mathrm{Re} \langle x, y \rangle$

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = tr(A^2) = tr((xy^* + yx^*)^2)$$
$$= tr(xy^*xy^* + xy^*yx^* + yx^*xy^* + yx^*yx^*)$$

- $tr(xy^*xy^*) = tr(y^*xy^*x) = \langle y, x \rangle^2$
- $tr(xy^*yx^*) = tr(y^*yx^*x) = \|y\|_2^2 \|x\|_2^2$
- $tr(yx^*xy^*) = tr(x^*xy^*y) = \|x\|_2^2 \|y\|_2^2$
- $tr(yx^*yx^*) = tr(x^*yx^*y) = \langle x, y \rangle^2$

Pour simplifier prenons le cas réel

On a alors $\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 2\langle x, y \rangle & (*) \\ \lambda_1^2 + \lambda_2^2 = 2(\langle x, y \rangle^2 + \|x\|_2^2 \|y\|_2^2) \end{cases}$

Par $(*)$ on peut écrire $\lambda_1 = \langle x, y \rangle + \alpha$
$\lambda_2 = \langle x, y \rangle - \alpha$ pour un α à déterminer

Comme $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = 2\cancel{\langle x, y \rangle^2} + 2\alpha^2$
$\parallel$
$2\cancel{\langle x, y \rangle^2} + 2\|x\|^2 \|y\|^2$, on a $\alpha = \pm \|x\|_2 \|y\|_2$

$2\cancel{\langle x, y \rangle^2} + 2\|x\|_2^2 \|y\|_2^2$, on a $\alpha = \pm \|x\|_2 \|y\|_2$

donc $\begin{cases} \lambda_1 = \langle x, y \rangle + \|x\|_2 \|y\|_2 \\ \lambda_2 = \langle x, y \rangle - \|x\|_2 \|y\|_2 \end{cases}$