TD du 1er février

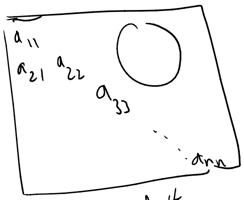
lundi 1 février 2021 15:35

Exo 1.3

$\mathcal{L}_n = \{\text{matrices triangulaires inférieures de } M_n(\mathbb{C})\}$

$= \{A \in M_n(\mathbb{C}) \text{ tq } a_{ij} = 0 \text{ si } i < j\}$

$A = (a_{ij})$



① Montrons que $\mathcal{L}_n$ est stable par produit

$i=3$, $j=6$

- Soient $A \in \mathcal{L}_n$, $B \in \mathcal{L}_n$

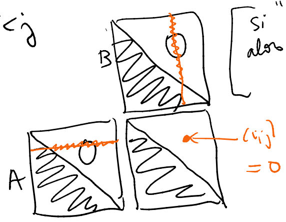
Pour $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$

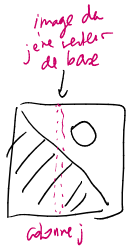
$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{A_{ik}}_{\substack{=0 \\ \text{si } i<k}} \underbrace{B_{kj}}_{\substack{=0 \\ \text{si } k<j}}$$

Si $i<j$, tout entier $k \in \{1 \dots n\}$ vérifie $i<k$ et/ou $k<j$. (si "$i<k$" est faux, alors $k \leq i < j$)

$= 0$ si $i<j$

donc $AB \in \mathcal{L}_n$





- Soit $E_k = \text{vect}(e_k, e_{k+1}, \dots, e_n)$ pour $k \in \{1, \dots n\}$

($(e_1, \dots, e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{C}^n$)

$A \in \mathcal{L}_n \iff A_{ij} = 0 \quad \forall i<j$

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ de matrice A dans la base canonique

① $A \in \mathcal{L}_n \iff \forall j \in \{1 \dots n\}, \ u(e_j) \in E_j$ ②

Remarque : $A \in \mathcal{L}_n \iff \forall j \in \{1 \dots n\} \quad u(E_j) \subset E_j$ ③

Preuve : ① $\iff$ ② immédiat

③ $\Rightarrow$ ② ok comme $e_j \in E_j$
$u(e_j) \in u(E_j)$
donc $u(e_j) \in E_j$ (par ③)

② $\Rightarrow$ ③
$E_j = \text{vect}(e_j, \dots e_n)$
$\forall k \in \{j, \dots n\}$, d'après ② $u(e_k) \in E_k \subset E_j$
et comme $\{e_k : j \leq k \leq n\}$ engendre E_j
on en déduit $u(E_j) \subset E_j$ •

Et avec ③ il est facile de voir que $\mathcal{L}_n$ est stable par produit
($u(E_j) \subset E_j$ et $v(E_j) \subset E_j$ impliquant $(u \circ v)(E_j) \subset E_j$)

Exemple $n=3$ (e_1, e_2, e_3) base canonique de $\mathbb{C}^3$.

$E_1 = \text{vect}(e_1, e_2, e_3) = \mathbb{C}^3$

$E_2 = \text{vect}(e_2, e_3)$

$E_3 = \text{vect}(e_3)$

$$\begin{array}{c|ccc|} & e_1 & e_2 & e_3 \\ e_1 & * & 0 & 0 \\ e_2 & * & * & 0 \end{array}$$

E_2 E_3

$\mathcal{L}$ pour « Lower triangular »

$u \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^3)$
la matrice de u dans la base canonique est dans $\mathcal{L}_3$
$\Updownarrow$
$\begin{cases} \cancel{u(E_1) \subset E_1} & \text{toujours vrai} \\ u(E_2) \subset E_2 \end{cases}$

$\mathcal{L}$ pour « Lower triangulaire »

$E_3 = \text{vect}(e_3)$

$$\begin{array}{c|ccc|} & e_1 & e_2 & e_3 \\ \hline e_1 & * & 0 & 0 \\ e_2 & * & * & 0 \\ e_3 & * & * & * \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{cases} \cancel{u(E_1) \subset E_1} \\ u(E_2) \subset E_2 \\ u(E_3) \subset E_3 \end{cases}$$ toujours vrai

(2) Si $A \in \mathcal{L}_n$, $\det(A) = a_{11} \cdots a_{nn}$.

$$\left[\begin{array}{c|ccc} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ \hline a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{array}\right] \quad B$$

Preuve : En développant par rapport à la première ligne,

$$\det(A) = a_{11} \cdot \det(B) + 0 + \cdots + 0$$

où $B \in M_{n-1}(\mathbb{C})$ est la sous-matrice

$$(a_{ij})_{2 \leq i,j \leq n}$$

Comme $B \in \mathcal{L}_{n-1}$, on obtient la formule voulue par récurrence.

Variante : on peut développer par rapport à la dernière colonne.

Autre preuve (plus compliquée ?)

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \underbrace{\prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}}$$

$\varepsilon(\sigma)$: signature de σ, $\varepsilon(\sigma) \in \{-1, 1\}$

Si $A \in \mathcal{L}_n$, $a_{i,\sigma(i)} = 0$ dès que $i < \sigma(i)$

Si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ admet un indice i telle que $i < \sigma(i)$, alors $\prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)} = 0$.

En fait, si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ vérifie $\sigma(i) \leq i$ $\forall i$

$\sigma(1) \leq 1 \rightarrow$ donc $\sigma(1) = 1$

$\sigma(2) \leq 2 \rightarrow$ donc $\sigma(2) = \cancel{1}$ ou 2 $\quad \sigma(n) \leq n$

$\sigma(3) \leq 3 \rightarrow$ donc $\sigma(3) = \cancel{1}$ ou $\cancel{2}$ ou 3

Donc la seule permutation σ pour laquelle $\prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)} \neq 0$ est $\sigma = \text{id}$

On a donc $\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$

(3) Pour $\lambda \in \mathbb{C}$ $\quad A - \lambda I_d \in \mathcal{L}_n$

donc par le (2) $\det(A - \lambda I_d) = \prod_{i=1}^{n} (a_{ii} - \lambda)$

le polynôme caractéristique de A est $\det(A - X I_d) = (-1)^n \prod_{i=1}^{n} (X - a_{ii})$

et $\underbrace{\text{l'ensemble des valeurs propres de } A}_{= \text{ le spectre de } A}$

est $\{(a_{ii}) : 1 \leq i \leq n\}$.

(4) Soit $A \in \mathcal{L}_n$. $\quad A$ inversible $\Leftrightarrow a_{ii} \neq 0$ pour $1 \leq i \leq n$

En effet, A inversible $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$

$$\Leftrightarrow \prod_{i=1}^{n} a_{ii} \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \forall i \in [1 \ldots n] \quad a_{ii} \neq 0.$$

(5) Soit $A \in \mathcal{L}_n$ avec A inversible. Mq $A^{-1} \in \mathcal{L}_n$.

5 Soit $A \in \mathcal{L}_n$ avec A inversible. Mq $A^{-1} \in \mathcal{L}_n$.

Preuve 1

Soit $A \in \mathcal{L}_n$, A inversible et u l'endormisphe associé

$$A \in \mathcal{L}_n \Rightarrow \forall k \quad u(E_k) \subset E_k$$

$E_k = \text{vect}(e_k, \dots, e_n)$

$\Downarrow$ comme u est inversible $\dim(u(E_k)) = \dim(E_k)$

$$\forall k \quad u(E_k) = E_k$$

$$\Downarrow$$

$$\forall k \quad u^{-1}(E_k) = E_k$$

$$\Downarrow$$

$$A^{-1} \in \mathcal{L}_n \Leftarrow \forall k \quad u^{-1}(E_k) \subset E_k$$

u inversible
E sous-espace
$\dim(E) = \dim(u(E))$
[appliquer ce qui suit à $v = u$ et $v = u^{-1}$]
On a toujours $\dim(v(E)) \leq \dim E$
car l'image d'une base de E par v est une partie génératrice de $v(E)$

Preuve 2

A inversible $\Rightarrow$ A^{-1} est un polynôme en A
[$\exists P \in \mathbb{C}(x)$ tq $A^{-1} = P(A)$]

Preuve : Soit χ_A le polynôme caractéristique de A ; alors $\chi_A(A) = 0$ (CAYLEY-HAMILTON)

$$0 = \chi_A(A) = \det(A).Id + a_1 A + a_2 A^2 + \dots + a_n A^n \quad \text{pour } a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$$

$$-\det(A)\, Id = A\left(a_1 Id + a_2 A + \dots + a_n A^{n-1}\right)$$

En posant $P(X) = \dfrac{a_1 + a_2 X + \dots + a_n X^{n-1}}{-\det(A)}$

on a $A.P(A) = Id$. donc $P(A) = A^{-1}$.

Enfin, comme $\mathcal{L}_n$ est stable par produit et par somme, on a $A \in \mathcal{L}_n \Rightarrow P(A) \in \mathcal{L}_n$ pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$

En particulier, $A^{-1} \in \mathcal{L}_n$

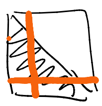
Preuve 3

On peut considérer la comatrice de A

$(\text{com } A)_{i,j} = (-1)^{i+j} \times$ déterminant de la sous-matrice obtenue en supprimant la ligne i et la colonne j

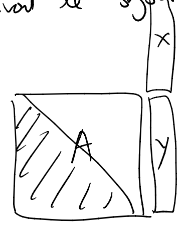
$$A \times {}^t(\text{com } A) = \det(A)\, Id$$

Pour voir que $A^{-1} \in \mathcal{L}_n$, il suffit de vérifier que ${}^t(\text{com } A) \in \mathcal{L}_n$



Preuve 4

On peut calculer A^{-1} par la méthode du pivot de GAUSS, par exemple en résolvant le système $Ax = y$



$$\begin{cases} a_{11} x_1 & = y_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 & = y_2 \\ \vdots & \\ a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \dots + a_{nn} x_n & = y_n \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}^{-1} y_1 \\ x_2 = a_{22}^{-1}(y_2 - a_{21} x_1) = \dots \\ \vdots \end{cases}$$

d'où $\begin{cases} x_1 = a_{11}^{-1} y_1 \\ x_2 = a_{22}^{-1}(y_2 - a_{21}x_1) = \cdots \\ \vdots \end{cases}$

on obtient $x_k \in \mathrm{vect}(y_1, \dots, y_k)$

et la matrice A^{-1} obtenue est triangulaire inférieure

- vérifions que les coeff. diagonaux de A^{-1} sont $(a_{11}^{-1}, \dots, a_{nn}^{-1})$.

Soit $A^{-1} = (m_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$

$$\delta_{ij} = (AA^{-1})_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot m_{kj}$$

seul terme non nul

Pour $i=j$ on a $1 = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{a_{ik}}_{\substack{= 0 \\ \text{si } i<k}} \underbrace{m_{ki}}_{\substack{= 0 \\ \text{si } i>k}} = a_{ii} m_{ii}$

$\Downarrow$

$m_{ii} = a_{ii}^{-1}$

Les coefficients diagonaux de A^{-1} sont donc $(a_{11}^{-1}, \dots, a_{nn}^{-1})$.

En général les autres coefficients sont compliqués à calculer.

Un cas où c'est simple

$$\begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ a_2 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ a_n & & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ -a_2 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ -a_n & & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$A = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ a_2 & \ddots & \\ \vdots & 0 & \\ a_n & & 1 \end{pmatrix}$ $\quad Ae_i = e_i \quad i \geq 2$

$\Downarrow$

$A^{-1}e_i = e_i$

$A^{-1}e_1$?

$A(e_1) = e_1 + a_2e_2 + \dots + a_ne_n$

$A(e_1) = e_1 + a_2A(e_2) + \dots + a_nA(e_n)$

donc $A(e_1) - a_2A(e_2) - \dots - a_nA(e_n) = e_1$

$A(e_1 - a_2e_2 - \dots - a_ne_n) = e_1$

$A^{-1}(e_1) = e_1 - a_2e_2 - \dots - a_ne_n$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exo 1.4

$A = \begin{pmatrix} 1+\alpha^2 & \alpha\beta \\ \alpha\beta & 1+\beta^2 \end{pmatrix} \stackrel{?}{=} ODO^T$ pour $O \in O(2)$

D diagonale

Une telle écriture existe : la matrice est symétrique donc diagonalisable dans une base orthonormée (th. spectral)

Pour trouver O et D il faut trouver les valeurs et vecteurs propres de A.

il faut les choisir de norme 1.

$\boxed{\text{A checker}}$