

1.4

$$M = \begin{pmatrix} 1+\alpha^2 & \alpha\beta \\ \alpha\beta & 1+\beta^2 \end{pmatrix}$$

matrice symétrique
⇒ diagonalisable dans
une base orthonormale

On cherche $O \in O(2)$
D diagonale tq $M = ODO^T$

- Cherchons les valeurs propres de M

$$\det(M) = (1+\alpha^2)(1+\beta^2) - (\alpha\beta)^2$$

$$= 1 + \alpha^2 + \beta^2 + \alpha^2\beta^2 - \alpha^2\beta^2$$

$$\text{tr}(M) = 1 + \alpha^2 + 1 + \beta^2 = 2 + \alpha^2 + \beta^2$$

$$(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)$$

$$x^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)x + \lambda_1\lambda_2$$

$$x^2 - Sx + P$$

$$S = \lambda_1 + \lambda_2 \quad P = \lambda_1\lambda_2$$

Soit λ_1, λ_2 les deux valeurs propres. On a

$$\begin{cases} \lambda_1\lambda_2 = 1 + \alpha^2 + \beta^2 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 2 + \alpha^2 + \beta^2 \end{cases}$$

On devine alors que les solutions sont 1 et $1 + \alpha^2 + \beta^2$

↳ sinon, on résout la trinôme
 $x^2 - (2 + \alpha^2 + \beta^2)x + 1 + \alpha^2 + \beta^2 = 0$

- Cherchons un vecteur propre de valeur propre 1.

On cherche $u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tel que $Mu = u$

$$\begin{pmatrix} 1+\alpha^2 & \alpha\beta \\ \alpha\beta & 1+\beta^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+\alpha^2)x + \alpha\beta y \\ \alpha\beta x + (1+\beta^2)y \end{pmatrix}$$

d'où le système

$$Mu = u \Leftrightarrow \begin{cases} (1+\alpha^2)x + \alpha\beta y = x \\ \alpha\beta x + (1+\beta^2)y = y \end{cases}$$

Si $\alpha=0$ ou $\beta=0$
M est diagonale
 $\begin{cases} O = Id \\ D = M \end{cases}$ convient

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2 x + \alpha\beta y = 0 \\ \alpha\beta x + \beta^2 y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha(\alpha x + \beta y) = 0 \\ \beta(\alpha x + \beta y) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \alpha x + \beta y = 0$$

si $\alpha \neq 0$
 $\beta \neq 0$

Un vecteur propre est $x = \beta \quad y = -\alpha$
 $u = \begin{pmatrix} \beta \\ -\alpha \end{pmatrix}$

Pour avoir un vecteur propre de norme 1, on

choisit $u' = \frac{u}{\|u\|_2} = \begin{pmatrix} \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \\ \frac{-\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \end{pmatrix}$

- Soit v un vecteur orthogonal à u' (ou u)

$$u = \begin{pmatrix} \beta \\ -\alpha \end{pmatrix} ; v = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \quad (\langle u, v \rangle = 0)$$

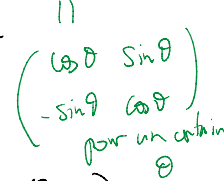
Puisons $v' = \frac{v}{\|v\|_2} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \\ \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \end{pmatrix}$



... + ... autre norme

Norme $\left\| \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \right\|$ 
Nécessairement v' est un vecteur propre
pour la valeur propre $1 + \alpha^2 + \beta^2$.

Soit O la matrice $\begin{pmatrix} u' & v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} & \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \\ \frac{-\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} & \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \end{pmatrix}$

O est orthogonale (ses colonnes forment une base orthonormale)
 $O^T = O^{-1}$ 

et $M = O D O^T$ avec $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 + \alpha^2 + \beta^2 \end{pmatrix}$

Δ Ce n'est pas la seule réponse correcte
on a fait des choix arbitraires: ordre
des valeurs propres, choix de u' au lieu
de $-u'$...

1.5 Matrices de rang 1

$u, v \in \mathbb{C}^n$ $u \neq 0$
 $v \neq 0$

$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$

$R = u v^*$
matrice $n \times n$
 $= (u_i \bar{v}_j)_{1 \leq i, j \leq n}$

$*$: transconjugaison

$v^* = (\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n)$

- Dans l'écriture $R = u v^*$, on considère u comme une matrice $n \times 1$, donc de rang ≤ 1 .

On a donc $\text{rg}(R) \leq 1$.

- Comme $u \neq 0$, il existe i tel que $u_i \neq 0$
 $v \neq 0 \implies j \text{ tel que } v_j \neq 0$

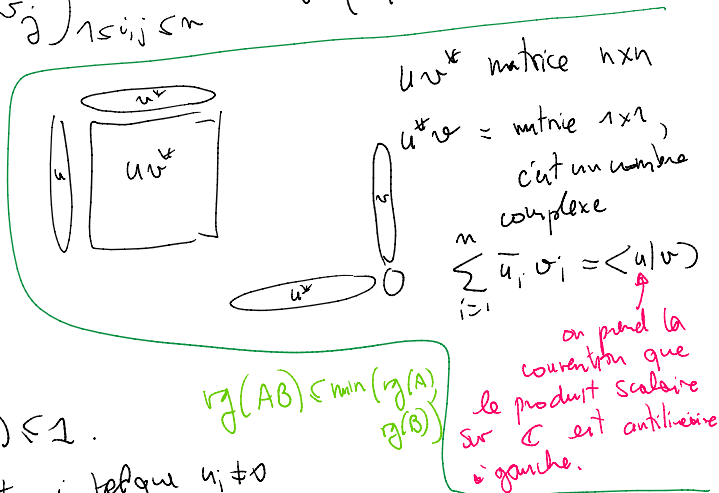
$R_{i,j} = u_i \bar{v}_j \neq 0 \implies \text{rg}(R) \geq 1$

- Soit S une matrice de rang 1.

Soient $c_1, \dots, c_n$ les colonnes de S $c_i \in \mathbb{C}^n$
 $\text{vect}(c_1, \dots, c_n)$ est de dimension 1.

Il existe nécessairement $i_0 \in \{1, \dots, n\}$ tel que $c_{i_0} \neq 0$
(Si non, on aurait $\text{rg}(S) = 0$)

$\forall i \neq i_0$ $\text{vect}(c_i, c_{i_0})$ est de dimension 1
 $\implies \exists \lambda_i \in \mathbb{C}$ tel que $c_i = \lambda_i c_{i_0}$



$\forall i \neq i_0$ $\text{vect}(c_i, c_{i_0})$ est de dimension 1
 donc $\exists \lambda_i \in \mathbb{C}$ tel que $c_i = \lambda_i c_{i_0}$
 (si on pose $\lambda_{i_0} = 1$, la relation $c_i = \lambda_i c_{i_0}$ est aussi vraie pour $i = i_0$)

$$S = \begin{pmatrix} | & | & \dots & | \\ c_1 & c_2 & \dots & c_n \\ | & | & \dots & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & | & \dots & | \\ \lambda_1 c_{i_0} & \lambda_2 c_{i_0} & \dots & \lambda_n c_{i_0} \\ | & | & \dots & | \end{pmatrix}$$

$$= c_{i_0} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}^T$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & \lambda_n \\ c_{i_0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 c_{i_0} & \dots & \lambda_n c_{i_0} \end{pmatrix}$$

$$u = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \langle u, v \rangle = 4$$

$$uv^* = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

On a donc $S = uv^*$
 avec $u = c_{i_0} \neq 0$
 $v = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \neq 0$ car $\lambda_{i_0} = 1$

② valeurs propres et sous-espaces propres de $R = uv^*$

• Si $n \geq 2$, $n > \text{rang}(R) = 1$ donc 0 est valeur propre de R

($\dim \ker(R) = n - \text{rang}(R) = n - 1$)
 avec multiplicité $n-1$

• $R = (u_i \bar{v}_j)_{1 \leq i, j \leq n}$ $\text{tr}(R) = \sum_{i=1}^n u_i \bar{v}_i = \langle v, u \rangle$
 donc la valeur propre non nulle est $\langle v, u \rangle$.

• Soit $x \in \mathbb{C}^n$ $Rx = (uv^*)x = u \underbrace{(v^*x)}_{\substack{\text{matrice } 1 \times 1 \\ = \langle v, x \rangle}} = \langle v, x \rangle u$

Donc $\ker(R) = \{x \in \mathbb{C}^n \mid \langle v, x \rangle = 0\} = v^\perp$

• $Ru = \langle v, u \rangle u$ donc u est vecteur propre de valeur propre $\langle v, u \rangle$.

Remarque: si $\langle v, u \rangle = 0$ alors $u \in v^\perp$.

Il y a deux cas

① Si $\langle v, u \rangle \neq 0$, les sous-espaces propres sont
 pour la valeur propre 0
 pour la valeur propre $\langle v, u \rangle$

$\dim n-1 \leftarrow v^\perp$
 $\dim 1 \leftarrow \mathbb{C}u$

② Si $\langle v, u \rangle = 0$, les sous-espaces propres sont
 pour la valeur propre 0.

$\dim 1 \leftarrow v^\perp$

$\mathbb{C}u$ est le sous-espace propre

$\dim 1 \leftarrow v^+$ pour la valeur propre -

(3)

Rappel: Si $E_1, \dots, E_k$ sont les sous-espaces propres de $M \in M_n(\mathbb{K})$, alors M diagonalisable $\Leftrightarrow \sum_{j=1}^k \dim(E_j) = n$

On en déduit que A est diagonalisable si $\langle r, u \rangle \neq 0$ (cas (1)) et non diagonalisable si $\langle r, u \rangle = 0$ (cas (2))

Exemple $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
 $R = uv^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

1.6

$A \in M_{m,n}(\mathbb{C}) \quad x \in \mathbb{C}^n \quad y \in \mathbb{C}^m$ tels que

$x \in M_{n,1}(\mathbb{C})$ (colonne)
 $y^* \in M_{1,m}(\mathbb{C})$ (ligne)
 $A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$
 $y^* A x \in M_{1,1}(\mathbb{C})$; autrement dit c'est un élément de $\mathbb{C}$

On pose $B = A - \frac{A x y^* A}{y^* A x}$ $y^* A x \in \mathbb{C}$
 $A x y^* A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$

B est bien défini comme différence de deux matrices $m \times n$.

(1) $\text{Im}(B) \subset \text{Im}(A) \subset \text{Im}(B) + \mathbb{C} A x$

Inclusion (2) • Soit $z \in \text{Im}(A)$; z n'est pas forcément dans $\text{Im}(B)$ pour $l \in \mathbb{C}^n$
 $z = A l$ pour $l \in \mathbb{C}^n$
 $z = A l$ pour $l \in \mathbb{C}^n$

$z = A l = \left(B + \frac{A x y^* A}{y^* A x} \right) l$
 $= B l + \frac{A x y^* A l}{y^* A x}$ $y^* A l \in \mathbb{C}$

$= B l + \frac{y^* A l}{y^* A x} A x$ donc $z \in \text{Im}(B) + \mathbb{C} A x$
 $\text{Im}(B) \quad \mathbb{C} A x$
 et l'inclusion (2) est prouvée.

Inclusion (1) • Soit $z \in \text{Im}(B)$, z n'est pas forcément dans $\text{Im}(A)$ pour $l \in \mathbb{C}^n$

$z = B l = A l - \frac{A x y^* A l}{y^* A x} = A \left[l - \frac{y^* A l}{y^* A x} x \right] \in \text{Im}(A)$
 et l'inclusion (1) est prouvée.

(2) $\text{Ker } A \subset \text{Ker } B$?
 (A non nul)

(2) $\ker A \subset \ker B$?

Soit $z \in \ker A$ ($Az=0$)

$$Bz = \left(A - \frac{Ayz^*A}{y^*Az} \right) z = \underbrace{Az}_0 - \frac{Ayz^*Az}{y^*Az} = 0$$

donc $\ker(A) \subset \ker(B)$.

(3) $\text{Mq } z \in \ker(B), z \notin \ker(A)$

$$Bz = \left(A - \frac{Ayz^*A}{y^*Az} \right) z = Az - \frac{Ayz^*Az}{y^*Az} = Az - Az = 0$$

donc $z \in \ker(A)$.

• Comme $y^*Az \neq 0$,
 $\uparrow$ 0 de $\mathbb{C}$

on en déduit que $Az \neq 0$ et $z \notin \ker(A)$.
 $\uparrow$ 0 de $\mathbb{C}^m$

(4) Démontrer que $\text{rg}(B) = \text{rg}(A) - 1$

- $\text{Im}(B) \subset \text{Im}(A)$ implique $\text{rg}(B) \leq \text{rg}(A)$
- $\ker(A) \subset \ker(B)$ implique $n - \text{rg}(A) \leq n - \text{rg}(B)$
 $\Downarrow$
 $\text{rg}(B) \leq \text{rg}(A)$

Formule du rang :
 $\dim \ker(A) + \text{rg}(A) = n$
 $\uparrow$
 $\dim$ de l'espace de départ

E, F sous-espace
 $\dim(E+F) \leq \dim(E) + \dim(F)$

$$\text{Im}(A) \subset \text{Im}(B) + \mathbb{C}Ax \text{ implique } \text{rg}(A) = \dim(A) \leq \dim(\text{Im}(B) + \mathbb{C}Ax) \leq \dim(\text{Im}(B)) + \dim(\mathbb{C}Ax) = \text{rg}(B) + 1$$

d'où

$$\boxed{\text{rg}(B) \leq \text{rg}(A) \leq \text{rg}(B) + 1}$$

$$\begin{aligned} \text{rg}(A) &= \text{rg}(B) \\ \text{rg}(A) &= \text{rg}(B) + 1 \end{aligned}$$

• Par les questions 2 et 3, on a

$$\ker(A) \neq \ker(B)$$

$$\text{donc } \dim \ker(B) > \dim \ker(A)$$

$$n - \text{rg}(B) > n - \text{rg}(A)$$

$$\text{d'où } \boxed{\text{rg}(A) > \text{rg}(B)}$$

$$\text{On a donc } \text{rg}(A) = \text{rg}(B) + 1$$

$$(\text{rg}(B) = \text{rg}(A) - 1)$$

$\subset$	$\leq$
$\not\subset$	$<$

1.7 Matrice compagnon

Soit $P(X) = a_0 + a_1X + \dots + a_{n-1}X^{n-1} + X^n$ un polynôme unitaire.

Montrer que $(-1)^n P$ est le polynôme caractéristique de

$$A = \begin{pmatrix} 0 & & -a_0 \\ 1 & & -a_1 \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & 1 - a_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$(Ex) \quad n=2 \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -a_0 \\ 1 & -a_1 \end{pmatrix}$$

$$n=3 \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & -a_2 \end{pmatrix}$$

Remarque : calculer un déterminant $n \times n$ prend un temps $n!$ avec la formule $\sum_{\sigma \in S_n}$ on en développe par rapport à une ligne / colonne, mais un temps $n^3 \ll n!$ avec l'algorithme du pivot de GAUSS.

le polynôme caractéristique de A est

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & & 0 & -a_0 \\ 1 & & & -a_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & 1 - \lambda & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Développons par rapport à la 1^{re} colonne

$$\chi_A(\lambda) = \underbrace{(-1)^{1+1}}_{=1} \cdot (-\lambda) \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & & 0 & -a_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & 1 - \lambda & -a_{n-1} \end{pmatrix} \leftarrow D_1$$

$$+ \underbrace{(-1)^{1+2}}_{=1} \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ & 1 & -\lambda & & 0 \\ & & 1 & -\lambda & \\ 0 & & & 1 & -\lambda \\ & & & & 1 - a_{n-1} - \lambda \end{pmatrix} \leftarrow D_2$$

Montrons la formule par récurrence sur la dimension

P_n : Pour tous $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$, la formule $\chi_A(\lambda) = (-1)^n P(\lambda)$ est vraie

Par hypothèse de récurrence,

$$D_1 = (-1)^{n-1} (a_1 + a_2 \lambda + \dots + a_{n-1} \lambda^{n-2} + \lambda^{n-1})$$

$$D_2 = (-1)^{1+n-1} (-a_0) \det \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ & & \ddots \\ 0 & & 1 - a_{n-1} - \lambda \end{pmatrix} = (-1)^{n+1} a_0$$

on développe par rapport à la 1^{re} ligne

matrice triangulaire supérieure

En supposant P_{n-1} , on a donc

$$\chi_A(\lambda) = -\lambda (-1)^{n-1} (a_1 + a_2 \lambda + \dots + a_{n-1} \lambda^{n-2} + \lambda^{n-1}) - (-1)^{n+1} a_0$$

$$(-1)^{n+2} - (-1)^n$$

$$- (-1)^n [a_1 \lambda + a_2 \lambda^2 + \dots + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \lambda^n + a_0]$$

$$\begin{aligned}
 (-1)^{n+2} &= (-1)^n \\
 &= (-1)^n \left[a_1 \lambda + a_2 \lambda^2 + \dots + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \lambda^n + a_0 \right] \\
 &= (-1)^n P(\lambda)
 \end{aligned}$$

Pour initialiser la récurrence, vérifions P_2

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & -a_0 \\ 1 & -a_1 - \lambda \end{pmatrix} = -\lambda(-a_1 - \lambda) + a_0 = \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 \quad \checkmark$$

On a donc démontré la formule par récurrence.

VARIANT: on développe par rapport à la dernière colonne

Ex. $n=4$

$$\begin{aligned}
 \det \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & -\lambda & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & -\lambda & -a_2 \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda - a_3 \end{pmatrix} &= (-1)^5 \cdot (-a_0) \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}}_{=1} + (-1)^6 (-a_1) \underbrace{\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}}_{-\lambda} \\
 &\quad + (-1)^7 (-a_2) \underbrace{\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}}_{\lambda^2} + (-1)^8 (-\lambda - a_3) \underbrace{\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}}_{-\lambda^3} \\
 &= a_0 + \lambda a_1 + \lambda^2 a_2 + \lambda^3 a_3 + \lambda^4
 \end{aligned}$$

Exo 1.8

$x, y \in \mathbb{C}^n$ deux vecteurs linéairement indépendants

$$A = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}^* = x^* y^*$$

$$(AB)^* = B^* A^*$$

$$A = xy^* + yx^*$$

matrice de rang 1 comme à l'exo 1.5

$$(AB)^* = B^* A^*$$

$$\overline{AB} = \overline{A} \overline{B}$$

$$(AB)^T = B^T A^T$$

① A hermitienne?

$$\begin{aligned} A^* &= (xy^* + yx^*)^* \\ &= (xy^*)^* + (yx^*)^* \\ &= y^{**}x^* + x^{**}y^* \\ &= yx^* + xy^* \\ &= A \end{aligned}$$

donc A est bien hermitienne

Rappel $M \in M_n(\mathbb{C})$ est hermitienne si $M = M^*$

↑
transposée

thm spectral, $\mathbb{C}$: toute matrice hermitienne s'écrit

$U \Delta U^*$
↑
diagonale à coeff réels

unitaire si $UU^* = Id$

($\Leftrightarrow$) les colonnes de U forment une b.o.n. de $\mathbb{C}^n$

Autre preuve

$$A_{ij} = x_i \overline{y_j} + y_i \overline{x_j}$$

et on a bien

$$A_{ij} = \overline{A_{ji}} \Rightarrow A \text{ hermitienne}$$

• A de rang 2?

Comme A est la somme de 2 matrices de rang 1, on a $\text{rang}(A) \leq 2$.

Il faut utiliser l'hypothèse que x et y sont lin. indépendants.

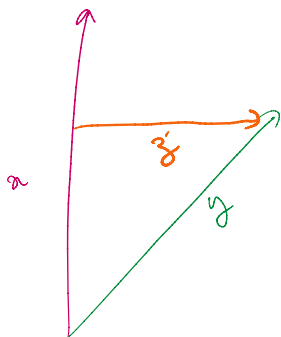
Montrons que $\text{Im}(A) = \text{Vect}(x, y)$

$$\text{Soit } z \in \mathbb{C}^n \quad Az = x \underbrace{y^* z}_{\langle y, z \rangle} + y \underbrace{x^* z}_{\langle x, z \rangle} = \langle y, z \rangle x + \langle x, z \rangle y$$

On en déduit donc que $\text{Im}(A) \subset \text{Vect}(x, y)$

• Montrons $x \in \text{Im}(A)$

On veut z tel que $\langle y, z \rangle = 1$
 $\langle x, z \rangle = 0$



0

$$\begin{aligned} \text{Soit } z' &= y - \langle x, y \rangle \frac{x}{\|x\|^2} \\ \langle x, z' \rangle &= \langle x, y \rangle - \langle x, y \rangle \frac{\langle x, x \rangle}{\|x\|^2} = 0 \\ \langle y, z' \rangle &= \langle y, y \rangle - \frac{\langle x, y \rangle \langle y, x \rangle}{\|x\|^2} \\ &= \|y\|^2 - \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\|x\|^2} \\ &= \frac{\|y\|^2 \|x\|^2 - |\langle x, y \rangle|^2}{\|x\|^2} \end{aligned}$$

On a $\|y\|^2 \|x\|^2 - |\langle x, y \rangle|^2 > 0$

Preuve: CAUCHY-SCHWARZ
 $|\langle x, y \rangle|^2 \leq \|x\|^2 \|y\|^2$ avec égalité
 si x et y sont linéairement
 indépendants,
 ce qui est exclu ici.

Ainsi $t = \|y\|^2 \|x\|^2 - |\langle x, y \rangle|^2 > 0$

En posant $z = \frac{z'}{t}$, on a $\langle x, z \rangle = 0$ et $\langle y, z \rangle = \frac{\langle y, z' \rangle}{t} = 1$

Et donc $Az = x \Rightarrow x \in \text{Im } A$.

Par un raisonnement similaire, $y \in \text{Im } A$.

On a donc $\text{Vect}(x, y) \subset \text{Im } A$, d'où $\text{Im } A = \text{Vect}(x, y)$.

- (2) Comme A est de rang 2, si $n > 2$ on a 0 valeur propre de A , de multiplicité $n-2$.
 Le sous-espace propre correspondant est $\text{Ker}(A) = x^\perp \cap y^\perp$.
 Les autres valeurs propres s'obtiennent en considérant la restriction de A à $\text{Im } A$ (matrice 2×2)
 (calcul similaire à l'exercice 1.4)