TD du 22 février

lundi 22 février 2021 13:50

# 2.0 SVD Singular Value Decomposition

**Rappel** $A$ matrice $m \times n$

Alors $A$ s'écrit

$$A = UDV^T \quad \text{où} \quad U \in O(m), \quad V \in O(n)$$

$D$ est uniquement déterminé si on demande $\mu_1 \geq \dots \geq \mu_m$

$D$ est "diagonale" à coeff $\geq 0$

$$D = \begin{pmatrix} \mu_1 & & 0 & \\ & \ddots & & 0 \\ 0 & & \mu_m & \end{pmatrix} \quad (m \leq n)$$

$$D = \begin{pmatrix} \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n \\ & 0 & \end{pmatrix} \quad (m \geq n)$$

⚠ la SVD n'est pas unique

**(1)** Si $A = I_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$ le choix $U = D = V = I_n$ convient

Rq forcément $D = I_n$ ; il faut que $U$ et $V$ soient liés par la relation $UV^T = I_n$

ce qui est réalisé dès que $V \in O(n)$ $V = U^T$.

**(2)** Si $A \in O(n)$. les valeurs singulières de $A$ ($= \sqrt{\cdot}$ des v.p. de $\underbrace{AA^T}_{= I_n}$ ou $\underbrace{A^TA}_{= I_n}$)

on peut prendre $U = A$ $D = I_n$ $V = I_n$

possible car $A \in O(n)$ $UDV^T = A$

ou $U = I_n$ $D = I_n$ $V = A^T \in O(n)$

$UDV^T = A$

**(3)** Si $A$ est diagonale $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ $\lambda_i \in \mathbb{R}$

v.p. de $A$ $\lambda_1 \dots \lambda_n$

v.s. de $A$ $|\lambda_1| \dots |\lambda_n|$

Les valeurs singulières de $A$ sont $|\lambda_1|, \dots, |\lambda_n|$

$$AA^T = A^2 = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^2 \end{pmatrix}$$

valeurs singulières coeff de $D$

$$D = \begin{pmatrix} |\lambda_1| & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & |\lambda_n| \end{pmatrix} \qquad A = UDV^T$$

Rq les matrices orthogonales et diagonales sont $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = A$ avec $\lambda_i = \pm 1$

Il y en a $2^n$

En posant $U = \begin{pmatrix} \text{signe}(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \text{signe}(\lambda_n) \end{pmatrix}$

$$\text{signe}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

$V = I_n$ $\quad UDV^T = UD = \begin{pmatrix} \text{signe}(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & \text{signe}(\lambda_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\lambda_1| & & \\ & \ddots & \\ & & |\lambda_n| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} = A$

Remarque $U = I_n$ $V = \begin{pmatrix} \text{signe}(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & \text{signe}(\lambda_n) \end{pmatrix}$ convient aussi.

**(4)** $A = \begin{pmatrix} 0 & x_1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & x_{n-1} \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$

v.p. de $A$ $= 0$ avec multiplicité $n$ car $A$ est nilpotente

valeurs singulières ? On calcule $AA^T$ ou $A^TA$

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $A^T$

valeurs singulières ? On calcule $AA^T$ ou $A^TA$

$$n=4 \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & x_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_3^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \leftarrow AA^T$$

le coefficient $(i,j)$ de $AA^T$ est $\langle c_i, c_j \rangle$

$(AA^T)_{ij} = \sum_k A_{ik} A^T_{kj} = \sum_k A_{ik} A_{jk}$ où $c_i$ est la $i^{ème}$ ligne de $A$

$$AA^T = \begin{pmatrix} x_1^2 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & x_{n-1}^2 & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} \qquad A^TA = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & x_1^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & x_{n-1}^2 \end{pmatrix}$$

les v.s. de $A$ sont donc $|x_1| \dots |x_{n-1}|$ et $0$

Soit $D = \begin{pmatrix} |x_1| & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & |x_{n-1}| & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$ On veut $UDV^T = A$

Soit $U_1 = \begin{pmatrix} \text{signe}(x_1) & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \text{signe}(x_{n-1}) & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} \in O(n)$

et $U_1 D = \begin{pmatrix} x_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & x_{n-1} & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$

Soit $V = \begin{pmatrix} 0 & & & 1 \\ 1 & \ddots & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix} \in O(n)$ si $(e_1, \dots e_n)$ est la base canonique, on a $V(e_i) = e_{i+1}$

$V^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & & 0 \end{pmatrix}$

$U_1 D V^T = \begin{pmatrix} x_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & x_{n-1} & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & \ddots & 1 \\ 1 & & & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & x_1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & x_{n-1} \\ & & & 0 \end{pmatrix}$

Les colonnes sont $V^T$ sont les images par $A$ des vecteurs propres de $A^TA$, divisés par $\mu_i$

Les lignes de $U$ sont les images par $A^T$ des vecteurs propres de $AA^T$, divisés par $\mu_i$

à vérifier

**5** $A = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & \cdots & a_n \\ & 0 & & \end{pmatrix}$

valeurs propres : $a_1$ et $0$

multiplicité 1   multiplicité $n-1$

valeurs singulières : $\sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}$ et $0$

multiplicité 1   multiplicité $n-1$

$AA^T = \begin{pmatrix} \alpha & & \\ & 0 & \\ & & \end{pmatrix}$ avec $\alpha = a_1^2 + \dots + a_n^2$

$D = \begin{pmatrix} \sqrt{\alpha} & & 0 \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{pmatrix}$   $U = \begin{pmatrix} \frac{a_1}{\sqrt{\alpha}} & \cdots & \frac{a_n}{\sqrt{\alpha}} \\ & \times & \end{pmatrix}$

on complète $U$ en une matrice orthogonale

Alors $UD = A$

et $V = I_n$ convient $A = UDV^T$.

**6** Soit $A$ carrée inversible

$A = UDV^T$ sa SVD   $V \in O(n)$

⑥ Soit $A$ carrée inversible

$A = UDV^T$ sa SVD $\qquad V \in O(n)$, $V^T = V^{-1}$

inverse

$A^{-1} \overset{?}{=} U' D' (V')^T$

$A^{-1} = V D^{-1} U^{-1} = V D^{-1} U^T$ et donc le choix $U' = V$, $V' = U$, $D' = D^{-1}$ convient.

Les v.s. de $A^{-1}$ sont les inverses des v.s. de $A$.

## 2.2 Exemples calculatoires

Autre exemple $\quad A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$

$$A = \underset{O(2)}{U}\ \underset{\begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 \end{pmatrix}}{D}\ \underset{O(3)}{V^T}$$

Etape 1 : on diagonalise $\underset{\text{matrice } 2\times 2}{AA^T}$ ou $\underset{\text{matrice } 3\times 3}{A^TA}$

v.p. de $AA^T \rightsquigarrow D$

$\vec{v}$.p. de $AA^T \rightsquigarrow U$

$(u_1, u_2)$ orthonormés !

$v_i = \frac{A^T u_i}{\mu_i}$ donneront les 2 premières colonnes de $V$

Calcul de $AA^T$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 8 \\ 8 & 17 \end{pmatrix} = AA^T$$

Le polynôme caractéristique de $AA^T$

est $(17-X)^2 - 8^2$

$= (17-X-8)(17-X+8)$

$= (9-X)(25-X)$

et les v.p. de $AA^T$ sont 25 et 9

Les valeurs singulières de $A$ sont donc $\mu_1 = 5$ et $\mu_2 = 3$.

$D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

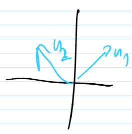
Comme $AA^T$ est symétrique

Il existe une base orthonormale $(u_1, u_2)$ de vecteurs propres

$AA^T u_1 = 25 u_1 \quad AA^T u_2 = 9 u_2 \qquad AA^T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 9 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow$

$$AA^T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17x + 8y \\ 8x + 17y \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} 17x + 8y = 9x \\ 8x + 17y = 9y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x + 8y = 0 \\ 8x + 8y = 0 \end{cases}$$



Une solution est $x = 1$ $y = -1$ $\qquad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} / \sqrt{2}$

d'où $\quad u_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

On obtient $u_1$ en prenant un vecteur unitaire orthogonal à $u_2$

$u_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

On a donc $\quad U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \qquad$ (rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$)

- On calcule $v_i = \frac{A^T u_i}{\mu_i} \qquad i = 1, 2$

$A^T = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

$A^T u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $v_1 = \frac{A^T u_1}{\mu_1} = \frac{1}{5\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$A^T u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}5\\5\\0\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad v_1 = \frac{A^T u_1}{\mu_1} = \frac{1}{5\sqrt{2}}\begin{pmatrix}5\\5\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$A^T u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\4\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad v_2 = \frac{A^T u_2}{\mu_2} = \frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\4\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{18}}\begin{pmatrix}1\\-1\\4\end{pmatrix}$$

La matrice V est $\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}$

on complète $(v_1, v_2)$ en une base orthonormale.

$$V = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{18}} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{18}} & \frac{2}{3} \\ 0 & +\frac{4}{\sqrt{18}} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$v_3 = v_1 \wedge v_2$

$$v_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \times \left(+\frac{4}{\sqrt{18}}\right) \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \times \left(+\frac{4}{\sqrt{18}}\right) \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{18}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{18}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix}$$

$$\|v_3\|_2 = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{1}{3}} = 1$$

On a bien $A = UDV^T$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{18}} & -\frac{1}{\sqrt{18}} & +\frac{4}{\sqrt{18}} \\ +\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

**2.** Si on a écrit la SVD de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$A = UDV^T$$

Soit $C$ le cercle unité dans $\mathbb{R}^2$ $\quad C = \{(a,b) : a^2 + b^2 = 1\}$

$A(C)$? $\quad A(C) = UD\underbrace{V^T(C)}_{C}$

$M \in M_n(\mathbb{R})$

$M \in O(n)$
$\Updownarrow$
$\|MX\|_2 = \|X\|_2 \quad \forall X \in \mathbb{R}^n$

(l'application linéaire associée à $M$ préserve la norme euclidienne)

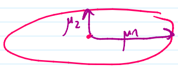
$\|MX\|_2^2 = (MX)^T \cdot MX = X^T M^T M X$

$X$ = vecteur colonne

$D = \begin{pmatrix} \mu_1 & \\ & \mu_2 \end{pmatrix}$

$D(C)$ est une ellipse

$\left\{(a,b) : \frac{a^2}{\mu_1^2} + \frac{b^2}{\mu_2^2} = 1\right\}$



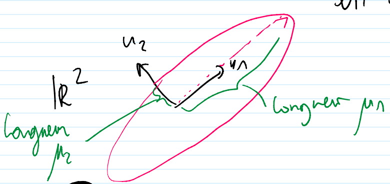

$A(C) = U(D(C))$

est une ellipse portée par les vecteurs

$u_1$ = première colonne de $U$

$u_2$ = deuxième ———

de demi-axes $\mu_1$, $\mu_2$




## 2.3 Norme de FROBENIUS

(on dit aussi : de HILBERT-SCHMIDT)

$A \in M_n(\mathbb{K})$

$$\|A\|_F = \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} |A_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 7 \\ 3 & -2 & 8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 0 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$\|A\|_F = \left(\sum_{i=1} \sum_{j=1} |A_{ij}|^2\right)$$

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 7 \\ 3 & -2 & 8 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \\ 3 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix}$

**1** $Tr(A^*A) = \sum_{i=1}^{n} (A^*A)_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (A^*)_{ij} A_{ji}$

$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \overline{A_{ji}} A_{ji} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |A_{ji}|^2 = \|A\|_F^2$

La norme de FROBENIUS est la norme qui dérive
du produit scalaire $(A,B) \longmapsto Tr(A^T B)$ sur $\mathbb{R}$
du produit hermitien $(A,B) \longmapsto Tr(A^* B)$ sur $\mathbb{C}$

**2** Rappel : si $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathbb{K}^n$, la norme subordonnée sur $M_n(\mathbb{K})$

est $\|\!|A|\!\| = \sup_{X \neq 0} \frac{\|AX\|}{\|X\|}$

On a $\|\!|I_n|\!\| = 1$ pour toute norme subordonnée

or $\|I_n\|_F = \sqrt{n}$

Ainsi, si $n \geq 2$, la norme de FROBENIUS n'est pas une norme subordonnée. (elle l'est si $n=1$)

**3** Mq si $U$ est $\begin{cases} \text{unitaire } (\mathbb{C}) \\ \text{orthogonale } (\mathbb{R}) \end{cases}$ $\|AU\|_F = \|UA\|_F = \|A\|_F$

$$\|UA\|_F^2 = Tr((UA)^* UA) = Tr(A^* \underbrace{U^* U}_{I_n} A) = Tr(A^*A) = \|A\|_F^2$$

$Tr(ABCD)$
$= Tr(DABC)$
$= Tr(CDAB)$
mais pas $Tr(ACDB)$ en général

$$\|AU\|_F^2 = Tr((AU)^* AU) = Tr(U^* A^* A U) = Tr(\underbrace{U U^*}_{I_n} A^* A)$$
$$= Tr(A^*A) = \|A\|_F^2$$

Autre argument $\|A\|_F = \|A^*\|_F$

donc $\|AU\|_F = \|U^* A^*\|_F = \|A^*\|_F = \|A\|_F$.

**$3\frac{3}{4}$** Que vaut $\|A\|_F$ en fonction de sa SVD ? par le 3.

$A = UDV^T$ $\|A\|_F = \|UDV^T\|_F = \|DV^T\|_F = \|D\|_F$

Ainsi $\|A\|_F = \left(\sum \mu_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$ où $\mu_i$ sont les valeurs singulières de $A$.

**4** Si $A$ est normale $(AA^* = A^*A)$ [inclut le cas $A = A^*$]
définition

Théorème spectral : Toute matrice normale peut se diagonaliser dans une base orthonormale.

$A = USU^*$ avec $U \in U(n)$ [$O(n)$ en réel]
$S$ diagonale

$S = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ 0 & \ddots & \end{pmatrix}$

S diagonale

$$S = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

avec $\lambda_1 \dots \lambda_n$ valeurs propre de $A$

$$\|A\|_F = \|USU^*\|_F = \|S\|_F = \left(\sum |\lambda_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Remarque Si $A$ normale s'écrit $A = USU^*$

$$AA^* = USU^*(USU^*)^* = USU^*US^*U^*$$
$$= USS^*U^*$$
$$SS^* = \begin{pmatrix} |\lambda_1|^2 & & \\ & \ddots & \\ & & |\lambda_n|^2 \end{pmatrix}$$

Ainsi, pour une matrice normale, les valeurs singulières sont les modules des valeurs propres.

**2.4**

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ $\quad \|x\|_1 = \sum |x_i|$

$\|x\|_\infty = \max(|x_i|)$

$\rightsquigarrow$ on note $|||\cdot|||_1$ et $|||\cdot|||_\infty$ les normes subordonnées correspondantes sur $M_n(\mathbb{K})$

Mq $\quad |||A|||_1 = \max_{1 \le j \le m} \sum_{i=1}^{m} |A_{i,j}|$ $\leftarrow$ max des $\|\cdot\|_1$ des colonnes

$|||A|||_\infty = \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} |A_{i,j}|$ $\leftarrow$ max des $\|\cdot\|_1$ des lignes

- $|||A|||_1 = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1}$ = le plus petit $C > 0$ tel que $\|Ax\|_1 \le C\|x\|_1$ pour tout $x \in \mathbb{K}^n$

$(A_{ij}) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$$\|Ax\|_1 = \sum_{i=1}^{m} |(Ax)_i| = \sum_{i=1}^{m} \left|\sum_{j=1}^{m} A_{ij} x_j\right|$$
$$\le \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} |A_{ij}| \cdot |x_j|$$
$$\le \sum_{j=1}^{m} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{m} |A_{ij}|\right)}_{\le C} |x_j| \le C \sum_j |x_j| = C\|x\|_1$$

Soit $C = \max_j \sum_i |A_{i,j}|$

On a donc montré $|||A|||_1 \le C$

Soit $j_0$ tel que $C = \sum_i |A_{i,j_0}|$

Soit $x = (0, \dots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ j_0}}{1}, 0 \dots 0)$

Alors $\|x\|_1 = 1$ et $\|Ax\|_1 = \sum_{i=1}^{m} |A_{ij_0}| = C$

et donc $|||A|||_1 \ge C$.

$|||A|||_1 = \sup_x \frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1}$

- $|||A|||_\infty = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty}$

Soit $D = \max \sum |A_{i,j}|$

- $\|A\|_\infty = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty}$

Soit $D = \max_i \sum_j |A_{i,j}|$

$\|Ax\|_\infty = \max_i |(Ax)_i|$

Fixons $i$ $\quad |(Ax)_i| = |\sum_j A_{ij} x_j| \leq \sum_j |A_{ij}| \cdot \underbrace{|x_j|}_{\leq \|x\|_\infty}$

$\leq \underbrace{\left(\sum_j |A_{ij}|\right)}_{\leq D} \|x\|_\infty \leq D \|x\|_\infty$

$\forall i \quad |(Ax)_i| \leq D\|x\|_\infty$

en prenant le max sur $i$ : $\|Ax\|_\infty \leq D\|x\|_\infty$

d'où $|||A||| \leq D$

Pour montrer l'inégalité inverse, on cherche $x$ avec $\|x\|_\infty = 1$ et $\|Ax\|_\infty = D$

Dans l'inégalité $|\sum a_j x_j| \leq \sum |a_j||x_j|$ il y a égalité si $x_j = \text{signe}(a_j)$ $(\mathbb{R})$

$x_j = \frac{\overline{a_j}}{|a_j|}$ $(\text{si } j \neq 0)$ $(\mathbb{C})$

Soit $i_0$ tel que $D = \sum_j |a_{i_0 j}|$

On définit un vecteur $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ en posant

$$x_j = \begin{cases} \frac{\overline{a_{i_0 j}}}{|a_{i_0 j}|} & \text{si } a_{i_0,j} \neq 0 \\ 0 & \text{si } a_{i_0,j} = 0 \end{cases}$$

Alors $\|x\|_\infty = 1$ et

$(Ax)_{i_0} = \sum_j a_{i_0 j} x_j = \sum_j a_{i_0 j} \frac{\overline{a_{i_0 j}}}{|a_{i_0 j}|} = \sum_j \frac{|a_{i_0 j}|^2}{|a_{i_0 j}|}$

$= \sum_j |a_{i_0 j}| = D$

Alors $\|Ax\|_\infty \geq |(Ax)_{i_0}| \geq D$. Ainsi $|||A|||_\infty \geq D$

et donc $|||A|||_\infty = D$.

## 2.5 Norme subordonnée à la norme 2

$\left(\sum |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$

## 2.3 Norme subordonnée à la norme 2

$x \in \mathbb{K}^n \quad \|x\|_2 = \left(\sum |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$

$$|||A|||_2 = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}.$$

$|z|^2 = z\bar{z}$

(1) Si $U \in U(n)$ ($O(n)$ en réel)

$$\|Ux\|_2^2 = \sum |(Ux)_i|^2 = \sum_i (Ux)_i \overline{(Ux)_i}$$

$$= \sum_i \left(\sum_j U_{ij} x_j\right) \overline{\left(\sum_k U_{ik} x_k\right)}$$

$$= \sum_{jk} \underbrace{\sum_i U_{ij} \overline{U_{ik}}}_{= \delta_{jk}} x_j \overline{x_k}$$

$$= \sum_j |x_j|^2 = \|x\|_2^2$$

$U^* U = Id$

$$(U^* U)_{kj} = \delta_{kj} = \begin{cases} 1 & k = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$= \sum_i (U^*)_{ki} U_{ij} = \sum_i \overline{U_{ik}} U_{ij}$$

Comme $U^*$ est unitaire, on a aussi $\|U^* x\|_2 = \|x\|_2$.

**A chercher : 2.5 et 2.6**