TD du 1 mars

lundi 1 mars 2021 14:01

2.5

$x \in \mathbb{K}^n$

$$\|x\|_2 = \left(\sum |x_i|^2\right)^{1/2}$$

qui dérive du produit scalaire

$$\langle x, y\rangle = \sum \overline{x_i}\, y_i \,.$$

On lui associe la norme subordonnée sur les matrices

$$|||A|||_2 = \max_{\substack{x \in \mathbb{C}^n \\ x \neq 0}} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}$$

$$= \max_{\substack{x \in \mathbb{C}^n \\ \|x\|_2 = 1}} \|Ax\|_2$$

On peut définir aussi $|||A|||_2$ comme la plus petite constante $C > 0$ vérifiant $\|Ax\|_2 \leqslant C\|x\|_2$ pour tout $x \in \mathbb{K}^n$.

1 (déjà fait) Si $U \in \mathcal{U}(n)$, $x \in \mathbb{K}^n$ $\quad \|Ux\|_2 = \|x\|_2 = \|U^* x\|_2$

2 Montrons que $\forall A \in M_n(\mathbb{K})$, $\forall U \in \mathcal{U}(n)$ $\quad |||A|||_2 = |||UA|||_2 = |||AU|||_2$

- Pour tout vecteur $x \in \mathbb{K}^n$, $\|UAx\|_2 = \|Ax\|_2$ par le **1**

  si $x \neq 0$, on a donc

$$\frac{\|UAx\|_2}{\|x\|_2} = \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}$$

En prenant le sup sur l'ensemble des vecteurs x de $\mathbb{K}^n \setminus \{0\}$, on a donc

$$|||UA|||_2 = |||A|||_2$$

- $$\frac{\|AUx\|_2}{\|x\|_2} = \frac{\|AUx\|_2}{\|Ux\|_2} = \frac{\|Ay\|_2}{\|y\|_2} \qquad y = Ux$$

  En prenant la borne supérieure sur $x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ (ou, de manière équivalente, sur $y \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$),

  car U est inversible

  on a $|||AU|||_2 = |||A|||_2$.

- On déduit des deux points précédents que

$$|||UAV|||_2 = |||A|||_2 \quad \text{si } U, V \in \mathcal{U}(n)$$

(en particulier $|||A|||_2 = |||U^* A U|||$).

3 Si A est normale (rappel : A normale $\iff AA^* = A^*A$)

alors $|||A|||_2 \overset{?}{=} \rho(A)$ ← rayon spectral de A = maximum des modules des valeurs propres.

Rappel : théorème spectral : toute matrice normale A se diagonalise dans une base orthonormale. Autrement dit il existe $U \in \mathcal{U}(n)$ et Δ diagonale telle que

$$A = U\Delta U^*.$$

Il existe $U \in \mathcal{U}(n)$ et Δ diagonale telle que $A = U\Delta U^*$.

Remarque : réciproquement, toute matrice de la forme $U\Delta U^*$ est normale

$$(U\Delta U^*)(U\Delta U^*)^* = U\Delta \underbrace{U^* \underbrace{U^{**}}_{=U}}_{U^*U = Id} \Delta^* U^* = U\Delta\Delta^* U^* \qquad \Delta^* = \bar{\Delta}$$

$$(U\Delta U^*)^*(U\Delta U^*) = U^{**}\Delta^* U^* U \Delta U^* = U\Delta^*\Delta U^*$$

comme $\Delta\bar{D} = \bar{\Delta}D$ (deux matrices diagonales commutent)

Ainsi $U\Delta U^*$ et $(U\Delta U^*)^*$ commutent, donc $U\Delta U^*$ est normale.

Soit A une matrice normale. Par le théorème spectral, elle s'écrit $A = U\Delta U^*$ avec $U \in \mathcal{U}(n)$

$$\Delta = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$ et les λ_i sont les valeurs propres de A.

Par la question ②, $|||A|||_2 = |||U\Delta U^*|||_2 = |||\Delta|||_2$

On est ramené à montrer que

$$|||\Delta|||_2 = \sup\{|\lambda_i|\} = \rho(A) = \rho(\Delta)$$

Prenons $x \in \mathbb{K}^n$ $\quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \Delta x = \begin{pmatrix} \lambda_1 x_1 \\ \vdots \\ \lambda_n x_n \end{pmatrix}$

$$\|x\|_2^2 = \sum_i |x_i|^2 \qquad \|\Delta x\|_2^2 = \sum_i |\lambda_i x_i|^2 = \sum_i |\lambda_i|^2 \cdot |x_i|^2$$

On a donc $\|\Delta x\|_2^2 \leq \sum_i \rho(A)^2 |x_i|^2 = \rho(A)^2 \|x\|_2^2$

d'où $\|\Delta x\|_2 \leq \rho(A)\|x\|_2$

$|||\Delta||| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|\Delta x\|_2}{\|x\|_2} \leq \sup_{x \neq 0} \frac{\rho(A)\|x\|_2}{\|x\|_2} = \rho(A)$ (ce qui montre que $|||\Delta|||_2 \leq \rho(A)$.

le choix $C = \rho(A)$ convient dans l'inégalité $\|\Delta x\|_2 \leq C\|x\|_2$, donc $|||\Delta|||_2 \leq C$

Réciproquement, l'inégalité $|||\Delta||| \geq \rho(\Delta)$ est vraie pour toutes les normes subordonnées.

$$|||\Delta||| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \geq |\lambda_i|$$ en choisissant x $\vec{v}$.p. associé à la v.p. λ_i

et donc $|||\Delta||| \geq \rho(\Delta)$

- On a donc montré que, si A est normale, $|||A|||_2 = \rho(A)$.

Si A n'est pas normale, cette formule est fausse : si $A \neq 0$ est nilpotente, $\rho(A) = 0$ (0 est la seule vp de A) et $|||A|||_2 > 0$.

Remarque : une formule toujours vraie est $|||A|||_2 = \max s_i(A)$ où $(s_i(A))_i$ sont les valeurs singulières de A.

En effet écrivons la SVD $A = U\Lambda V^*$ $\quad U, V \in \mathcal{U}(n)$

où $(s_i(A))_i$ ... singulières de A.

En effet, écrivons la SVD $A = U\Delta V^*$ $\quad U, V \in \mathcal{U}(n)$

$$\Delta = \begin{pmatrix} s_1(A) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & s_n(A) \end{pmatrix}$$

donc $|||A|||_2 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{par le (2)}}}{=} |||\Delta|||_2 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{par le calcul fait au (3)}}}{=} \max s_i(A)$

(4) Mq $|||A|||_2 = \sqrt{|||A^*A|||_2} \iff |||A|||_2^2 = |||A^*A|||_2$

Rq : A^*A est symétrique.

$\forall y \in \mathbb{K}^n \quad \|A^*Ay\|_2 \underset{\text{par le calcul ci-contre}}{=} \sup\limits_{\substack{x \in \mathbb{K}^n \\ x \neq 0}} \dfrac{|\langle A^*Ay, x\rangle|}{\|x\|_2}$

$= \sup\limits_{\substack{x \in \mathbb{K}^n \\ x \neq 0}} \dfrac{|\langle Ay, Ax\rangle|}{\|x\|_2}$

Si $z \in \mathbb{K}^n$,

$\|z\|_2 = \sup\limits_{\substack{x \in \mathbb{K}^n \\ x \neq 0}} \dfrac{|\langle z, x\rangle|}{\|x\|_2}$

Preuve (évident si $z = 0$)

$\boxed{\leq}$ $\forall x \in \mathbb{K}^n, x \neq 0$

$|\langle z, x\rangle| \leq \|z\|_2 \|x\|_2$

$\Rightarrow \dfrac{|\langle z, x\rangle|}{\|x\|_2} \leq \|z\|_2$

⚠ si $z \neq 0$ → $\boxed{\geq}$ On choisit $x = z$, ce qui donne

$\dfrac{|\langle z, x\rangle|}{\|x\|_2} = \dfrac{|\langle z, z\rangle|}{\|z\|_2} = \dfrac{\|z\|_2^2}{\|z\|_2} = \|z\|_2$

d'où $|||A^*A|||_2 = \sup\limits_{\substack{y \in \mathbb{K}^n \\ y \neq 0}} \dfrac{\|A^*Ay\|_2}{\|y\|_2} = \sup\limits_{\substack{y \in \mathbb{K}^n \\ y \neq 0}} \sup\limits_{\substack{x \in \mathbb{K}^n \\ x \neq 0}} \dfrac{|\langle Ay, Ax\rangle|}{\|x\|_2 \|y\|_2}$

Par CAUCHY-SCHWARTZ

$$|||A^*A|||_2 \leq \sup_{\substack{y \in \mathbb{K}^n \\ y \neq 0}} \sup_{\substack{x \in \mathbb{K}^n \\ x \neq 0}} \frac{\|Ax\|_2 \cdot \|Ay\|_2}{\|x\|_2 \cdot \|y\|_2} = \sup_{\substack{x \in \mathbb{K}^n \\ x \neq 0}} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} \sup_{\substack{y \in \mathbb{K}^n \\ y \neq 0}} \frac{\|Ay\|_2}{\|y\|_2} = |||A|||_2^2$$

$$|||A|||_2^2 = \sup_{\substack{y \in \mathbb{K}^n \\ y \neq 0}} \frac{\|Ay\|_2^2}{\|y\|_2^2} = \sup_{\substack{y \in \mathbb{K}^n \\ y \neq 0}} \frac{\langle Ay, Ay\rangle}{\|y\|_2^2} = \sup_{\substack{y \in \mathbb{K}^n \\ y \neq 0}} \frac{\langle A^*Ay, y\rangle}{\|y\|_2^2}$$

$\leq \|A^*Ay\|_2 \cdot \|y\|_2$

$$\leq \sup_{\substack{y \in \mathbb{K}^n \\ y \neq 0}} \frac{\|A^*Ay\|_2}{\|y\|_2} = |||A^*A|||_2$$

On a donc montré $|||A|||_2^2 = |||A^*A|||_2$

(5) Comme la matrice A^*A est hermitienne $((A^*A)^* = A^*A)$ donc normale,

on a par le **(3)** $\quad |||A^*A|||_2 = \rho(A^*A)$

donc $|||A|||_2 = \sqrt{\rho(A^*A)}$ $\quad (*)$

Comme AA^* et A^*A ont mêmes valeurs propres (non nulles),

$\rho(AA^*) = \rho(A^*A)$

et en appliquant $(*)$ à A^*, on a $|||A^*|||_2 = \sqrt{\rho(AA^*)}$

$\rho(AA^*) = \rho(A^*A)$

et en appliquant (*) à A^*, on a $|||A^*|||_2 = \sqrt{\rho(AA^*)}$

$$\begin{array}{c} \| \\ |||A|||_2 = \sqrt{\rho(A^*A)} \end{array}$$

⚠ La formule $|||A||| = |||A^*|||$ n'est pas vraie pour toutes les normes subordonnées. On a $|||A^*|||_1 = |||A|||_\infty$ d'après des formules montrées au 2.4.

⑥ Conditionnement

Le conditionnement associé à $|||\cdot|||_2$ est $\text{cond}_2(A) = |||A|||_2 \cdot |||A^{-1}|||_2$ pour A inversible.

Remarque $\text{cond}_2(A) \geqslant 1$

En effet, $\forall x \neq 0$

$$1 = \frac{\|x\|}{\|x\|} = \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \cdot \frac{\|x\|}{\|Ax\|} = \underbrace{\frac{\|Ax\|}{\|x\|}}_{\leq |||A|||} \cdot \underbrace{\frac{\|A^{-1}Ax\|}{\|Ax\|}}_{\leq |||A^{-1}|||}$$

donc $|||A|||\cdot|||A^{-1}||| \geqslant 1$

(Cette inégalité est vraie pour toute norme subordonnée).

(a) Soient $\mu_1(A) \leq \mu_2(A) \leq \dots \leq \mu_n(A)$ les valeurs singulières de A

On a vu que $|||A|||_2 = \mu_n(A)$

Les valeurs singulières de A^{-1} sont $\mu_i(A)^{-1}$ (cf exo 2.0)

et la plus grande valeur singulière de A^{-1} est donc $\mu_1(A)^{-1}$.

donc $|||A^{-1}|||_2 = \dfrac{1}{\mu_1(A)}$,

On a donc $\text{cond}_2(A) = |||A|||_2 \cdot |||A^{-1}|||_2 = \dfrac{\mu_n(A)}{\mu_1(A)}$.

(b) Si A est normale, ses valeurs singulières sont les modules de ses valeurs propres, et donc

$$\begin{cases} \mu_n(A) = \max\limits_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda| \\ \mu_1(A) = \min\limits_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda| \end{cases}$$

et alors

$$\text{cond}_2(A) = \frac{\max\limits_{\lambda\in\sigma(A)} |\lambda|}{\min\limits_{\lambda\in\sigma(A)} |\lambda|}$$

2.6 ① Si $\|\cdot\|_*$ et $\|\cdot\|_\#$ sont deux normes sur $\mathbb{K}^n$, il existe (th. d'équivalence des normes) $C_1, C_2 > 0$

tq. $C_1 \|\cdot\|_* \leq \|\cdot\|_\# \leq C_2 \|\cdot\|_* \Rightarrow C_2^{-1} \|\cdot\|_\# \leq \|\cdot\|_* \leq C_1^{-1} \|\cdot\|_\#$

On a $\forall A \in M_n(\mathbb{K})$
$$|||A|||_* = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_*}{\|x\|_*}$$
$$|||A|||_\# = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_\#}{\|x\|_\#}$$

Soit $x \neq 0$
$$\frac{\|Ax\|_*}{\|x\|_*} \leq \frac{C_1^{-1} \|Ax\|_\#}{C_2^{-1} \|x\|_\#} = \frac{C_2}{C_1} \frac{\|Ax\|_\#}{\|x\|_\#}$$

et en prenant le sup sur $x \neq 0$, on a
$$|||A|||_* \leq \frac{C_2}{C_1} |||A|||_\#$$

L'inégalité $|||A|||_\# \leq \frac{C_2}{C_1} |||A|||_*$ se montre de la même manière.

② On va comparer 4 normes sur $M_n(\mathbb{K})$

- $|||\cdot|||_1$, $|||\cdot|||_\infty$ et $|||\cdot|||_2$ normes subordonnées à $\|\cdot\|_1$ $\|\cdot\|_\infty$ $\|\cdot\|_2$
- La norme de FROBENIUS $\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i,j} |A_{ij}|^2}$ (pas subordonnée)

On peut utiliser ① pour les inégalités entre $|||\cdot|||_1$ $|||\cdot|||_2$ $|||\cdot|||_\infty$.

(c) (d) On a $\forall x \in \mathbb{K}^n$
$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n} \|x\|_\infty$$
$$\frac{1}{\sqrt{n}} \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1$$
} exercice

$x = (1, \dots, 1)$
$\|x\|_1 = n$ $\|x\|_\infty = 1$
$\|x\|_2 = \sqrt{n}$
$y = (1, 0 \dots 0)$
$\|y\|_1 = \|y\|_2 = \|y\|_\infty = 1$

Par la question ①, on en déduit

$(C_1 = 1 \quad C_2 = \sqrt{n})$ $\quad \frac{1}{\sqrt{n}} |||A|||_\infty \leq |||A|||_2 \leq \sqrt{n} |||A|||_\infty$

$(C_1 = \frac{1}{\sqrt{n}} \quad C_2 = 1)$ $\quad \frac{1}{\sqrt{n}} |||A|||_1 \leq |||A|||_2 \leq \sqrt{n} |||A|||_1$

(a) On a vu que $\|A\|_F^2 = \mathrm{Tr}(A^* A)$ (exo 2.3)
$$|||A|||_2^2 = \rho(A^* A) \quad \text{(exo 2.5)}$$

La matrice $A^* A$ est symétrique et positive ;
soit $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ses valeurs propres
$$\mathrm{Tr}(A^* A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$$

Rappel
$A^* A$ est symétrique
car $(A^* A)^* = A^* A^{**} = A^* A$

$$Tr(A^*A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$$

$$\rho(A^*A) = \max_{1\leq i\leq n}(\lambda_i)$$

d'où $\rho(A^*A) \leq Tr(A^*A) \leq n\rho(A^*A)$

Ainsi $|||A|||_2^2 \leq \|A\|_F^2 \leq n|||A|||_2^2$

donc $|||A|||_2 \leq |||A|||_F \leq \sqrt{n}\,|||A|||_2$

A^*A est symétrique car $(A^*A)^* = A^*A^{**} = A^*A$
et ses v.p. sont positives : Si $A^*Ax = \lambda x$, alors
$\langle A^*Ax, x\rangle = \langle \lambda x, x\rangle = \lambda\|x\|^2$
$\quad \shortparallel$
$\langle Ax, Ax\rangle = \|Ax\|^2$.
Si $x \neq 0$ on en déduit $\lambda \geq 0$

(b) On compare $|||\cdot|||_2$ à la norme $\max_{i,j}|A_{ij}| = \|A\|_{max}$

$$|||A|||_2 = \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n\\ \|x\|_2=1}} \|Ax\|_2 = \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n\\ \|x\|_2=1}} \sup_{\substack{y\in\mathbb{R}^n\\ \|y\|_2=1}} |\langle Ax, y\rangle|$$

$$\|z\|_2 = \sup_{x\neq 0} \frac{|\langle z, x\rangle|}{\|x\|_2} = \sup_{\|x\|_2=1} |\langle z, x\rangle|$$

Soient x, y tels que $\|x\|_2 = \|y\|_2 = 1$

$$|\langle Ax, y\rangle| = \Big|\sum_{i,j} \underbrace{A_{ij}}_{\leq \|A\|_{max}} x_j y_i\Big| \leq \|A\|_{max} \sum_{i,j} |x_j y_i|$$

⚠ somme double

$$\langle Ax, y\rangle = \sum_i (Ax)_i y_i$$

$$\boxed{A} \quad \text{et } (Ax)_i = \sum_j A_{ij} x_j$$

$$= \|A\|_{max} \Big(\sum_j |x_j|\Big)\Big(\sum_i |y_i|\Big)$$

$$= \|A\|_{max} \|x\|_1 \|y\|_1$$

$$\leq \|A\|_{max} \sqrt{n}\,\underbrace{\|x\|_2}_{=1} \cdot \sqrt{n}\,\underbrace{\|y\|_2}_{=1}$$

$$= n\|A\|_{max}$$

En prenant le sup sur x, y, on a donc $|||A|||_2 \leq n\|A\|_{max}$

(e_i) : base canonique de $\mathbb{K}^n$

Pour l'autre inégalité, on choisit $x = e_j$ et $y = e_i$ $\quad \|x\|_2 = \|y\|_2 = 1$

$\forall i$
$\forall j$
$$|||A|||_2 = \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n\\ \|x\|_2=1}} \sup_{\substack{y\in\mathbb{R}^n\\ \|y\|_2=1}} |\langle Ax, y\rangle| \geq |\langle Ae_j, e_i\rangle| = |A_{ij}|$$

colonne j
$\shortparallel$
décomposition de Ae_j dans la base (e_i)
$\langle Ae_j, e_i\rangle$ est la $i$ème coordonnée du vecteur Ae_j

et on a donc $|||A|||_2 \geq \max_{ij} |A_{ij}|$

(e) $|||A|||_2 \overset{?}{\leq} \sqrt{|||A|||_\infty |||A|||_1}$

(Facile : $\|x\|_2 \leq \sqrt{\|x\|_\infty \|x\|_1}$ mais pas directement utilisable)

On utilise la formule

$$|||A|||_2 = \sqrt{\rho(A^*A)}$$

- Rappel : pour toute norme subordonnée $|||\cdot|||$ on a $|||B||| \geq \rho(B)$

$$\rho(A^*A) \leq |||A^*A|||_1 \leq |||A^*|||_1 \cdot |||A|||_1$$
$$= |||A|||_\infty |||A|||_1$$

et donc $\quad |||A|||_2 \leq \sqrt{|||A|||_1 \cdot |||A|||_\infty}$

$|||A|||_1 = \max_j \sum_i |A_{ij}|$

$|||A|||_\infty = \max_i \sum_j |A_{ij}|$

d'où $\quad |||A^T|||_1 = |||A|||_\infty$
$\quad \quad || \quad$
$\quad |||A^*|||_1$

(f) $\quad |||A|||_1 = \max_j \sum_i |A_{ij}|$

$\|A\|_F = \left(\sum_{i,j} |A_{ij}|^2\right)^{1/2}$

Dans $\mathbb{R}^n$
$\|x\|_1 \leq \sqrt{n}\,\|x\|_2$
$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2$

Pour tout j $\quad \sum_i |A_{ij}| = \sum_i |A_{ij}| \cdot 1 \underset{\text{CAUCHY SCHWARZ}}{\leq} \left(\sum_i |A_{ij}|^2\right)^{1/2} \sqrt{n}$

$$\leq \left(\sum_{ij} |A_{ij}|^2\right)^{1/2} \sqrt{n}$$
$$= \sqrt{n}\,\|A\|_F$$

En prenant le max sur j, on a $\quad |||A|||_1 \leq \sqrt{n}\,\|A\|_F$.

$\|x\|_1 \geq \|x\|_2$
$\|x\|_\infty \geq \frac{1}{\sqrt{n}} \|x\|_2$

Dans l'autre sens,

$$|||A|||_1 = \max_j \sum_i |A_{ij}| \geq \max_j \left(\sum_i |A_{ij}|^2\right)^{1/2}$$
$$\geq \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\sum_j \sum_i |A_{ij}|^2\right)^{1/2}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_F$$

On a montré $\quad \frac{1}{\sqrt{n}} |||A|||_1 \leq \|A\|_F \leq \sqrt{n}\, |||A|||_1$

Comme $\quad |||A^T|||_1 = |||A|||_\infty$ et $\|A^T\|_F = \|A\|_F$, cette inégalité appliquée à A^T

donne $\quad \frac{1}{\sqrt{n}} |||A|||_\infty \leq \|A\|_F \leq \sqrt{n}\, |||A|||_\infty .$

2.7 $\quad$ A inversible $\quad \|\cdot\|$ norme sur K^n
$\quad |||\cdot|||$ norme subordonnée associée

$$\boxed{\|Ax\| \leq |||A||| \cdot \|x\|} \; (\S)$$

(i) Ma $\quad \|Ax\| \geq \frac{\|x\|}{\;}$

① Mq $\|Ax\| \geq \dfrac{\|x\|}{|||A^{-1}|||}$

Appliquons (S) à la matrice A^{-1} et au vecteur Ax

On a $\underbrace{\|A^{-1}Ax\|}_{=\|x\|} \leq |||A^{-1}|||\cdot\|Ax\|$ d'où $\|Ax\| \geq \dfrac{\|x\|}{|||A^{-1}|||}$

② Soit $E \in M_n(\mathbb{K})$ tq $|||E||| < \dfrac{1}{|||A^{-1}|||}$ — E pour "Erreur"

Mq $\forall x \in K^n$ $\|(A+E)x\| \geq \left(\dfrac{1}{|||A^{-1}|||} - |||E|||\right)\|x\|$

On utilise l'inégalité triangulaire inverse

$\|Ax+Ex\| \geq \|Ax\| - \|Ex\|$

$\geq \dfrac{\|x\|}{|||A^{-1}|||} - |||E|||\cdot\|x\|$

$= \underbrace{\left(\dfrac{1}{|||A^{-1}|||} - |||E|||\right)}_{>0}\|x\|$

$\|Ax\| \geq \dfrac{\|x\|}{|||A^{-1}|||}$

$\|Ex\| \leq |||E|||\cdot\|x\|$

⚠ $|||A^{-1}||| \neq |||A|||^{-1}$

On en déduit que $A+E$ est inversible : en effet,
si $x \neq 0$, $\|(A+E)x\| = \|Ax+Ex\| > 0$ donc $(A+E)x \neq 0$
et $\ker(A+E) = \{0\}$.

On a démontré que l'ensemble des matrices inversibles ($GL_n(\mathbb{K})$) est ouvert dans $M_n(\mathbb{K})$.

$A \in GL_n(\mathbb{K}) \Rightarrow \mathring{B}\left(A, \dfrac{1}{|||A^{-1}|||}\right) \subset GL_n(\mathbb{K})$.

③ Si $A = I_n$ $\quad |||I_n||| = |||I_n^{-1}||| = 1$

et donc $|||E||| < 1 \Rightarrow I_n + E$ est inversible

Remarque : on a la formule

$(I_n+E)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k E^k$ qui converge normalement car $|||E^k||| \leq |||E|||^k$

$$(I_n+E)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k E^k$$ qui converge car $|||E^k||| \leqslant |||E|||^k$

cf $(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + o(x^n)$

A chercher : EXO 2.9 Equation $Ax=b$ avec A inversible

$\forall b \to$ unique solution x

Si la matrice A est "mal conditionnée" alors

changer un peu le b

change beaucoup le x