TD du 8 mars

lundi 8 mars 2021 13:57

2.8, 2.9, feuille 3.

2.8 $\|\cdot\|$ norme sur $\mathbb{K}^n$

$\downarrow$

$|||\cdot|||$ norme subordonnée associée sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

$$|||A||| = \sup_{\substack{x \in \mathbb{K}^n \\ x \neq 0}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible, le conditionnement de A est

$$\text{cond}(A) = |||A||| \cdot |||A^{-1}|||$$

Quand on part de $\|\cdot\|_p$, on note $|||\cdot|||_p$ et $\text{cond}_p(\cdot)$

Le plus important est $p=2$.

1 a) Soit A inversible

Soit $b \in \mathbb{K}^n, b \neq 0$ et $\Delta b \in \mathbb{K}^n$

Soit $x \in \mathbb{K}^n, x \neq 0$ et $\Delta x \in \mathbb{K}^n$ $\Big\}$ tels que $Ax = b$, $A(x+\Delta x) = b + \Delta b$

Comme A est inversible, étant donnés b et Δb, il existe un unique couple $(x, \Delta x)$ vérifiant les 2 équations.

Mq
$$\underbrace{\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|}}_{\text{erreur relative pour } x} \leq \text{cond}(A) \underbrace{\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}}_{\text{erreur relative pour } b}$$

- On a les inégalités
$$\|Ay\| \leq |||A|||\cdot\|y\|$$
$$\|A^{-1}y\| \leq |||A^{-1}|||\,\|y\| \qquad y = Az$$
$$\|z\| \leq |||A^{-1}|||\cdot\|Az\|$$

- $$\cancel{b} + \Delta b = A(x+\Delta x) = Ax + A\Delta x = \cancel{b} + A\Delta x$$
$$\Delta b = A\Delta x \qquad \Delta x = A^{-1}\Delta b \qquad Ax = b$$
$$\|\Delta x\| \leq |||A^{-1}|||\cdot\|\Delta b\| \quad (1)$$
$$\|b\| \leq \|A\|\cdot\|x\| \Rightarrow \frac{1}{\|x\|} \leq |||A||| \frac{1}{\|b\|} \quad (2)$$

et $(1)\times(2)$ donne
$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \underbrace{|||A^{-1}|||\cdot|||A|||}_{\text{cond}(A)} \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$$

Idée : si $\text{cond}(A)$ est petit, une petite erreur sur b

donne une petite erreur sur x

Idée : si $\text{cond}(A)$ est petit, une petite erreur ...
donne une petite erreur sur x

(b) Donner b et Δb tels qu'on ait égalité.

Il suffit d'avoir égalité dans (1) et (2)

dans (2) $\left[\ \|\underbrace{Ax}_{b}\| \leq |||A|||\cdot\|x\|\ \right]$ on peut trouver [par compacité de la boule unité]
un vecteur x tel que $\|x\|=1$ et
$\|Ax\| = |||A|||$. On pose alors $b = Ax$

$$|||A||| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|Ax\|$$

Une fonction continue sur un compact atteint ses bornes.

dans (1) $\left[\ \|\underbrace{A^{-1}\Delta b}_{\Delta x}\| \leq |||A^{-1}|||\cdot\|\Delta b\|\ \right]$
on peut de même trouver Δb tel que
$\|\Delta b\| = 1$ ou 10^{-4}
$\|A^{-1}\Delta b\| = |||A^{-1}|||$ ou $10^{-4}\,|||A^{-1}|||$

(c) Mq si $Ax = b$ et $(A+\Delta A)(x+\Delta x) = b$ alors

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x+\Delta x\|} \leq \text{cond}(A)\,\frac{|||\Delta A|||}{|||A|||}$$

$$\cancel{b} = (A+\Delta A)(x+\Delta x) = \underbrace{\cancel{Ax}}_{\cancel{b}} + A(\Delta x) + (\Delta A)(x+\Delta x)$$

d'où $0 = A(\Delta x) + (\Delta A)(x+\Delta x)$

$$A(\Delta x) = -(\Delta A)(x+\Delta x)$$

$$\|A(\Delta x)\| = \|(\Delta A)(x+\Delta x)\| \leq |||\Delta A|||\cdot\|x+\Delta x\|$$

et $\|\Delta x\| \leq |||A^{-1}|||\cdot\|A(\Delta x)\| \leq |||A^{-1}|||\cdot|||\Delta A|||\cdot\|x+\Delta x\|$

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x+\Delta x\|} \leq \underbrace{|||A^{-1}|||\cdot|||A|||}_{\text{cond}(A)}\cdot\frac{|||\Delta A|||}{|||A|||}$$

(et on peut trouver b, ΔA, Δx tels qu'il y ait égalité)

2 Mq si B est singulière (= pas inversible)

$$\frac{1}{\text{cond}(A)} \leq \frac{|||A-B|||}{|||A|||} \quad (*)$$

(Rappel (exo 2.7) : si $|||E|||<1$ alors $Id+E$ est inversible)
($\Leftrightarrow$ Si $Id+E$ est singulière alors $|||E|||\geq 1$)

BROUILLON

$\left(\Leftarrow \right.$ Si $Id+E$ est singulière alors $|||E||| \geq 1 \left. \right)$

BROUILLON

$A = I_n = A^{-1}$
$|||A||| = 1$
$cond(A) = 1$
$(*)$ devient
$|||Id - B||| \geq 1$
$B = Id + \underbrace{(B - Id)}_{E}$

$A - B = A(Id - A^{-1}B)$. Alors $A^{-1}B$ est singulière

$A^{-1}B = Id - (Id - A^{-1}B)$

Soit $E = A^{-1}B - Id$ $\quad$ $\underset{A^{-1}B}{\underset{\shortparallel}{Id+E}}$ est singulière

donc $|||E||| \geq 1$

$E = A^{-1}(B - A)$ $\quad$ donc $1 \leq |||E||| \leqslant |||A^{-1}||| \cdot |||B - A|||$

donc $|||B - A||| \geqslant \frac{1}{|||A^{-1}|||} \Rightarrow \frac{|||B-A|||}{|||A|||} \geqslant \frac{1}{|||A|||\cdot|||A^{-1}|||} = \frac{1}{cond(A)}$

(6) Mq $\frac{1}{cond_2(A)} = \inf_{B \text{ singulière}} \frac{|||A-B|||_2}{|||A|||_2}$

L'inégalité $\leq$ découle de a)
L'inégalité $\geqslant$ nécessite de trouver le B qui marche.

Si
$A = \begin{bmatrix} 2\,3 & 3 & 2\,3 \\ 4\,5 & 3 & 5\,2 \\ 0\,0 & \times & 0\,0 \\ 3\,3 & 0 & 7\,8 \\ 2\,6 & 0 & 1\,2 \end{bmatrix}$

$B_0 \begin{bmatrix} & 0 & \end{bmatrix}$

Soit $u \in \mathbb{K}^n$ tq $\|u\|_2 = 1$ et $\|A^{-1}u\|_2 = |||A^{-1}|||_2 = \sup_{\|u\|_2=1} \|A^{-1}u\|_2$
(l'existence de u est garantie par la compacité de la sphère unité)

On pose $B_0 = A - \underbrace{\frac{u(A^{-1}u)^*}{|||A^{-1}|||_2^2}}_{\in M_n(\mathbb{K})}$

$u, v \in \mathbb{K}^n \simeq M_{n,1}(\mathbb{K})$
$\Downarrow$
$uv^* \in M_{n,n}(\mathbb{K})$
matrice de rang 1
$\underset{\langle v, u\rangle}{\underset{\shortparallel}{v^* u}} \in M_{1,1}(\mathbb{K}) \simeq \mathbb{K}$

- Montrons que B_0 est singulière

Posons $v = A^{-1}u \neq 0$ $\quad$ $\|v\|_2 = |||A^{-1}|||_2$

$B_0 v = \underbrace{AA^{-1}u}_{u} - \frac{u(A^{-1}u)^*(A^{-1}u)}{|||A^{-1}|||_2^2}$

$= u - \frac{\langle A^{-1}u, A^{-1}u\rangle}{|||A^{-1}|||_2^2} u$ $\quad$ $\langle A^{-1}u, A^{-1}u\rangle = \|A^{-1}u\|_2^2 = |||A^{-1}|||_2^2$

$= u - u$
$= 0$ $\quad$ donc B_0 est singulière

- Calculons $|||A - B_0|||_2 = \frac{|||uv^*|||_2}{|||A^{-1}|||_2^2}$

Que vaut $|||uv^*|||_2$? $\quad$ $|||uv^*|||_2 = \sup_{\|x\|_2 \leqslant 1} \|u\underbrace{v^*x}_{\langle v, x\rangle}\|_2$

$= \underbrace{\sup_{\|x\|_2 \leq 1} \langle v, x\rangle}_{} \cdot \|u\|_2$

$$= \underbrace{\sup_{\|x\|_2 \leq 1} \langle v, x \rangle}_{=\|v\|_2} \cdot \|u\|_2$$

donc $|||uv^*|||_2 = \|u\|_2 \|v\|_2$

Ainsi $\quad |||A - B_0|||_2 = \dfrac{\|u\|_2 \|v\|_2}{|||A^{-1}|||_2^2} = \dfrac{1 \cdot |||A^{-1}|||_2}{|||A^{-1}|||_2^2} = \dfrac{1}{|||A|||_2^{-1}}$

et donc $\quad \dfrac{|||A - B_0|||_2}{|||A|||_2} = \dfrac{1}{|||A|||_2 \cdot |||A^{-1}|||_2} = \dfrac{1}{\mathrm{cond}_2(A)}$

2.9 Pour $\varepsilon > 0$,

$$A_\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1+\varepsilon \end{pmatrix} \quad \det(A_\varepsilon) = \varepsilon > 0$$

donc A_ε est inversible

1 Résolvons $A_\varepsilon x = b$

Si $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow x = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Si $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2+\varepsilon \end{pmatrix} \Rightarrow x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Pour ε petit, changer légèrement b change beaucoup x

$\Rightarrow A_\varepsilon$ est "mal conditionnée"

2 Si on pose $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad \Delta b = \begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon \end{pmatrix}$ $\quad b + \Delta b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2+\varepsilon \end{pmatrix}$

$x = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \Delta x = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad x + \Delta x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

On a $\quad A_\varepsilon x = b \quad A_\varepsilon(x + \Delta x) = b + \Delta b$

donc par le 2.8

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \mathrm{cond}(A_\varepsilon) \cdot \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} \quad \text{[pour toute norme]}$$

pour $\|\cdot\|_1$ $\quad \|\Delta x\|_1 = 2 \quad \|x\|_1 = 2$

$\|\Delta b\|_1 = \varepsilon \quad \|b\|_1 = 4$

donc $\quad \dfrac{2}{2} \leq \mathrm{cond}_1(A_\varepsilon) \dfrac{\varepsilon}{4}$

$$\Rightarrow \mathrm{cond}_1(A_\varepsilon) \geq \frac{4}{\varepsilon}.$$

On peut calculer la valeur exacte de $\mathrm{cond}_1(A_\varepsilon)$

$$\mathrm{cond}_1(A_\varepsilon) = |||A_\varepsilon|||_1 \cdot |||A_\varepsilon^{-1}|||_1$$

par le 2.4 $\quad |||A_\varepsilon|||_1 = \max_j \sum_i |A_{ij}| = 2 + \varepsilon$

$$A_\varepsilon^{-1} = \frac{1}{\varepsilon}\begin{bmatrix} 1+\varepsilon & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad |||A_\varepsilon^{-1}|||_1 = \frac{1}{\varepsilon}(2+\varepsilon)$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix}$$

et donc $cond_1(A_\varepsilon) = |||A_\varepsilon|||_1 \, |||A_\varepsilon^{-1}|||_1$

$$= \frac{(2+\varepsilon)^2}{\varepsilon}$$

qui est $\geq$ et proche de $4/\varepsilon$

On peut aussi calculer $cond_2(A_\varepsilon) = \dfrac{|\lambda_{max}(A_\varepsilon)|}{|\lambda_{min}(A_\varepsilon)|}$ d'après 2.5 (b).

Exo 3.1

Décomposition LU et CHOLESKY

* $A = LU$ avec L triangulaire inférieure avec des 1 sur la diagonale
  U triangulaire supérieure

La décomposition LU existe $\Leftrightarrow$ les sous-matrices principales $A^{(k)} = (A_{ij})_{1 \leq i,j \leq k}$ sont inversibles.

* La décomposition de CHOLESKY est $A = LL^t$ avec L triangulaire inférieure avec $L_{ii} > 0$

Elle existe (et est unique) ssi A est définie positive (= symétrique, à v.p. > 0)

1 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ A admet une décomposition de CHOLESKY VRAI

$\Updownarrow$

A définie positive i.e. – symétrique ✓
– à v.p. > 0 ✓

Rq pour une matrice 2x2 symétrique

· à vp > 0 $\Leftrightarrow$ $tr > 0$, $dét > 0$

$tr\, A = 3$
$dét\, A = 1$

2 $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ B symétrique définie positive FAUX

NON

3 B admet une décomposition LU ? VRAI

③ B admet une décomposition LU ? ~~NON~~ VRAI

C'est le cas ssi les sous-matrices principales

$$B^{[1]} = (1) \checkmark \quad B^{[2]} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B^{[3]} = B$$

sont inversibles.

$$\det(B^{[2]}) = 1 \checkmark$$

$$\det(B^{[3]}) = 3 \det(B^{[2]})$$

en développant par rapport à la dernière colonne

Calcul de la décomposition LU

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_1 & 1 & 0 \\ l_2 & l_3 & 1 \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} u_1 & u_4 & u_5 \\ 0 & u_2 & u_6 \\ 0 & 0 & u_3 \end{pmatrix}$$

on calcule alternativement les lignes de U et les colonnes de L

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} U$$

$$L \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} B$$

① ligne 1 de U
② colonne 1 de L
③ ligne 2 de U.
④ colonne 2 de L
⑤ ligne 3 de U

④ $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ s'écrit de la forme C^tC $\qquad (C^tC)^t = C^t C^{tt} = C^tC$

FAUX car toute matrice de la forme C^tC est symétrique.

⑤ $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ admet une déc. de CHOLESKI $A = C^tC$

avec $C = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ FAUX

$$C^tC = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \qquad C^tC = A$$

Cependant ce n'est pas la décomposition de CHOLESKI pour laquelle on demande $c_{ii} > 0$

La décomposition de CHOLESKI de A est $A = (-C)^t(-C)$.

$A = LL^t$ avec $L = (-C)^t$ qui est bien triangulaire inférieure.

⑥ $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad D^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(a) DD^t admet une déc. de CHOLESKI FAUX $\quad DD^t$ matrice 3x3

(b) D^tD ... VRAI $\quad D^tD$ matrice 2x2

(a) DD^t admet une déc. de CHOLESKI FAUX DD matrice 3x3
(b) D^tD ———————— VRAI D^tD matrice 2x2

a) $rg(D) \leq 2 \Rightarrow rg(DD^t) \leq 2$ et 0 est donc v.p. de DD^t qui ne peut donc pas être définie positive

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

b) $D^tD = ?$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \leftarrow$ matrice 2x2 symétrique à trace et déterminant >0, donc définie positive.

Calculons la décomposition de CHOLESKI de D^tD

on veut $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = LL^t$ avec $L = \begin{pmatrix} l_1 & 0 \\ l_2 & l_3 \end{pmatrix}$ $l_1 > 0$, $l_3 > 0$

$L^t \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} \end{pmatrix}$

$L \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \sqrt{\frac{3}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

1 $l_1^2 = 2$ (position 1,1)
$\Rightarrow l_1 = \sqrt{2}$

2 $\sqrt{2}\, l_2 = 1$ (position 1,2 ou 2,1)
$\Rightarrow l_2 = 1/\sqrt{2}$

3 $\frac{1}{2} + l_3^2 = 2$ (position 2,2)
$l_3^2 = \frac{3}{2}$

3.2

1) LU pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 \\ & & & 1 \end{pmatrix}$ $U = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & \\ & & & \end{pmatrix}$

$U \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

$L \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

avec la 1re ligne de A
2ème ligne de A
1 3 5
2 4 6
2ème colonne de A
avec la 1ère colonne de A

2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$A^{[1]} = (1)$ est inversible
$A^{[2]} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible

$\Rightarrow$ pas de décomposition LU

inversible

$\Rightarrow$ pas de décomposition LU
(l'algorithme LU ne fonctionne pas).

Mais on peut permuter les lignes de A en $(L_2 \leftrightarrow L_3)$

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = Id$$

En fait $A^2 = Id$ $\quad PA = Id$ avec $P = A$ la matrice de la permutation $1 \to 1$ $2 \to 3$ $3 \to 2$

A n'a pas de décomposition LU

$PA = Id$ a une décomposition LU avec $L = U = I_n$.

3) A chercher

3.3

A_n = matrice $n \times n$

$$A_n = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & 3 \cdots & 3 \\ 1 & 2 & 3 \cdots & n \end{bmatrix}$$

$(A_n)_{ij} = \min(i, j)$

1 Mq $\det(A_n) = 1$

Sonstrayons L_1 à toutes les autres lignes

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & 3 & \cdots & 3 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 1 & 2 & 3 & n-1 \end{vmatrix}$$

A_{n-1} !

puis on développe par rapport à la 1ère colonne

On obtient ainsi $\det(A_n) = \det(A_{n-1})$

et donc $\det(A_n) = 1$ pour tout n.

En particulier, A_n est inversible.

A chercher : déc. de CHOLESKI de A_n.