

3.3

$A_n =$ matrice $n \times n$ avec $(A_n)_{i,j} = \min(i,j)$

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix}$$

On avait montré que $\det(A_n) = 1 \quad \forall n$.

Critère de SYLVESTER

Soit M une matrice $n \times n$ symétrique

Alors M définie positive $\Leftrightarrow \forall k \in \{1, \dots, n\}$

$$\det(M^{(k)}) > 0$$

$$\text{où } M^{(k)} = (m_{ij})_{1 \leq i, j \leq k}$$

Ce critère s'applique ici puisque pour $1 \leq k \leq n$

$$(A_n)^{(k)} \text{ s'identifie } A_k, \text{ donc } \det((A_n)^{(k)}) = 1 > 0$$

$\Rightarrow A_n$ est définie positive, elle admet donc une décomposition de CHOLESKY

$$A_n = L L^t \text{ avec } L \text{ triangulaire inférieure, } l_{ii} > 0.$$

⚠ le critère analogue pour "positive" au lieu de "définie positive" ne marche pas

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ n'est pas positive}$$

$$\text{bien que } \det(M^{(1)}) = 0, \det(M^{(2)}) = 0$$

2 Calculer la déc. de CHOLESKY de A_1, A_2, A_3

$$A_1 = (1) = A_1 \cdot A_1^t$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 \\ l_{21} & l_{22} \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^t$$

$$\text{Ainsi } A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^t$$

$$\textcircled{1} l_{11}^2 = 1 \Rightarrow l_{11} = 1 \quad (\text{car } l_{ii} > 0)$$

$$\textcircled{2} a_{12} = 1 \cdot l_{21} + 0 \Rightarrow l_{21} = 1$$

$$\textcircled{3} 2 = a_{22} = 1^2 + l_{22}^2 \Rightarrow l_{22} = 1$$

$$\bullet A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} a_{11} &\Rightarrow l_{11} = 1 \\ a_{21} &\Rightarrow l_{21} = 1 \\ a_{31} &\Rightarrow l_{31} = 1 \\ a_{22} &\Rightarrow l_{22} = 1 \end{aligned}$$

$$L = \begin{pmatrix} l_{21} & l_{22} & l_{23} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} a_{31} \Rightarrow l_{31}=1 \\ a_{22} \Rightarrow l_{22}=1 \\ a_{32} \Rightarrow l_{32}=1 \\ a_{33} \Rightarrow l_{33}=1 \end{array}$$

(3) On peut conjecturer que $A_n = L_n L_n^t$
avec $L_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ $(L_n)_{ij} = \begin{cases} 1 & i \geq j \\ 0 & i < j \end{cases}$

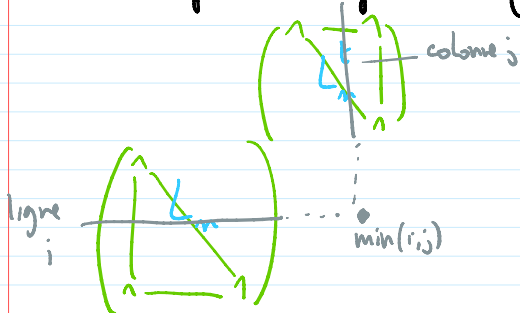
Vérifions cette formule $(L_n L_n^t)_{ij} = \sum_{k=1}^n (L_n)_{ik} (L_n^t)_{kj}$

$$= \sum_{k=1}^n (L_n)_{ik} (L_n)_{jk}$$

$$= \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{\{i \geq k\}} \mathbb{1}_{\{j \geq k\}}$$

$$= \sum_{k=1}^{\min(i,j)} 1$$

$$= \min(i,j) = A_{ij}$$



Feuille 4

(4.3) Résolution d'un système linéaire par la méthode LU

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 8 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 9 \\ 1 & 5 & 11 & 7 \\ 1 & 7 & 14 & 13 \end{pmatrix}$

Rappel : A admet une décomposition LU

$$\det(A^{(k)}) \neq 0$$

pour $k=1, \dots, n$

On calcule $A=LU$

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 8 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

On admet que c'est le bon (si ce n'est pas le cas, on aurait à diviser par 0)

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 8 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 9 \\ 1 & 5 & 11 & 7 \\ 1 & 7 & 14 & 13 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Autre méthode par l'algorithme de GAUSS. On fait le pivot de GAUSS en prenant toujours le 1^{er} pivot pour rendre A triangulaire supérieure. Les opérations sur les lignes qu'on fait donnent L

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 8 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 9 \\ 1 & 5 & 11 & 7 \\ 1 & 7 & 14 & 13 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} L'_2 \leftarrow L_2 - 0 L_1 \\ L'_3 \leftarrow L_3 - 1 L_1 \\ L'_4 \leftarrow L_4 - 1 L_1 \end{array} \quad \begin{array}{l} L_2 = L'_2 + 0 L_1 \\ L_3 = L'_3 + 1 L_1 \\ L_4 = L'_4 + 1 L_1 \end{array}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 5 & 8 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 2 & 6 & 13 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} L''_3 \leftarrow L'_3 - 0 L'_2 \\ L''_4 \leftarrow L'_4 - 1 L'_2 \end{array}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 5 & 8 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad L'''_4 \leftarrow L''_4 - 0 L'''_3$$

②

$$\det(A) = ?$$

$$\det(A) = \underbrace{\det(L)}_{=1} \underbrace{\det(U)}_{=1 \times 2 \times 3 \times 4} = 24$$

Rappel : pour une matrice triangulaire, $\det(A) = \prod a_{ii}$

③

$$\text{Résoudre } Ax=b \text{ pour } b_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} \quad b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad b_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 7 \\ 13 \end{pmatrix}$$

Comme A est inversible, il existe un unique x tel que $Ax=b$ ($x=A^{-1}b$)

Principe $Ax=b \Leftrightarrow LUx=b \Leftrightarrow \begin{cases} Ly=b \\ y=Ux \end{cases}$

Pour b_1 $Ly=b_1$ donne

$$\begin{cases} y_1 = 5 \\ y_2 = -7 \\ y_1 + y_3 = 1 \\ y_1 + y_2 + y_4 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = 5 \\ y_2 = -7 \\ y_3 = 1 - y_1 = -4 \\ y_4 = 6 - y_1 - y_2 = 8 \end{cases}$$

$Ux=y$ donne

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 8x_3 = 5 \\ 2x_2 + 6x_3 + 9x_4 = -7 \\ 3x_3 + 7x_4 = -4 \\ 4x_4 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 5 - 5x_2 - 8x_3 = 5 - \frac{55}{2} + 48 = \frac{51}{2} \\ 2x_2 = -7 - 6x_3 - 9x_4 = -7 + 36 - 18 \Rightarrow x_2 = \frac{11}{2} \\ 3x_3 = -4 - 7x_4 = -18 \Rightarrow x_3 = -6 \\ x_4 = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = \begin{pmatrix} \frac{51}{2} \\ \frac{11}{2} \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Ra on peut aussi calculer

$$A^{-1} = (LU)^{-1} = U^{-1}L^{-1}$$

ce qui permet ensuite de répondre aux 4 questions

Pour b_2 , même principe

on trouve

$$x = \begin{pmatrix} -\frac{73}{24} \\ -\frac{1}{8} \\ \frac{7}{12} \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Cherchez b_2 . On trouve $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. C'est a posteriori "évident"

Cherchez b_3 _{Ax}. On trouve $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. C'est a posteriori "évident" car b_3 est la première colonne de A

$b_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \\ 13 \end{pmatrix}$ est la 4^{ème} colonne de A donc $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est solution de $Ax = b_4$

Calcul pour b_3 *pour Vincent*

$$\begin{cases} Ly = b \\ y = Ux \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y_1 = 1 \\ y_2 = 0 \\ y_1 + y_3 = 1 \\ y_1 + y_2 + y_4 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = 1 \\ y_2 = 0 \\ y_3 = 0 \\ y_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 8x_3 = 1 \\ 2x_2 + 6x_3 + 9x_4 = 0 \\ 3x_3 + 7x_4 = 0 \\ 4x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

4.4 Décomposition UL

Peut-on écrire une matrice A comme

$$A = U \times L \quad ?$$

↑
triangulaire supérieure avec 1 sur la diagonale
↑
triangulaire inférieure

Idee: appliquer la décomposition LU à A^t

$$A^t = LU \Rightarrow A = (LU)^t = U^t L^t = L'U'$$

Ne marche pas; on obtient une variante de la décomposition LU où c'est U qui a des 1 sur la diagonale

Ne marche pas

Idee: on reprend le principe de la décomposition UL, en prenant à chaque étape le dernier pivot au lieu du premier

répond à la question 1

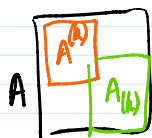
Exemple $A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 3 \\ 4 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A = UL$

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

① ④
② ⑤
③

② Rappel A admet une décomposition LU

② Rappel A admet une décomposition LU au sens du cours si $\det(A^{(k)}) \neq 0$ $k=1 \dots n$



Définissons $A_{(k)}$ comme la matrice $(A_{ij})_{k \leq i, j \leq n}$

Alors A admet une décomposition UL comme dans cet exercice

si $\det(A_{(k)}) \neq 0$ pour $k=1 \dots n$

Soit P la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $P e_i = e_{n+1-i}$

qui envoie $(e_1, \dots, e_n)$ sur $(e_n, \dots, e_1)$ $P^2 = Id$
 $P = P^{-1}$

Si $M = (m_{ij})$ $PMP^{-1} = (m_{n+1-i, n+1-j})$



La matrice PMP^{-1} s'obtient à partir de M par "symétrie centrale"

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad PMP^{-1} = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

L triangulaire inférieure $\Rightarrow$ PLP^{-1} triangulaire supérieure
 U triangulaire supérieure $\Rightarrow$ PUP^{-1} triangulaire inférieure

Si on calcule la décomposition LU de PAP^{-1}

$$PAP^{-1} = LU \quad \text{triang. sup, diag} = 1$$

$$\text{alors } A = PLUP^{-1} = (PLP^{-1})(PUP^{-1})$$

U' triangulaire sup, diag = 1
 L' triangulaire inf.

Le calcul effectué ci-dessus est l'algorithme LU usuel

$$\text{pour } PAP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

De même, comme $(PAP^{-1})^{(k)}$ et $A_{(k)}$ ont même déterminant, on a :

A admet une décomposition UL $\Leftrightarrow$ PAP^{-1} admet une décomposition LU

$$\Leftrightarrow \det((PAP^{-1})^{(k)}) \neq 0 \quad \forall k$$

$$\Leftrightarrow \det(A_{(k)}) \neq 0 \quad \forall k.$$

④.5 Résolution de systèmes par la méthode de CHOLESKY.

1) $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 10 & 7 \\ 2 & 7 & 7 \end{pmatrix}$ Mq A est symétrique

①

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 10 & 7 \\ 2 & 7 & 21 \end{pmatrix} \quad \text{Mq } A \text{ est symétrique définie positive}$$

- $A = A^t$ donc A est symétrique
- On va utiliser le critère de SYLVESTER et calculer $\det(A^{(1)})$ $\det(A^{(2)})$ $\det(A^{(3)})$

"définie positive" ou "positive" n'ont de sens que pour les matrices symétriques

$$\det(A^{(1)}) = 4 > 0$$

$$\det(A^{(2)}) = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 10 \end{vmatrix} = 4 \times 10 - 2 \times 2 = 36 > 0$$

$$\begin{aligned} \det(A^{(3)}) &= \begin{vmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 10 & 7 \\ 2 & 7 & 21 \end{vmatrix} = \underbrace{4 \times 10 \times 21} + \underbrace{2 \times 7 \times 2} + \underbrace{2 \times 7 \times 2} \\ &\quad - \underbrace{2 \times 10 \times 2} - \underbrace{2 \times 2 \times 21} - \underbrace{4 \times 7 \times 7} \\ &= 840 + 28 + 28 - 40 - 84 - 196 \\ &= 576 > 0 \end{aligned}$$

Ainsi, A est définie positive.

② Calculer la décomposition de CHOLESKY de A .

$$A = LL^t \quad \text{avec } l_{ii} > 0.$$

A chercher maintenant.

$$L = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad L^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$l_{11}^2 = 4 \Rightarrow l_{11} = 2$$

$$2l_{21} = 2 \Rightarrow l_{21} = 1$$

$$2l_{31} = 2 \Rightarrow l_{31} = 1$$

$$1 + l_{22}^2 = 10 \Rightarrow l_{22} = 3$$

$$1 + 3l_{32} = 7 \Rightarrow l_{32} = 2$$

$$1 + 4 + l_{33}^2 = 21$$

$$\Rightarrow l_{33} = 4$$

③ On résout $Ax = b$ avec le même principe que pour LU

$$b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 96 \end{pmatrix}$$

$$Ax = b \Leftrightarrow \underbrace{LL^t}_{y} x = b \Leftrightarrow \begin{cases} L^t x = y \\ Ly = b \end{cases}$$

On résout séparément les deux systèmes obtenus :

Remarque de $Ax = b$: on voit directement que $y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 24 \end{pmatrix}$ car 246 est la 3^{ème} colonne de L (+liste)

Remarque de Axel : on voit directement que $y = \begin{pmatrix} 0 \\ 24 \end{pmatrix}$ car 24 est la 3^{ème} colonne de L (+ lixe) + inverse

$$L^t x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 24 \end{pmatrix} \text{ donne } \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ 4x_3 = 24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 = -2 \Rightarrow x_1 = -1 \\ 3x_2 = -12 \Rightarrow x_2 = -4 \\ x_3 = 6 \end{cases}$$

d'où $x = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}$

Autre factorisation : la factorisation QR

Q comme "Orthogonal"

R comme "triangulaire supérieure"

Toute matrice A peut s'écrire comme $A = QR = (-Q)(-R)$
Si A est inversible, c'est unique si on demande $r_{ii} > 0$.

On peut obtenir la décomposition QR en appliquant l'algorithme de GRAM-SCHMIDT aux colonnes de A d'orthonormalisation

$(x_1, \dots, x_n)$ base de $\mathbb{R}^n$

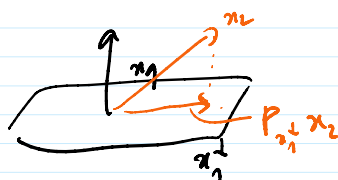
on l'orthonormalise en une base orthonormée

$(y_1, \dots, y_n)$

telle que $\text{vect}(x_1, \dots, x_k) = \text{vect}(y_1, \dots, y_k)$

En particulier y_1 est un multiple de x_1

$$y_1 = \pm \frac{x_1}{\|x_1\|_2}$$



$$y_2 = \frac{P_{x_1^\perp} x_2}{\|P_{x_1^\perp} x_2\|_2}$$

où $P_{x_1^\perp}$ est la projection orthogonale sur $\{z : z \perp x_1\}$.

Exemple $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $x_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $x_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

On orthonormalise la famille (x_1, x_2, x_3) pour obtenir (y_1, y_2, y_3) qui seront les colonnes de Q.

$$y_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|_2} = \frac{x_1}{\sqrt{2}} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

" et de la forme $\alpha x_1 + \beta x_2$ avec $\begin{cases} y_2 \perp y_1 \Leftrightarrow y_2 \perp x_1 \\ \dots \end{cases}$

$$0: \|x_1\|_2 \quad \text{v.c.} \quad \text{v.c.}$$

$$y_2 \text{ est de la forme } \alpha x_1 + \beta x_2 \text{ avec } \begin{cases} y_2 \perp y_1 \Leftrightarrow y_2 \perp x_1 \\ \|y_2\|_2 = 1 \end{cases}$$

$$\langle x_1, y_2 \rangle = 2\alpha + 2\beta \quad \begin{pmatrix} \alpha + 2\beta \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{donc } y_2 \perp y_1 \Leftrightarrow y_2 \perp x_1 \Leftrightarrow 2\alpha + 2\beta = 0 \Leftrightarrow \beta = -\alpha$$

$$\text{donc } y_2 = \begin{pmatrix} -\alpha \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \|y_2\|_2 = |\alpha|\sqrt{2}$$

$$\text{donc } \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Si on veut $r_{ii} > 0$, il faut choisir le signe tel que $\langle y_2, x_2 \rangle > 0$. Ici $\alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\text{d'où } y_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{Bran Lucie})$$

x_3
 y_3 est déjà orthogonal à y_1 et y_2 et de norme 1

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} R$$

$$Q \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A$$

①

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \sqrt{2}y_1 + \sqrt{2}y_2$$

↑
colonnes
de Q

③ $x_3 = y_3$

L'algorithme de GRAM-SCHMIDT est instable numériquement car on divise par la norme en ortho-normalisant peut être tout petit.

En pratique on lui préfère l'algorithme de HOUSEHOLDER (exo 4.7).