TD du 29 mars

lundi 29 mars 2021 13:55

• METHODE DE HOUSEHOLDER

pour obtenir la décomposition $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{orthogonale}}}{Q}\underset{\substack{\uparrow \\ \text{triangulaire supérieure}}}{R}$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Principe : on va obtenir Q comme produit de symétries

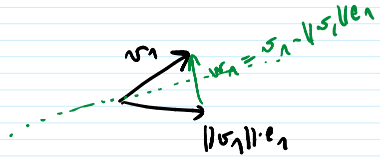
On trouve une symétrie qui envoie v_1 [1ère colonne de A]

sur $\|v_1\| \cdot e_1$.

norme $\|\cdot\|_2$

Cette symétrie est donnée par $H_1 = Id - 2\dfrac{w_1 w_1^T}{\|w_1\|^2}$

où $w_1 = v_1 - \|v_1\| e_1$



$$H_1(w_1) = w_1 - \frac{2 w_1 w_1^T w_1}{\|w_1\|^2}$$

$w_1^T w_1 = \|w_1\|^2$

$x^T y = \langle x, y \rangle$

$$= w_1 - 2w_1$$
$$= -w_1$$

puis on itère sur les sous-matrices en bas à droite

Ici $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\|v_1\| = 1$. On cherche H_1 qui envoie v_1 sur $1 \cdot e_1 = e_1$

Si $w_1 = v_1 - e_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, H_1 est donnée par

$$H_1 = Id - \frac{2 w_1 w_1^T}{2} = Id - \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On pose $A_1 = H_1 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & \boxed{0} \\ 0 & \boxed{1} & \boxed{1} \end{pmatrix}$

$$\begin{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

On applique le même principe à

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ 1ère colonne $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\|v_2\| = \sqrt{2}$

on envoie v_2 sur $\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ par

(on considérera plutôt $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & & \\ 0 & & H_2 \end{pmatrix}$) la symétrie $H_2 = Id - \dfrac{2 w_2 w_2^T}{\|w_2\|^2}$ où $w_2 = v_2 - \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 - \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

$$H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{\cancel{2}^{\,1}}{\cancel{4 - 2\sqrt{2}}_{\,2-\sqrt{2}}} \begin{pmatrix} 3 - 2\sqrt{2} & 1 - \sqrt{2} \\ 1 - \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$\|w_2\|^2 = (1 - \sqrt{2})^2 + 1 = 4 - 2\sqrt{2}$

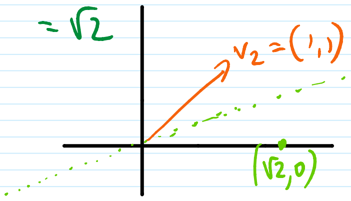
$$= \frac{1}{2 - \sqrt{2}} \begin{pmatrix} 2 - \sqrt{2} - (3 - 2\sqrt{2}) & -[1 - \sqrt{2}] \\ -[1 - \sqrt{2}] & 2 - \sqrt{2} - 1 \end{pmatrix}$$

$(2 - \sqrt{2})(2 + \sqrt{2}) = 4 - 2 = 2$

$$= \frac{1}{2 - \sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} - 1 & \sqrt{2} - 1 \\ \sqrt{2} - 1 & 1 - \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$(2 + \sqrt{2})(\sqrt{2} - 1)$
$= 2\sqrt{2} + 2 - 2 - \sqrt{2}$

$(2+\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)$
$= 2\sqrt{2}+2-2-\sqrt{2}$
$= \sqrt{2}$



$$= \frac{1}{2-\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \sqrt{2}-1 & \sqrt{2}-1 \\ \sqrt{2}-1 & 1-\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{2+\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2}-1 & \sqrt{2}-1 \\ \sqrt{2}-1 & 1-\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et $H_2 A_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ $\qquad \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad H_1 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \tilde{H}_2 H_1 A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 0 & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}}_{\text{le } R \text{ de la décomposition } QR}$$

$$\tilde{H}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & & \\ 0 & H_2 & \end{pmatrix}$$

Comme H_1 et $\tilde{H}_2$ sont leur propre inverse,

on a $\quad A = \underbrace{H_1 \tilde{H}_2}_{Q} R$

et $\quad Q = H_1 \tilde{H}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$$

<u>Exemple 2</u> $\qquad A = \begin{pmatrix} 12 & -51 & 4 \\ 6 & 167 & -68 \\ -4 & 24 & -41 \end{pmatrix}$

$$H_1 = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 6 & 3 & -2 \\ 3 & -2 & 6 \\ -2 & 6 & 3 \end{bmatrix} \qquad H_1 A = \begin{bmatrix} 14 & 21 & -14 \\ 0 & -49 & -14 \\ 0 & 168 & -77 \end{bmatrix}$$

$$= 7\begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 0 & -7 & -2 \\ 0 & 24 & -11 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{H}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{7}{25} & \frac{24}{25} \\ 0 & \frac{24}{25} & \frac{7}{25} \end{bmatrix} \qquad R = \tilde{H}_2 H_1 A = \begin{bmatrix} 14 & 21 & -14 \\ 0 & 175 & -70 \\ 0 & 0 & -35 \end{bmatrix}$$

et $Q = (\tilde{H}_2 H_1)^{-1} = H_1 \tilde{H}_2 = \begin{bmatrix} \frac{6}{7} & -\frac{69}{175} & \frac{58}{175} \\ 3/7 & \frac{158}{175} & -\frac{6}{175} \\ -2/7 & \frac{30}{175} & \frac{165}{175} \end{bmatrix}$

Pour une symétrie (matrice de HOUSEHOLDER) $\quad H = H^{-1} = H^T$

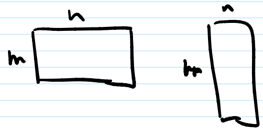
$\left[-\frac{2}{7} \quad \frac{30}{175} \quad \frac{165}{175} \right]$

Pour une symétrie (matrice de HOUSEHOLDER) $H = H^{-1} = H^T$

Pour une matrice orthogonale $Q^{-1} = Q^T$

5.1 Résolution "aux moindres carrés"

A matrice $\in M_{m,n}$



On veut résoudre $Ax = b$, ou quand il n'y a pas de solution, trouver x qui minimise $\|Ax-b\|$

$$\inf_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_2 \quad (*)$$

Ce problème $(*)$ a toujours des solutions (l'inf est toujours atteint)

et x est un minimum de $(*)$

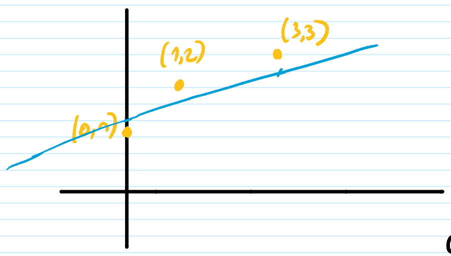
$$\Leftrightarrow \quad A^t A x = A^t b \quad \text{(équation normale)}$$

Parmi toutes les solutions de l'équation normale, $x = A^+ b$ est celle de plus petite norme

↑ pseudo-inverse, obtenu en changeant les valeurs singulières $\neq 0$ en leur inverse dans la SVD.

5.1

On cherche la droite qui passe le plus près (au sens des moindres carrés) des points $\binom{0}{1}$ $\binom{1}{2}$ $\binom{3}{3}$



points non alignés

On cherche une droite d'équation $y = ax + b$

La droite passe par les 3 points $\Leftrightarrow \begin{cases} 1 = b \\ 2 = a + b \\ 3 = 3a + b \end{cases}$ C'est un système linéaire d'inconnues a, b sans solutions

Ce système se réécrit

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}} \underbrace{\boxed{\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}}}_{\vec{x}} = \underbrace{\boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}}}_{\vec{b}}$$

qui est bien de la forme du cours $(Ax = b)$

Résoudre ce système "au sens des moindres carrés", c'est chercher a, b (ou $\vec{x} = \binom{a}{b}$) qui minimisent $\|A\vec{x} - \vec{b}\|_2$.

Pour cela, on peut résoudre l'équation normale $A^t A \vec{x} = A^t \vec{b}$.

$\|Ax - b\|_2$.

Pour cela, on peut résoudre l'équation normale $A^tA\vec{x} = A^t\vec{b}$.

$A^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad A^tA = \begin{pmatrix} 10 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad A^t\vec{b} = \begin{pmatrix} 11 \\ 6 \end{pmatrix}$

L'équation normale est $A^tA\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 6 \end{pmatrix}$

soit $\begin{cases} 10a + 4b = 11 & L_1 \\ 4a + 3b = 6 & L_2 \end{cases}$

$3L_1 - 4L_2$ donne $14a = 9$

d'où $a = \frac{9}{14}$,

puis $3b = 6 - 4a = 6 - \frac{18}{7} = \frac{24}{7}$

$\Rightarrow b = 8/7$

d'où la solution :

$y = \frac{9}{14}x + \frac{8}{7}$ est la solution aux moindres carrés.

5.2 Approximation polynomiale aux moindres carrés

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad t_1, \dots t_n \in \mathbb{R}$ $\quad , d \in \mathbb{N}$ fixés

Problème : parmi tous les polynômes $P \in \mathbb{R}_d[X]$, on cherche à minimiser

$$(*) \quad \left\| \begin{pmatrix} f(t_1) \\ \vdots \\ f(t_n) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} P(t_1) \\ \vdots \\ P(t_n) \end{pmatrix} \right\|_2$$

← norme $\|\cdot\|_2$ dans $\mathbb{R}^n$

Rappel : étant donnés $t_1 \dots t_n$ distincts $y_1 \dots y_n$, il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $P(t_i) = y_i$ pour $i = 1 \dots n$: c'est le polynôme interpolateur de LAGRANGE

$$P(X) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\prod_{j \neq i} (X - t_j)}{\prod_{j \neq i} (t_i - t_j)} \cdot y_i$$

(pour l'unicité, on remarque que si P et Q sont des solutions, le polynôme $P - Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ a n racines distinctes, donc $= 0$)

$$P(t_k) = \sum_i \underbrace{\frac{\prod_{j \neq i} (t_k - t_j)}{\prod_{j \neq i} (t_i - t_j)}}_{\substack{= 0 \text{ si } k \neq i \\ = 1 \text{ si } k = i}} y_i = y_k$$

Si $d < n-1$, il n'y a pas de solution à $(*)$ en général et on peut alors le résoudre au sens des moindres carrés.

Ecrivons le problème sous la forme "$Ax = b$" du cours.

Un polynôme de $\mathbb{R}_d[X]$ s'écrit

$a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \dots + a_d X^d$

Un polynôme de $\mathbb{R}_d[X]$ s'écrit

$$a_0 + a_1 X + a_1 X^2 + \dots + a_d X^d$$

(*) devient minimiser $\|(y_i - P(t_i))_{1 \leq i \leq n}\|$

$(y_i = f(t_i))$

$$= \|(a_0 + t_i a_1 + t_i^2 a_2 + \dots + t_i^d a_d - y_i)_{1\leq i \leq n}\|$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{d+1} \qquad = \|A\vec{x} - \vec{b}\|$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 & \cdots & t_1^d \\ 1 & t_2 & t_2^2 & \cdots & t_2^d \\ \vdots & & & & \\ 1 & t_n & t_n^2 & \cdots & t_n^d \end{pmatrix}}_{d+1 \text{ colonnes}} \; n \text{ lignes}$$

Résolvons ce problème pour $d=0$ ou $d=1$

$\underline{d=0}$ $\quad A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad$ l'équation normale est $A^tA\vec{x} = A^t\vec{b}$

$\vec{x} = (a_0)$

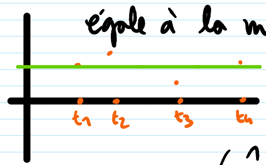
$$A^tA = n \qquad A^t\vec{b} = \sum_{i=1}^n y_i$$

matrice 1×1

et l'équation normale est $n a_0 = \sum_{i=1}^n y_i$

et la solution est $a_0 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n y_i$

Conclusion : la meilleure approximation par une fonction constante est l'approximation par la fonction constante égale à la moyenne des valeurs.



$$A^tA\vec{x} = A^t\vec{b}$$

$\underline{d=1}$ $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & t_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & t_n \end{pmatrix}$ $\quad$ Ecrivons l'équation normale

$$A^tA = \begin{pmatrix} n & \sum t_i \\ \sum t_i & \sum t_i^2 \end{pmatrix} \qquad A^t\vec{b} = \begin{pmatrix} \sum y_i \\ \sum t_i y_i \end{pmatrix}$$

L'équation normale admet toujours une solution, elle admet une unique solution si A^tA est inversible

$$\det(A^tA) = n\sum t_i^2 - \left(\sum t_i\right)^2 \geq 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\left(\sum t_i\right)^2 \leq n \sum t_i^2$$

$$\Updownarrow$$

$$\sum t_i \leq \sqrt{n}\left(\sum t_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\sum t_i = \sum t_i \cdot 1 \leq \sqrt{\sum t_i^2}\sqrt{\sum 1}$$

CAUCHY-SCHWARZ

Le calcul ci-contre montre que $\det(A^tA) \geq 0$ avec égalité si et seulement si les vecteurs $(t_1 \dots t_n)$ et $(1 \dots 1)$

si et seulement si les vecteurs
$(t_1 \dots t_n)$ et $(1 \dots 1)$
sont colinéaires, c'est-à-dire si
$t_1 = t_2 = \dots = t_n$

$\sum t_i = \sum t_i \cdot 1 \leq \sqrt{\sum t_i^2}\sqrt{\sum 1}$ CAUCHY-SCHWARZ

Conclusion : à part le cas où les t_i sont tous égaux, l'équation normale admet une unique solution

$$\underbrace{\begin{pmatrix} n & \sum t_i \\ \sum t_i & \sum t_i^2 \end{pmatrix}}_{A^tA} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum y_i \\ \sum t_i y_i \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix}$$

$$(A^tA)^{-1} = \frac{1}{n\sum t_i^2 - (\sum t_i)^2}\begin{pmatrix} \sum t_i^2 & -\sum t_i \\ -\sum t_i & n \end{pmatrix}$$

d'où $$a_0 = \frac{\sum t_i^2 \sum y_i - \sum t_i \sum t_i y_i}{n\sum t_i^2 - (\sum t_i)^2}$$

$$a_1 = \frac{n\sum t_i y_i - (\sum t_i)(\sum y_i)}{n\sum t_i^2 - (\sum t_i)^2}$$

- Exemple en degré ≥ 2 : trouver le polynôme de degré 2 qui approxime le mieux la fonction $x \longmapsto |x|$ sur l'ensemble $\{-2,-1,0,1,2\}$.

On cherche un polynôme de la forme
$$P(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2$$
3 inconnues

qui soit solution de $$\begin{cases} P(-2) = 2 \\ P(-1) = 1 \\ P(0) = 0 \\ P(1) = 1 \\ P(2) = 2 \end{cases}$$ ← 5 équations

Si on pose $\vec{x} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$,

ce système se réécrit $A\vec{x} = \vec{b}$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

on résout l'équation normale associée $A^tA\vec{x} = A^t\vec{b}$

A^tA ?

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 0 \\ 10 & 0 & 34 \end{pmatrix}$$

$A^t b = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 18 \end{pmatrix}$ et le système devient

$$\begin{cases} 5a_0 \quad\quad + 10a_2 = 6 \\ \quad\quad 10a_1 \quad\quad = 0 \\ 10a_0 \quad\quad + 34a_2 = 18 \end{cases} \longrightarrow a_1 = 0$$

$L_3 - 2L_1$ donne $14a_2 = 6 \rightarrow a_2 = \frac{3}{7}$

puis $5a_0 = 6 - 10a_2$

$= 6 - \frac{30}{7} = \frac{12}{7}$

$\rightarrow a_0 = \frac{12}{35}$

Conclusion : le trinôme qui approxime le mieux la fonction $|\cdot|$ sur $\{-2,-1,0,1,2\}$ est

$$\frac{3}{7}x^2 + \frac{12}{35}.$$

3. A quelle condition est-ce que A^*A est inversible

$\Leftrightarrow$ A quelle condition a-t-on un unique minimiseur de $\|(f(t_i) - P(t_i))\|$

(on suppose t_i distincts)

- Si $d = n-1$, il y a un unique minimiseur qui est solution exacte du problème (l'infimum vaut 0) et correspond au polynôme interpolateur de Lagrange

  $\Leftrightarrow A^tA$ est inversible

- Si $d > n-1$, il y a plusieurs solutions exactes (on peut rajouter arbitrairement $d-(n-1)$ autres conditions et se ramener au cas précédent)

  $\Rightarrow$ la matrice A^tA n'est pas inversible

- Si $d = n-1$, on peut donner un autre argument :

  A est carrée

  $\det(A^tA) = \det(A)^2$

  $$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & t_1 & \cdots & t_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \\ 1 & t_n & \cdots & t_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{i<j} (t_j - t_i) \neq 0$$

  on reconnaît un déterminant de Vandermonde

- Si $d < n-1$

  A^tA inversible $\Leftrightarrow \ker A = \{0\}$

  $$A = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & \cdots & t_1^d \\ \vdots & & \\ \end{matrix}} \\ \vdots \\ 1 \cdots t_n^d \end{bmatrix}$$

  Soit B la sous-matrice principale $d \times d$.

  B est inversible (c'est une matrice de Vandermonde)

  donc $\ker B = \{0\}$

matrice de Vandermonde)

donc $\ker B = \{0\}$

et $\ker A \subset \ker B$

donc $\ker A = \{0\}$.

Si $Ax = \begin{pmatrix} \left.\begin{matrix} 0 \\ \vdots \end{matrix}\right\} Bx \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

alors $Bx = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$