TD du 12 avril

lundi 12 avril 2021 13:59

Méthodes itératives

pour résoudre un système $\underset{\substack{\text{matrice carrée}\\ \text{inversible}\\ n\times n}}{A}\,\overset{\in\mathbb{R}^n,\ \text{inconnu}}{x} = \underset{\in\mathbb{R}^n}{b}$

$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\text{connus}}$

Idée : écrire $A = M - N$ avec M facilement inversible

$Ax = b$ devient $(M-N)x = b$

$$Mx = Nx + b$$

$$x = \underbrace{M^{-1}N}_{B}x + \underbrace{M^{-1}b}_{c}$$

$B = M^{-1}N$

x vérifie $x = Bx + c$

On peut définir une suite (x_k)

x_0 quelconque $x_{k+1} = Bx_k + c$

Si $\rho(B) < 1$, la suite (x_k) converge vers l'unique solution de $Ax = b$

$\rho(B)$: rayon spectral = max. du module des v.p.

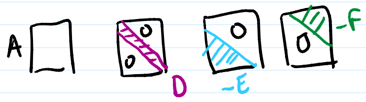
Différentes méthodes pour écrire $A = M - N$

On écrit $A = D - E - F$

D : partie diagonale

$-E$: partie triangulaire inf. stricte

$-F$: partie triangulaire sup. stricte



- Méthode de JACOBI $M = D$ $N = E + F$

  $B = M^{-1}N = D^{-1}(E+F)$

- Méthode de GAUSS-SEIDEL $M = \underbrace{D - E}_{\substack{\text{triangulaire inf.}\\ \text{au sens large}}}$ $N = F$

  $B = M^{-1}N = (D-E)^{-1}F$

Dans ces deux méthodes, la matrice M est inversible si et seulement si $A_{ii} \neq 0$ pour tout i, hypothèse que l'on fera toujours.

4.8 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

Soit J la matrice de JACOBI $(= D^{-1}(E+F))$ pour la matrice A. Pour voir si la méthode converge, il faut calculer $\rho(J)$.

$A = D - E - F$ $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $-E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ $-F = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$J = D^{-1}(E+F) = E + F = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

On calcule le polynôme caractéristique

$$\det(J-\lambda I_d) = \begin{vmatrix} -\lambda & -2 & 2 \\ -1 & -\lambda & -1 \\ -2 & -2 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 - 4 + 4 - \left[-2\lambda + 4\lambda - 2\lambda\right]$$
$$= -\lambda^3$$

Ainsi la seule valeur propre de J est $0 \Rightarrow \rho(J) = 0$ et la méthode de JACOBI est donc convergente.

Remarque : comme $J^3 = 0$, la suite (x_k) définie par $x_{k+1} = Jx_k + c$ est en fait stationnaire ($x_{k+1} = x_k$ $\forall k \geq 3$).
Ceci est spécifique au cas $\rho = 0$.

Soit G la matrice de GAUSS-SEIDEL ($= (D-E)^{-1}F$) pour A. Pour voir si la méthode converge, il faut calculer $\rho(G)$.

$D-E = I_3 - E$. Pour calculer $(D-E)^{-1}$, on peut résoudre le système $(D-E)x = y$ $\left[x = (D-E)^{-1}y\right]$ (rapide car triangulaire)

$E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ est nilpotente ($E^3 = 0$)

Rq : $(I-E)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} E^k$ valable si $|||E||| < 1$

donc $(I-E)^{-1} = I + E + E^2$
$$= \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} & & \\ -1 & & \\ -2 & -2 & \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ 2 & & \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Méthode "classique" : on résout $(D-E)x = y$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = y_1 \\ x_1 + x_2 = y_2 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = y_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 \\ x_2 = -y_1 + y_2 \\ x_3 = -2y_2 + y_3 \end{cases}$$

$$x_3 = y_3 - 2x_1 - 2x_2$$
$$= y_3 - 2y_1 - 2(-y_1 + y_2)$$
$$= -2y_2 + y_3$$

d'où $(D-E)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

$$G = (D-E)^{-1}F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Comme G est triangulaire supérieure, ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux : $0, 2, 2$. Ainsi $\rho(G) = 2 > 1$ et la méthode de GAUSS-SEIDEL diverge.

- Soient J et G les matrices de JACOBI et GAUSS-SEIDEL diverge.

- Soient J et G les matrices de JACOBI et GAUSS-SEIDEL associées à $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

$B = D - E - F \qquad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad -E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

$-F = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- $J = D^{-1}(E+F) = \frac{1}{2}(E+F) \qquad E+F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & -1/2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$

Le polynôme caractéristique de J est

$\det(J - \lambda Id) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1/2 & -1/2 \\ -1 & -\lambda & -1 \\ 1/2 & 1/2 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \left[\frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4}\right]$

(SARRUS)

$= -\lambda^3 - \frac{5}{4}\lambda$

$= -\lambda(\lambda^2 + \frac{5}{4})$

J v.p. 0 $i\frac{\sqrt{5}}{2}$ $-i\frac{\sqrt{5}}{2}$
leurs modules sont
0 $\frac{\sqrt{5}}{2}$ $\frac{\sqrt{5}}{2}$

Les valeurs propres de J sont donc $0, i\frac{\sqrt{5}}{2}$ et $-i\frac{\sqrt{5}}{2}$.

$\varrho(J)$ = module maximum d'une v.p.

On a donc $\varrho(J) = \sqrt{5}/2 \geqslant 1$ et la méthode de JACOBI diverge.

- $G = (D-E)^{-1}F$. Calculons $(D-E)^{-1}$ en résolvant le système linéaire $(D-E)x = y$

$(D-E)x = y \iff \begin{cases} 2x_1 = y_1 \\ 2x_1 + 2x_2 = y_2 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 = y_3 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}y_1 \\ 2x_2 = y_2 - y_1 \Rightarrow x_2 = -\frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2 \\ 2x_3 = y_3 + x_1 + x_2 = y_3 + \frac{1}{2}y_2 \end{cases} \Rightarrow x_3 = \frac{1}{4}y_2 + \frac{1}{2}y_3$

ce qui donne $(D-E)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

On a donc $G = (D-E)^{-1}F = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Comme G est triangulaire, ses v.p. sont ses coefficients diagonaux :
$0, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$ et donc $\varrho(G) = \frac{1}{2} < 1$
et la méthode de GAUSS-SEIDEL converge.

On a vu deux exemples :

pour A, JACOBI converge et GAUSS-SEIDEL diverge
pour B, GAUSS-SEIDEL converge et JACOBI diverge.

pour A, JACOBI converge et GAUSS-SEIDEL diverge
pour B, GAUSS-SEIDEL converge et JACOBI diverge.

4.9 1

$$A=\begin{pmatrix}1&a&a\\a&1&a\\a&a&1\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}a&a&a\\a&a&a\\a&a&a\end{pmatrix}}_{B}+(1-a)I_3$$

Calculons d'abord les v.p. de B

B est de rang 1 (ses colonnes sont identiques)
donc ses valeurs propres sont $0, 0$ et λ (inconnu).

$$\boxed{\begin{array}{l}rg(B)=1\\ \Rightarrow \dim \ker(B)=2\end{array}}$$
(FORMULE DU RANG)

$tr(B)=0+0+\lambda=\lambda$, $tr(B)=3a$ donc $\lambda=3a$

Les valeurs propres de A sont donc $1-a$, $1-a$ et $3a+1-a$
$=1+2a$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Si } \lambda_1\dots\lambda_n \text{ sont les v.p.}\\ \text{de } A \text{, les v.p. de}\\ A+\mu I \text{ sont } \lambda_1+\mu,\dots,\lambda_n+\mu\end{array}}$$

2 A est symétrique. Elle est définie positive si et seulement si ses v.p sont >0.

D'après la question 1, la condition est $\begin{cases}1-a>0\\ \text{et}\\ 1+2a>0\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}a<1\\ a>-\frac{1}{2}\end{cases}$$

Ainsi,
A est définie positive $\Leftrightarrow$ $a\in\left]-\frac{1}{2},1\right[$.

3 Soit J la matrice de la méthode de JACOBI

$A=D-E-F$ avec $D=I_3$

$$-E=\begin{pmatrix}0&0&0\\a&0&0\\a&a&0\end{pmatrix}\quad -F=\begin{pmatrix}0&a&a\\0&0&a\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$J=D^{-1}(E+F)=\begin{pmatrix}0&-a&-a\\-a&0&-a\\-a&-a&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-a&-a&-a\\-a&-a&-a\\-a&-a&-a\end{pmatrix}+aI_3$$

v.p. $0, 0, -3a$
(cf question 1)

et donc les v.p. de J sont a, a et $-2a$.
les modules des v.p. sont $|a|$ et $2|a|$, donc $\rho(J)=2|a|$

et donc les v.p. de J sont a, a et $-2a$.
Les modules des v.p. sont $|a|$ et $2|a|$, donc $\rho(J) = 2|a|$

Ainsi, la méthode de JACOBI converge $\Leftrightarrow |a| < \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow a \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$.

(4) Soit $\mathcal{L}$ la matrice de GAUSS-SEIDEL

$\mathcal{L}_1 = (D-E)^{-1} F \qquad D-E = I-E$

comme $E^3 = 0$, on a $(I-E)^{-1} = I + E + E^2$

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -a & 0 & 0 \\ -a & -a & 0 \end{pmatrix} \quad E^2 = \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ a^2 & 0 & \end{pmatrix}$$

donc $(I-E)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 \\ a^2-a & -a & 1 \end{pmatrix}$

$$\mathcal{L}_1 = (D-E)^{-1} F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 \\ a^2-a & -a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -a & -a \\ 0 & 0 & -a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -a & -a \\ 0 & a^2 & a^2-a \\ 0 & -a^3+a^2 & -a^3+2a^2 \end{pmatrix}$$

(5) Soit $a \geqslant 0$. Calculons $\rho(\mathcal{L}_1)$

$$\det(\mathcal{L}_1 - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} -\lambda & -a & -a \\ 0 & a^2-\lambda & a^2-a \\ 0 & -a^3+a^2 & -a^3+2a^2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -\lambda \begin{vmatrix} a^2-\lambda & a^2-a \\ -a^3+a^2 & -a^3+2a^2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -\lambda \left[(a^2-\lambda)(-a^3+2a^2-\lambda) - (a^2-a)(-a^3+a^2) \right]$$

$$= -\lambda \left[\lambda^2 - \lambda\left[a^2 - a^3 + 2a^2\right] - a^5 + 2a^4 + a^5 - a^4 - a^4 + a^3 \right]$$

$$= -\lambda \left[\lambda^2 + (a^3 - 3a^2)\lambda + a^3 \right]$$

produit des v.p.

le discriminant est $\Delta = (a^3 - 3a^2)^2 - 4a^3$

$$= a^4(a-3)^2 - 4a^3$$
$$= a^3\left[a(a-3)^2 - 4\right]$$
$$= a^3\left[a^3 - 6a^2 + 9a - 4\right]$$ car 1 est racine évidente
$$= \underbrace{a^3}_{\geq 0}\,\underbrace{(a-1)^2}_{\geq 0}(a-4)$$

Ainsi Δ est du signe de $a-4$

- Si $a \geq 1$, le produit des v.p. non nulles de $\mathcal{L}_1$ sont $a^3 \geq 1$, donc les produit des modules est ≥ 1 et au moins une v.p. a un module ≥ 1
  donc $\rho(\mathcal{L}_1) \geq 1$ et la méthode diverge

- Si $0 \leq a < 1$, $\Delta < 0$ et les valeurs propres $\neq 0$ de $\mathcal{L}_1$ sont complexes conjuguées λ_1 et λ_2.
  On a donc $|\lambda_1| = |\lambda_2|$. Comme $\lambda_1\lambda_2 = a^3 < 1$
  on a donc $|\lambda_1| = |\lambda_2| < 1$
  Dans ce cas, $\rho(\mathcal{L}_1) < 1$ et la méthode de GAUSS-SEIDEL converge
  $\rho(\mathcal{L}_1) = a^{3/2}$

RÉSUMÉ : JACOBI converge $\iff$ $|a| < \frac{1}{2}$

Si $a \geq 0$ GAUSS-SEIDEL converge $\iff$ $a \leq 1$.

⑥ **Pour $0 < a < \frac{1}{2}$, quelle méthode est la plus rapide ?**

Plus le rayon spectral est petit, plus la convergence est rapide.

$$\rho(J) = 2a \qquad \frac{\rho(\mathcal{L}_1)}{\rho(J)} = \frac{a^{3/2}}{2a} = \frac{\sqrt{a}}{2} < 1$$
$$\rho(\mathcal{L}_1) = a^{3/2}$$

Ainsi $\rho(\mathcal{L}_1) < \rho(J)$: la méthode de GAUSS-SEIDEL est plus rapide.

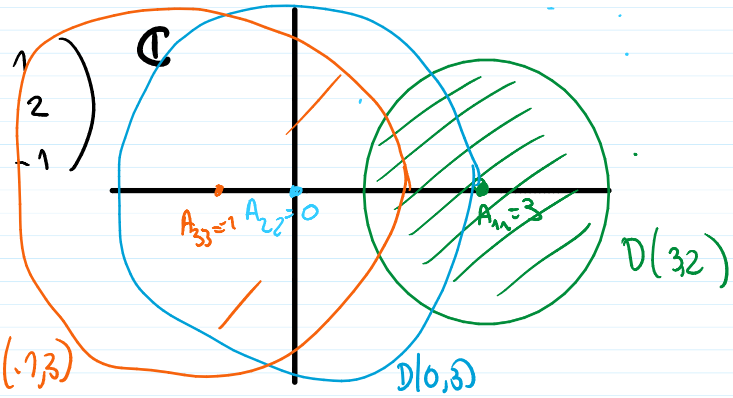
5.4 THÉORÈME DE GERSCHGORIN

$A \in M_n(\mathbb{C})$

$$\sigma(A) \subset \bigcup_{i=1}^{n} D\Big(A_{ii}, \sum_{j\neq i} |A_{ij}|\Big)$$

le spectre de A est inclus dans une réunion de disques où $D(z,r)=\{\lambda\in\mathbb{C} \; |\lambda-z|\leq r\}$. ("disques de GERSCHGORIN")

$$A=\begin{pmatrix} 3 & i & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$



Montrons le résultat.

Soit λ une v.p. de A et x un $\vec{v}$.p associé $Ax=\lambda x$

Soit i tel que $|x_i|$ est maximal. Comme $x\neq 0$, on a $|x_i|>0$

$$(Ax)_i = \lambda x_i$$
$$\| \quad \sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_j$$
$$\| \quad A_{ii}x_i + \sum_{j\neq i} A_{ij}x_j.$$

On a donc

$$(A_{ii}-\lambda)x_i = -\sum_{j\neq i} A_{ij}x_j$$

$$A_{ii}-\lambda = -\sum_{j\neq i} A_{ij}\frac{x_j}{x_i}$$

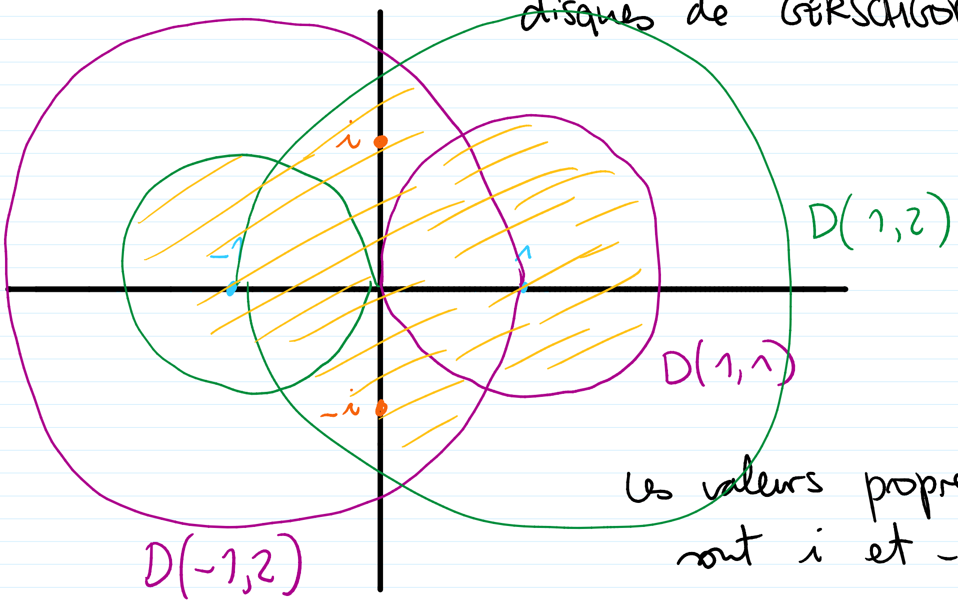
donc $|A_{ii}-\lambda| \leq \sum_{j\neq i} |A_{ij}| \underbrace{\left|\frac{x_j}{x_i}\right|}_{\leq 1 \text{ car } |x_j|\leq|x_i|}$

$$\leq \sum_{j\neq i} |A_{ij}|$$

donc $\lambda \in D\Big(A_{ii}, \sum_{j\neq i}|A_{ij}|\Big)$

Ex: $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer les v.p. et tracer les disques de GERSCHGORIN.

Ex 1 : $A = \begin{pmatrix} \dots \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$: calculer les v.p. et tracer les disques de GERSCHGORIN.



Les valeurs propres sont i et $-i$

__Remarque__ : comme A et ${}^tA$ ont mêmes valeurs propres, on peut appliquer ce théorème à ${}^tA$