TD du 3 mai

lundi 3 mai 2021 13:57

6.1 Rappel : théorème de GERSHGORIN

$A \in M_n(\mathbb{C})$

D_i : disque de centre $a_{ii} \in \mathbb{C}$

de rayon $\sum_{j \neq i} |a_{ij}|$.

Théorème : le spectre de A est inclus dans $\bigcup_{i=1}^{n} D_i$

$A \in M_n(\mathbb{C})$ est à diagonale dominante

$\forall i \quad |a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$ Ex : $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

① Mq A est alors inversible

- On peut utiliser le théorème de GERSHGORIN

Soient $(D_i)_{1 \leq i \leq n}$ les disques de ce théorème

Fixons i. D_i a pour centre a_{ii} et pour rayon

$r_i = \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$.

Comme A est à diagonale dominante, on a $r_i < |a_{ii}|$

et donc $0 \notin D_i$. Ainsi $0 \notin \bigcup_{i=1}^{n} D_i$, et donc

par le théorème de GERSHGORIN, 0 n'est pas une valeur propre.

$(\Rightarrow)$ A est inversible

- On peut donner une preuve directe.

Montrons que $x \neq 0 \Rightarrow Ax \neq 0$.

Soit $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$. Soit i tel que $|x_i|$ est maximal

$x \begin{pmatrix} x_i \end{pmatrix}$ (on a $|x_i| \neq 0$)

$\begin{pmatrix} & A & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix} Ax$

$$(Ax)_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = a_{ii} x_i + \underbrace{\sum_{j \neq i} a_{ij} x_j}_{S}$$

car $|x_i| > 0$

$$|S| \leq \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \underbrace{|x_j|}_{\leq |x_i|} \leq |x_i| \cdot \underbrace{\sum_{j \neq i} |a_{ij}|}_{< |a_{ii}|} < |x_i| \cdot |a_{ii}|$$

$(Ax)_i = a_{ii} x_i + S$ avec $|S| < |a_{ii} x_i|$

et donc $(Ax)_i \neq 0$ et $Ax \neq 0$.

Pour les matrices à diagonale dominante, les méthodes de JACOBI et GAUSS-SEIDEL convergent toujours. Vérifions-le d'abord sur l'exemple

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculer les matrices de JACOBI et GAUSS SEIDEL, puis leur rayon spectral.

$A = D - E - F \qquad D = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 3 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$

$-E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad -F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

La matrice de Jacobi est $J = D^{-1}(E+F)$

$D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & & \\ & \frac{1}{3} & \\ & & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad E+F = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$J = D^{-1}(E+F) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$J = D^{-1}(E+F) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Son polynôme caractéristique est

$$\det(J - \lambda Id) = \begin{pmatrix} -\lambda & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\lambda & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\lambda \end{pmatrix}$$

développ^t / dernière ligne

$$\overset{\sim}{=} -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ -\lambda & -\frac{1}{3} \end{vmatrix} - \lambda \begin{vmatrix} -\lambda & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{1}{12} - \lambda\left(\lambda^2 - \frac{1}{6}\right)$$

$$= -\lambda^3 + \frac{\lambda}{6} - \frac{1}{12}$$

et les valeurs propres $\simeq -0{,}561$, $0{,}28 \pm 0{,}26i$

sont de module < 1

donc $\rho(J) < 1$ et la méthode converge.

La matrice de GAUSS-SEIDEL est

$G = (D-E)^{-1}F$ $\qquad D - E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Pour calculer $(D-E)^{-1}$, on peut par exemple résoudre $(D-E)x = y$

$$\begin{cases} 2x_1 = y_1 \\ x_1 + 3x_2 = y_2 \\ x_1 + 2x_3 = y_3 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}y_1 \\ x_2 = \frac{1}{3}y_2 - \frac{1}{3}x_1 = -\frac{1}{6}y_1 + \frac{1}{3}y_2 \\ x_3 = \frac{1}{2}y_3 - \frac{1}{2}x_1 = -\frac{1}{4}y_1 + \frac{1}{2}y_3 \end{cases}$$

d'où $(D-E)^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ $\qquad F = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$G = (D-E)^{-1}F = \begin{bmatrix} 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/6 & -1/3 \\ 0 & 1/4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\chi_G = \det(G - \lambda Id) = \begin{vmatrix} -\lambda & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{6}-\lambda & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{4} & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} \frac{1}{6}-\lambda & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{6}-\lambda & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & -\lambda \end{vmatrix} = -\frac{\lambda}{6} + \lambda^2 + \frac{1}{12} = \lambda^2 - \frac{\lambda}{6} + \frac{1}{12}$$

$$\frac{1}{12} \pm \frac{i\sqrt{11}}{12}$$

$$\Delta = \frac{1}{36} - \frac{4}{12} < 0$$

Les racines de $\lambda^2 - \frac{\lambda}{6} + \frac{1}{12}$ sont complexes conjuguées, donc de même module égal à $\frac{1}{\sqrt{12}}$ [puisque le produit des racines vaut $\frac{1}{12}$]

$\Rightarrow \rho(G) = \frac{1}{\sqrt{12}} < 1$ et la méthode de GAUSS-SEIDEL converge.

$\Rightarrow \rho(G) = \dfrac{1}{\sqrt{12}} < 1$ et la méthode de GAUSS-SEIDEL converge. ($\sqrt{12}$ ∟ des racines vaut $\frac{1}{12}$!)

En fait, pour les matrices à diagonale dominante, les méthodes de JACOBI et GAUSS-SEIDEL convergent toujours.

2 JACOBI

$$J = D^{-1}(E+F)$$

$$A = (a_{ij}) \qquad E+F = \begin{pmatrix} 0 & & -a_{ij} \\ & \ddots & \\ -a_{ij} & & 0 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$J = D^{-1}(E+F) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & \cdots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$J_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i=j \\ -\dfrac{a_{ij}}{a_{ii}} & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

$$|||J|||_\infty = \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

$$|||J|||_1 = \max_j \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$$

Rappel : si $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$

on lui associe une norme subordonnée $|||\cdot|||$ sur $M_n(\mathbb{C})$ ou $M_n(\mathbb{R})$

par la formule $|||A||| = \sup\limits_{x \neq 0} \dfrac{\|Ax\|}{\|x\|}$

- Si on part de $\|\cdot\|_1$ ou $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$ on obtient les formules ci-dessus.
- Si on part de $\|\cdot\|_2$, on a $|||A|||_2$ = plus grande v. singulière de A $\left[= \sqrt{\text{vp}(A^*A)}\right]$

Une autre norme importante (mais pas subordonnée) est la norme de FROBENIUS $\|A\|_F = \sqrt{\operatorname{tr} A^*A} = \sqrt{\sum_{i,j} |a_{ij}|^2}$

$$|||J|||_\infty = \max_i \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^n |J_{ij}| = \max_i \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^n \left|\frac{-a_{ij}}{a_{ii}}\right| =$$

$$= \max_i \frac{\sum_{j\neq i} |a_{ij}|}{|a_{ii}|} \quad < 1 \text{ car } A \text{ est à diagonale dominante.}$$

On a donc $|||J|||_\infty < 1$.

Comme $\rho(J) \leq |||J|||_\infty$, on a $\rho(J) < 1$ et la méthode de JACOBI converge.

[illegible] pour toute norme subordonnée

Comme $\rho(J) \leq |||J|||_\infty$, on a $\rho(J) < 1$ et la méthode de JACOBI converge.

inégalité valable pour toute norme subordonnée

③ Cas GAUSS-SEIDEL.

Mq λ v.p. de $G \iff 0$ v.p. de
$$\begin{pmatrix} \lambda a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \lambda a_{12} & \lambda a_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \lambda a_{n1} & \cdots & & \lambda a_{nn} \end{pmatrix} = \lambda(D-E) - F$$

$G = (D-E)^{-1} F$

λ v.p. de $G \iff \det(G - \lambda Id) = 0$

$\iff \det\left((D-E)^{-1}F - \lambda Id\right) = 0$

$\iff \det(F - \lambda(D-E)) = 0$

$\iff \det(\lambda(D-E) - F) = 0$

Si λ est une v.p. de G alors

0 est v.p. de $\lambda(D-E) - F = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a_{n-1,n} \\ \lambda a_{n1} & \cdots & & \lambda a_{nn} \end{pmatrix} = K$

Si $|\lambda| \geq 1$, cette matrice est à diagonale dominante

$$\sum_{j \neq i} |k_{ij}| = \sum_{j<i} |\lambda a_{ij}| + \sum_{j>i} |a_{ij}| \leq |\lambda| \cdot \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$$
$$< |\lambda| \cdot |a_{ii}| = |k_{ii}|$$

et par la question 1, elle est inversible.

Conclusion : Si λ est v.p. de G, alors $|\lambda| < 1$.
Ainsi $\rho(G) < 1$ et la méthode de GAUSS-SEIDEL converge.

RETOUR SUR HOUSEHOLDER

Exercice : calculer la décomposition QR de la matrice A par la méthode de HOUSEHOLDER.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 0 \\ 1 & 4 & -2 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
v_1

$A = Q R$

orthogonale, triangulaire sup.

On écrit Q comme produit de symétries

$1^{ère}$ étape : on trouve une symétrie H_1 qui envoie v_1 sur $\|v_1\|_2 e_1$

$$H_1 = Id - 2\frac{w_1 w_1^T}{\|w_1\|_2^2} \qquad w_1 = v_1 - \|v_1\|_2 e_1$$

$$H_1 A = \begin{pmatrix} * & \\ 0 & \\ 0 & \square \\ 0 & \end{pmatrix}$$ et on itère en considérant la sous-matrice "Sud est" de $H_1 A$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \|v_1\|_2 = 2 \quad w_1 = v_1 - 2e_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$w_1 w_1^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$H_1 = Id - \frac{2}{4} w_1 w_1^T = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$H_1 A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & 6 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & -10 & 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & -5 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

On cherche H_2 de la forme $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & \tilde{H}_2 & \\ 0 & & & \end{bmatrix}$ $\quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$

telle que $H_2 H_1 A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{bmatrix}$ on veut $\tilde{H}_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$w_2 = v_2 - \|v_2\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{w_2 w_2^T}{\|w_2\|^2} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{H}_2 = Id_3 - \frac{2 w_2 w_2^T}{\|w_2\|^2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & \tilde{H}_2 & \\ 0 & & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$H_2 H_1 A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = R \quad \text{et} \quad H_3 = Id \,!$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Finalement $\quad A = \underbrace{(H_2 H_1)^{-1}}_{Q} R$

avec $\quad Q = (H_2 H_1)^{-1} = H_1^{-1} H_2^{-1} = H_1^T H_2^T = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Conclusion

$A = QR$ avec

$$Q = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & 0 \\ \end{bmatrix}$$

$$Q = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

6.2 Méthode de la puissance

C'est un algorithme pour trouver la valeur propre de plus grand module, et un vecteur propre associé.

A diagonalisable de base de vecteurs propres u_i

$Au_i = \lambda_i u_i$ on suppose $\lambda_1 = \dots = \lambda_p$

$|\lambda_i| < |\lambda_1|$ si $i > p$

Algorithme : x_0 quelconque

on calcule $Ax_0, A^2x_0, \dots \; A^k x_0 \dots$

Si $x_0 = \sum \alpha_i u_i$

alors $A^k x_0 = \sum \alpha_i A^k u_i$

$= \sum \alpha_i \lambda_i^k u_i$

ex $\lambda_1 = 3$

$\lambda_2 = 2$

$\lambda_3 = 1$

$x_0 = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3$

$A^k x_0 = \alpha_1 3^k u_1 + \alpha_2 2^k u_2 + \alpha_3 u_3$

quand $k \to \infty$, seul les termes avec $1 \leq i \leq p$ dominent.

On calcule en fait $\dfrac{A^k x_0}{\|A^k x_0\|}$ pour éviter la convergence vers 0 ou $+\infty$.

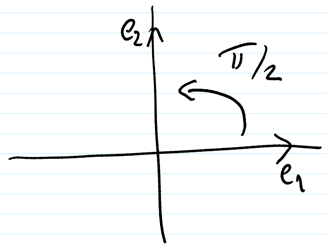
Dans de nombreux cas, la suite $\dfrac{A^k x_0}{\|A^k x_0\|}$ converge par $k \to \infty$ vers un vecteur propre de valeur propre λ_1.

6.3 Un exemple où la méthode de la puissance ne marche pas.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$A(e_1) = e_2$

$A(e_2) = -e_1$



A est la matrice de la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ autour de 0.

$\Rightarrow A$ n'a pas de vecteur propre réel.

Les v.p. de A sont les racines du polynôme caractéristique

$$\begin{vmatrix} -X & -1 \\ 1 & -X \end{vmatrix} = X^2+1$$

c'est à dire les nombres complexes i et $-i$

$Ax = ix \iff \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ a pour solution $x = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$

$Ax = \begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$ est un $\vec{v.p.}$ de v.p. i

En conjuguant, $\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ est un $\vec{v.p}$ de v.p $-i$

(2) Qu'arrive-t-il à la suite $A^k x$?

Comme $A^4 = Id$, la suite est périodique de période 4

et ne converge pas sauf si $x=0$.

Si on pose $x_k = \dfrac{A^k x}{\|A^k x\|_2} = \dfrac{A^k x}{\|x\|_2}$

Quand la méthode de la puissance converge, on a

$$\lambda_1 = \lim_{k\to\infty} \langle x_k, A x_k \rangle$$

$$\langle x_k, A x_k \rangle = \frac{1}{\|x\|^2} \langle A^k x, A^{k+1} x \rangle$$

$$= \frac{1}{\|x\|^2} \langle x, Ax \rangle$$ car A est unitaire, donc $\langle Ay, Az \rangle = \langle A^* A y, z \rangle = \langle y, z \rangle$

Si $\alpha = \dfrac{1}{\|x\|^2} \langle x, Ax \rangle$ est une valeur propre de A,

alors $|\alpha| = 1$ donc $|\langle x, Ax \rangle| = \|x\|^2$

Par CAUCHY-SCHWARZ, $|\langle x, Ax \rangle| \leq \|x\| . \underbrace{\|Ax\|}_{=\|x\| \text{ (A unitaire)}} \leq \|x\|^2$

On est donc dans le cas d'égalité de CAUCHY-SCHWARZ ie. x et Ax sont proportionnels, donc x est un vecteur propre !

CONCLUSION Pour cette matrice, la méthode de la puissance converge seulement si x est un vecteur

Conclusion Pour cette matrice, la méthode de la puissance converge seulement si x est un vecteur propre.