

EXERCICE 1.1.

sym
somme

- Si A, B - symétrique $\Rightarrow A+B$ aussi.
 $A = {}^tA, B = {}^tB \quad {}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB = A+B.$

invers
prod

- Si A, B - inversible $\Rightarrow AB (B^{-1}A^{-1})$
 $= A(BB^{-1})A^{-1} = Id.$
Donc AB - inversible d'inverse $B^{-1} \cdot A^{-1}.$

Contre ex pour la Σ : $A = Id, B = -Id.$
 $A+B = 0$ non-inversible.

Rq : Avec diagonale ça marche pour somme & produit.

somme
orthog.

- Orthogonale : A - ortho si $A \cdot {}^tA = Id$
 ${}^tA = A^{-1}.$
 $A = Id \in O(n), B = -Id \in O(n)$
 $A+B \notin O(n).$

- Ex pas diagonalisable : $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$

sym
prod.

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$

$$AB = \begin{pmatrix} 23 & 4 \\ 23 & 20 \end{pmatrix} \text{ - non symétrique : } \text{non symétrique}$$

somme
diagonal
lisable

- (diagonalisable) : la seule val. pr est 0 :
si elle était diagonalisable, elle serait nulle.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{\text{diagonalisable} \Rightarrow B} + \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{diagonale} \Rightarrow \text{diagonalisable}} \quad \begin{matrix} B. \text{ polyn. cara. scindé} \\ \text{dans } \mathbb{R}, 2 \text{ vprop.} \\ \text{distinctes.} \end{matrix}$$

• diagonalisable - Somme : FAUX.

• Nilpotente : $\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{nilpotente}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{nilpotente}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{pas nilpotente}}^A$

car A au carré = Id
 $\Rightarrow$ de rang 2.

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_C$ pas nilpotente.

car $C^n = C \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

RQ : $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad AB = BA, A \text{ nilpotente}$
 $\Rightarrow AB \text{ nilpotente.}$

orthog.
produit.

• $A \in \mathcal{O}(n) \quad B \in \mathcal{O}(n) \quad \left\{ \begin{array}{l} (AB)(AB)^t = ABB^t A^t = Id. \end{array} \right.$

produit
diagonalisable.

• $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{pas diag.}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{\text{diag. car diagonal.}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{\text{diag. m arg. vp } \{1, -1\}}$

EXERCICE N° 1.2

	A	B	C	D
symétrique	OUI	OUI	NON	NON
inversible	OUI $I^{-1} = I$	$\det(B) = -1$ OUI	$\det(C) = 1$ OUI	$\det(D) = 0$ prod. diagonaux car trgl. NON.
diagonalisable	OUI	OUI. TH. SPECTR le mat sym est diagonalisable	NON POLY CARA. $x^2 + 1$	NON. TRANG. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$
nilpotente	NON	NON	NON car inversible.	OUI trgl sup. strict $D^3 = 0$.
orthogonal	OUI	NON (*)	OUI (*)	NON pas inversible.

$$A = I_n; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{DGT dans une base orthonormée.}}$
 $\left\{ \begin{array}{l} B = P \cdot D \cdot P^{-1}, \quad P \text{ orthogonale.} \end{array} \right.$

Rq : Si M diagonalisable & nilpotente $\Rightarrow M$ nulle. car diag.

$$0 = (P \cdot \Delta \cdot P^{-1})^n = P \cdot \Delta^n \cdot P^{-1} \Rightarrow \Delta^n = 0 \Rightarrow \Delta = 0.$$

(*) Orthog. col mat. forme base $\perp$ normal.

nilpotent $\Rightarrow$ pas inversible $\parallel$ inversible $\Rightarrow$ pas nilpotent.

EXERCICE 1.3.

- 1) $M_n(\mathbb{R})$ est stable par produit :
- Soient $A \in M_n(\mathbb{R})$, $B \in M_n(\mathbb{R})$.