---

**Feuille d'exercices n° 1**

RAPPELS D'ALGÈBRE LINÉAIRE

---

**Exercice 1.1** Déterminez si chacune des 10 assertions suivantes est vraie ou fausse :

$$\text{L'ensemble des matrices} \left\{ \begin{array}{c} \text{symétriques} \\ \text{inversibles} \\ \text{diagonalisables} \\ \text{nilpotentes} \\ \text{orthogonales} \end{array} \right\} \text{est stable par} \left\{ \begin{array}{c} \text{somme.} \\ \text{produit.} \end{array} \right\}$$

**Exercice 1.2** Déterminer si chacune des matrices suivantes est (a) symétrique (b) inversible (c) diagonalisable (d) nilpotente (e) orthogonale

$$A = I_n, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**Exercice 1.3** On note $\mathcal{L}_n$ l'ensembles des matrices de $\mathbf{C}^{n\times n}$ qui sont triangulaires inférieures. Montrer que

1. $\mathcal{L}_n$ est stable pour le produit de matrices,
2. pour tout $A \in \mathcal{L}_n$, $\det(A) = a_{11} \cdots a_{nn}$,
3. les valeurs propres de $A \in \mathcal{L}_n$ sont les coefficients diagonaux,
4. $A \in \mathcal{L}_n$ est inversible si et seulement si $a_{ii} \neq 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$,
5. si $A \in \mathcal{L}_n$ est inversible, alors $A^{-1} \in \mathcal{L}_n$ et les coefficients diagonaux de $A^{-1}$ sont $a_{ii}^{-1}$,

Calculer l'inverse de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ a_2 & 1 & & & & \\ a_3 & 0 & 1 & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \\ a_{n-1} & 0 & 0 & \dots & 1 & \\ a_n & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Exercice 1.4** Soient $\alpha$, $\beta$ deux nombres réels. Déterminer une matrice orthogonale $O \in \mathbf{O}_2$ et une matrice diagonale $D$ telles que

$$\begin{pmatrix} 1+\alpha^2 & \alpha\beta \\ \alpha\beta & 1+\beta^2 \end{pmatrix} = ODO^T$$

**<u>Exercice 1.5</u> Matrices de rang 1**

Soient $u$, $v$ des vecteurs non nuls de $\mathbf{C}^n$. On note $R$ la matrice $uv^* \in \mathbf{C}^{n\times n}$.

1. Montrer que $R$ est une matrice de rang 1, et que toute matrice de rang 1 est de ce type.
2. Montrer que les valeurs propres de $R$ sont 0 et $\langle u, v\rangle$, et déterminer les sous-espaces propres correspondants.
3. Montrer que $R$ est diagonalisable si et seulement si $\langle u, v\rangle \neq 0$.

**<u>Exercice 1.6</u>** Soit $A \in \mathbf{C}^{m\times n}$, $x \in \mathbf{C}^n$ et $y \in \mathbf{C}^m$ tels que $y^*Ax \neq 0$. Posons

$$B = A - \frac{Axy^*A}{y^*Ax}.$$

Montrer que

1. $\mathrm{Im}(B) \subset \mathrm{Im}(A) \subset \mathrm{Im}(B) + \mathbf{C}Ax$,
2. $\ker(A) \subset \ker(B)$,
3. $x \in \ker(B)$ et $x \notin \ker(A)$,
4. en déduire que $\mathrm{rang}(B) = \mathrm{rang}(A) - 1$.

**<u>Exercice 1.7</u> Matrice compagnon**

Étant donnés $n$ nombres complexes $a_0, \dots, a_{n-1}$, la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

est appelée *matrice-compagnon* du polynôme

$$P(X) = a_0 + a_1X + \cdots + a_{n-1}X^{n-1} + X^n.$$

Montrer que le polynôme caractéristique de $A$ est égal à $(-1)^nP$

**<u>Exercice 1.8</u>** Soient $x$ et $y$ deux vecteurs linéairement indépendants de $\mathbf{C}^n$. On considère la matrice $A = xy^* + yx^* \in \mathbf{C}^{n\times n}$.

1. Montrer que $A$ est hermitienne, de rang 2. Déterminer son image.
2. Déterminer les valeurs propres de $A$ ainsi que les sous-espaces propres associés.