

**Feuille d'exercices n° 3**

DÉCOMPOSITIONS

**Exercice 3.1 Vrai ou Faux ?**

1. La matrice  $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  admet une décomposition de Choleski.
2. La matrice  $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$  est symétrique définie positive.
3. La matrice  $B$  ci-dessus admet une décomposition LU.
4. La matrice  $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$  s'écrit de la forme  $C^t C$ .
5. La matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$  admet une décomposition de Choleski  $A = C^t C$  avec  $C = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ .
6. Soit  $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ .
  - (a) La matrice  $DD^t$  admet une décomposition de Choleski.
  - (b) La matrice  $D^t D$  admet une décomposition de Choleski.

**Exercice 3.2 Décomposition LU**

1. Donner la décomposition LU de la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ .
2. Montrer que la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  vérifie  $PA = LU$  pour une matrice  $P$  de permutation à déterminer, avec  $L$  triangulaire inférieure et  $U$  triangulaire supérieure.
3. Calculer la décomposition LU de la matrice  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ .

**Exercice 3.3 Décomposition de Choleski**

Soit  $n \in \mathbf{N}^*$ . Considérons la matrice  $A_n$  carrée de taille  $n$  dont les coefficients sont donnés par

$$(A_n)_{i,j} = \min(i, j).$$

1. Montrer que pour tout  $n$  on a  $\det(A_n) = 1$ .
2. Échelonner les matrices  $A_2$  et  $A_3$ . Montrer que ces matrices sont définies positives et donner leur décomposition de Choleski.
3. "Deviner" la décomposition de Choleski de la matrice  $A_n$ .