Feuille d'exercices n° 4

DÉCOMPOSITIONS (SUITE)

Exercice 4.1 *Temps de calcul d'un déterminant.*

On s'intéresse ici au temps nécessaire au calcul d'un déterminant en utilisant la formule le définissant : pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$,

$$\det A = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) A_{1,\sigma(1)} \dots A_{n,\sigma(n)}$$

où $\mathcal{S}_n$ est le groupe des permutations, i.e. des bijections de $\{1, \dots, n\}$ dans lui-même, et pour tout $\sigma \in \mathcal{S}_n$, $\varepsilon(\sigma)$ est la signature de σ.

1. Combien d'opérations élémentaires (additions, soustractions et multiplications) sont-elles nécessaires au calcul de $\det A$ par la formule ci-dessus ? On notera $c(n)$ ce nombre.
2. Sachant qu'un ordinateur fait environ un milliard d'opérations par seconde (gigaflop), évaluer le temps nécessaire au calcul d'un déterminant de taille 20 par cette méthode, puis celui d'un déterminant de taille 100. *On rappelle la formule de Stirling :* $n! \sim n^{n+1/2} e^{-n} \sqrt{2\pi}$.

Exercice 4.2 *Décomposition LU.*

Écrire un algorithme de décomposition LU par identification. Compter le nombre d'opérations. Compter le nombre d'opérations nécessaires pour effectuer le calcul d'un déterminant d'une matrice à 100 lignes et 100 colonnes.

Exercice 4.3 *Décomposition LU.*

On définit $A \in \mathcal{M}_4(\mathbf{R})$ la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 8 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 9 \\ 1 & 5 & 11 & 7 \\ 1 & 7 & 14 & 13 \end{pmatrix}.$$

1. En utilisant l'algorithme d'élimination de Gauss, déterminer la factorisation LU de A.
2. En déduire la valeur du déterminant de A.
3. En utilisant la décomposition LU de A, résoudre le système $Ax = b$ pour les valeurs suivantes du vecteur $b \in \mathbf{R}^4$

(a) $b = \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$; (b) $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; (c) $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; (d) $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 7 \\ 13 \end{pmatrix}$.

Pour les deux derniers cas, comment lit-on sur la matrice que la solution est triviale ?

Exercice 4.4 *Décomposition UL.*

1. Montrer comment obtenir une factorisation $A = UL$ d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ où U est triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale et L est triangulaire inférieure.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ inversible possède une factorisation UL avec U triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale et L triangulaire inférieure inversible.
3. Calculer la factorisation UL de la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 3 \\ 4 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4.5 *Factorisation de Cholesky.*

1. Montrer que la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 10 & 7 \\ 2 & 7 & 21 \end{pmatrix}$$
est symétrique définie positive.
2. Calculer la factorisation de Cholesky de A.
3. Résoudre $Ax = b$ avec $b = (0, 0, 96)^T$ en utilisant la deuxième question.

Exercice 4.6 *Décomposition QR par la méthode de Gram-Schmidt.*

Soit $n \in \mathbf{N}$, soit $p \in \mathbf{N}$ avec $p \leq n$. On considère p vecteurs $(v_j)_{j=1}^p$ de $\mathbf{K}^n$ qui forment une famille libre de $\mathbf{K}^n$.

1. Rappeler le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt (qui fournit p vecteurs $(q_j)_{j=1}^p$ orthonormés et tels que l'espace vectoriel engendré par les q_j est égal à l'espace vectoriel engendré par les v_j).
2. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ de rang p. Montrer qu'il existe une matrice $Q \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ dont les colonnes sont orthonormées et une matrice $R \in \mathcal{M}_p(\mathbf{K})$ triangulaire supérieure (inversible) telles que
$$A = QR.$$
Une telle factorisation est-elle unique ? Proposer un énoncé plus précis assurant l'unicité.
3. Dans le cas où $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, montrer que le nombre d'opérations élémentaires pour effectuer cette factorisation est $p(3n-1) + p(p-1)(4n-1)/2$, nombre équivalent, lorsque $p = n$, à $2n^3$.

Exercice 4.7 *Décomposition QR par la méthode de Householder.*
Le but de cet exercice est d'obtenir la décomposition $A = QR$ par l'algorithme de Householder, pour une matrice réelle. Il consiste à multiplier la matrice A de départ par une suite de matrices orthogonales très simples pour obtenir une matrice triangulaire supérieure.

Notations.
Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Dans la suite, les vecteurs de $\mathbf{R}^n$ sont identifiés à des vecteurs colonnes et $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne canonique. Ainsi, pour tout $u \in \mathbf{R}^n$, $\|u\|^2 = u^T u$.

1. À tout vecteur $u \in \mathbf{R}^n$ on associe la matrice de Householder définie par
$$H(u) \ = \ \begin{cases} \mathrm{I}_n - 2\dfrac{uu^T}{\|u\|^2} & \text{si } u \neq 0 \\ \mathrm{I}_n & \text{sinon} \end{cases} .$$
   (a) Montrer que, pour tout $u \in \mathbf{R}^n$, $H(u)$ est symétrique et othogonale.
   $H(u)$ est la matrice de la symétrie orthogonale par rapport à l'hyperplan orthogonal à u. Faire un dessin.
   (b) Soit e un vecteur unitaire de $\mathbf{R}^n$.
   Montrer que, pour tout $v \in \mathbf{R}^n$, si v et e ne sont pas colinéaires, alors
$$H(v + \|v\|e)\, v = -\|v\|\, e \qquad \text{et} \qquad H(v - \|v\|e)\, v = \|v\|\, e.$$
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.
   (a) Déterminer une matrice de Householder H telle que la matrice HA n'ait que des zéros sous la diagonale dans sa première colonne.
   (b) Construire une suite de matrices de Householder $(H^{(k)})_{1\leq k\leq n-1}$ et une suite de matrices $(A^{(k)})_{0\leq k\leq n-1}$ telles que
      (i). $A^{(0)} = A$;
      (ii). pour tout $0 \leq k \leq n-2$, $A^{(k+1)} = H^{(k+1)}A^{(k)}$;
      (iii). $A^{(n-1)}$ est triangulaire.
   (c) Montrer que l'algorithme précédent fournit une décomposition QR et que le nombre N_{op} de multiplications nécessaires à sa mise en œuvre vérifie $N_{op} \sim \dfrac{2n^3}{3}$.
3. Application : déterminer une factorisation QR de la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4.8 *Convergence des méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel.* Examiner la convergence des méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel pour les deux matrices suivantes
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

<u>Exercice 4.9</u> *Une comparaison des méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel.* Soit $a \in \mathbf{R}$. On définit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer les valeurs propres de A.
   On pourra commencer par obtenir une valeur propre évidente en remarquant que la somme des éléments de chaque ligne de A est la même.
2. Pour quelles valeurs de a la matrice A est-elle symétrique définie positive ?
3. Écrire la matrice J de l'itération de Jacobi.
   Pour quelles valeurs de a la méthode de Jacobi converge-t-elle ?
4. Écrire la matrice $\mathcal{L}_1$ de l'itération de Gauss-Seidel.
5. Pour quelles valeurs positives ou nulles de a la méthode de Gauss-Seidel converge-t-elle ?
6. Pour $a \in]0, \frac{1}{2}[$, comparer les vitesses de convergence des méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel.