

Feuille d'exercices n° 5

MOINDRES CARRÉS, RECHERCHE DE VALEURS PROPRES

Exercice 5.1

Trouver la droite du plan qui passe au plus près (au sens des moindres carrés) des points $(0, 1)^T$, $(1, 2)^T$ et $(3, 3)^T$.

Exercice 5.2 *Approximation polynomiale.*

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On note $\| \cdot \|$ la norme euclidienne canonique de \mathbf{R}^n .

On souhaite connaître au mieux une fonction $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ grâce à n mesures y_1, \dots, y_n en n points t_1, \dots, t_n . Pour cela on se fixe un degré $d \in \mathbf{N}$ et l'on détermine une approximation de f dans l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à d .

Notons \mathcal{P}_d cet espace. On cherche $P \in \mathcal{P}_d$ tel que

$$\left\| \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} P(t_1) \\ \vdots \\ P(t_n) \end{pmatrix} \right\| = \min_{Q \in \mathcal{P}_d} \left\| \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} Q(t_1) \\ \vdots \\ Q(t_n) \end{pmatrix} \right\|.$$

1. Écrire le problème comme la résolution au sens des moindres carrés d'un système $Ax = b$ pour une certaine matrice $A \in \mathcal{M}_{n,d+1}(\mathbf{R})$ et un certain vecteur $b \in \mathbf{R}^n$.
2. Pour $d = 0, 1$, résoudre explicitement le problème quand il possède une unique solution.
3. On suppose que les points t_1, \dots, t_n sont deux à deux distincts.
À quelle condition sur d la matrice A^*A est-elle inversible ?

Exercice 5.3 *Un calcul par la décomposition QR.*

On définit $A \in \mathcal{M}_{4,2}(\mathbf{R})$ et $b \in \mathbf{R}^4$ par

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \\ 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1. Résoudre $Ax = b$ au sens des moindres carrés à l'aide d'une décomposition QR obtenue par la méthode de Householder.
2. Quelle est la taille de l'erreur d'approximation ?

Exercice 5.4 *Théorème de Gerschgorin.*

Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. Montrer que

$$\sigma(A) \subset \bigcup_{i=1}^n \left\{ \lambda \in \mathbf{C} \mid |\lambda - A_{i,i}| \leq \sum_{j \neq i} |A_{i,j}| \right\}.$$

Exercice 5.5 *Méthode de la puissance.*

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer les modes propres de A .

2. Soit $x \in \mathbf{C}^2$ non nul.

(a) Calculer $(A^k x)_{k \in \mathbf{N}}$.

(b) On pose $(x^{(k)})_{k \in \mathbf{N}} = \left(\frac{A^k x}{\|A^k x\|} \right)_{k \in \mathbf{N}}$. À quelle condition sur x la suite

$$\left(\langle Ax^{(k)}, x^{(k)} \rangle \right)_{k \in \mathbf{N}}$$

converge-t-elle vers une valeur propre de A ?

Exercice 5.6 *Méthode QR.*

Calculer les itérations successives de la méthode QR de recherche de valeurs propres pour la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Qu'en conclure?