

---

**Feuille d'exercices n° 6**  
COMPLÉMENTS

---

Dans l'exercice suivant, on pourra utiliser librement le théorème de Gershgorin (exercice 5.4).

**Exercice 6.1** Matrices à diagonale dominante

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$  une matrice à *diagonale dominante*, c'est à dire vérifiant l'inégalité

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$$

pour tout  $i$ .

1. Montrer que  $A$  est inversible.
2. Soit  $J$  la matrice de Jacobi de  $A$ . Montrer que  $\|J\|_\infty < 1$  et en déduire que la méthode de Jacobi converge pour  $A$ .
3. Soit  $G$  la matrice de Gauss-Seidel de  $A$ . Montrer que si  $\lambda$  est valeur propre de  $G$ , alors 0 est valeur propre de

$$\begin{pmatrix} \lambda a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \cdots & \lambda a_{nn} \end{pmatrix}.$$

En déduire que  $|\lambda| < 1$  et que la méthode de Gauss-Seidel converge pour  $A$ .

**Exercice 6.2** Méthode de la puissance

La méthode de la puissance est un algorithme pour calculer la valeur propre de plus grand module d'une matrice, et un vecteur propre associé.

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$  une matrice diagonalisable, et  $(u_i)_{1 \leq i \leq n}$  une base formée de vecteurs propres de  $A$ , avec  $Au_i = \lambda_i u_i$ . On suppose que  $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_p$  et  $|\lambda_i| < |\lambda_1|$  pour  $p < i \leq n$ .

1. Soit  $x_0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i$ . Que vaut

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{A^k x_0}{\lambda_1^k} ?$$

On note  $U$  l'ensemble des vecteurs  $x_0$  pour lesquels cette limite est non nulle. Montrer que  $U$  est un ouvert dense de  $\mathbf{C}$ .

2. Si  $y, z \in \mathbf{C}^n$  sont des vecteurs vérifiant  $\|y\|_2 = \|z\|_2 = 1$ , on pose

$$d(y, z) = \inf_{0 \leq \theta \leq 2\pi} \|y - e^{i\theta} z\|_2.$$

Soit  $x_0 \in U$  et  $(x_k)$  la suite définie par

$$x_k = \frac{A^k x_0}{\|A^k x_0\|_2}.$$

Montrer qu'il existe un vecteur unitaire  $x_\infty$  tel que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} d(x_k, x_\infty) = 0.$$

Montrer que  $x_\infty$  est un vecteur propre de valeur propre  $\lambda_1$ . Montrer de plus que

$$\lambda_1 = \lim_{k \rightarrow \infty} \langle Ax_k, x_k \rangle.$$

3. Comment peut-on adapter l'algorithme précédent pour trouver la valeur propre de plus petit module de  $A$  ?

**Exercice 6.3** Un exemple où la méthode de la puissance ne converge pas

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer les valeurs et vecteurs propres de  $A$ .
2. Soit  $x_0 \in \mathbf{C}^2$  non nul.
  - (a) Calculer  $(A^k x)_{k \in \mathbf{N}}$ .
  - (b) Comme à l'exercice précédent, on pose  $x_k = \left( \frac{A^k x_0}{\|A^k x_0\|_2} \right)$ . À quelle condition sur  $x$  la suite

$$(\langle Ax_k, x_k \rangle)_{k \in \mathbf{N}}$$

converge-t-elle vers une valeur propre de  $A$  ?

**Exercice 6.4** (Difficile, mais bon à savoir) Montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables à valeurs propres distinctes forme un ouvert dense de  $M_n(\mathbf{C})$ .

L'exercice précédent implique la méthode de la puissance marche pour une matrice  $A \in M_n(\mathbf{C})$  et un vecteur initial  $x_0$  génériques.