Université Claude Bernard-Lyon 1 Semestre de printemps 2020-2021

Analyse matricielle – L3

Examen, jeudi 20 mai 2021

Correction succincte

Exercice 1. *Convergence de suites itératives.*

1. Soit $k \in \mathbf{N}$. On a
$$y_{k+1} = \begin{pmatrix} x_{k+1} \\ x_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ax_k + Bx_{k-1} \\ x_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ I_n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ x_{k-1} \end{pmatrix}$$
donc $y_{k+1} = Cy_k$ avec $C = \begin{pmatrix} A & B \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$.

2. Si $x_k \to 0_{\mathbf{R}^n}$, alors $x_{k-1} \to 0_{\mathbf{R}^n}$ et donc $y_k \to \begin{pmatrix} 0_{\mathbf{R}^n} \\ 0_{\mathbf{R}^n} \end{pmatrix} = 0_{\mathbf{R}^{2n}}$. Réciproquement, si $y_k \to 0$, chacune de ses n premières coordonnées tend vers 0, donc $x_k \to 0$.

3. Par un théorème du cours, $y_k \to 0$ pour toute valeur initiale y_0 si et seulement si $\rho(C) < 1$. Ainsi, $x_k \to 0$ pour toute valeurs initiales x_0, x_1 si et seulement si $\rho(C) < 1$.

Exercice 2. *Méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel*

1. On écrit $A = D - E - F$ avec $D = I_3$, $E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\alpha & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $F = E^t$. On a alors
$$\mathcal{L}_J = D^{-1}(E+F) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ -\alpha & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
On a $(D-E) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \alpha & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et donc $(D-E)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\alpha & 0 & 1 \end{pmatrix}$ puis
$$\mathcal{L}_{GS} = (D-E)^{-1}(F) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^2 \end{pmatrix}.$$

2. Par le cours, la méthode de Jacobi converge (pour tout vecteur initial) si et seulement si $\rho(\mathcal{L}_J) < 1$. Les valeurs propres de $\mathcal{L}_J$ (par exemple, calculées via le polynôme caractéristique) sont $0, \alpha$ et $-\alpha$, donc $\rho(\mathcal{L}_J) = |\alpha|$.

3. Par le cours, la méthode de Gauss–Seidel converge (pour tout vecteur initial) si et seulement si $\rho(\mathcal{L}_{GS}) < 1$. Les valeurs propres de la matrice triangulaire supérieure $\mathcal{L}_{GS}$ sont $0, 0$ et α^2, donc $\rho(\mathcal{L}_J) = \alpha^2$.

Exercice 3. *Moindres carrés.*

1. Par définition, « $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ est solution du système $D \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = b$ au sens des moindres carrés » si c'est une solution du problème de minimistion
$$\inf_{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2} \left\| D \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - b \right\|_2.$$

2. L'équation normale associée est $D^tD\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = D^tb$. On calcule $D^tD = \begin{pmatrix} 14 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$ et $D^tb = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$. L'équation normale est donc $\begin{pmatrix} 14 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$.
3. On trouve $x = 1/5$, $y = 1/5$.
4. L'erreur obtenue est

$$\left\| D\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - b \right\|_2 = \left\| \begin{pmatrix} 1/5 \\ -3/5 \\ 3/5 \\ -1/5 \end{pmatrix} \right\|_2 = 2/\sqrt{5}.$$

Exercice 4. *Disques de Gerschgorin*

1. Soit λ une valeur propre de A et $x = (x_1, \ldots, x_n)$ un vecteur propre associé. Soit i_0 tel que $|x_{i_0}| = \|x\|_\infty$. Puisque $x \neq 0$, on a $x_{i_0} \neq 0$. On a

$$\lambda x_{i_0} = (Ax)_{i_0} = \sum_{j=1}^{n} A_{i_0,j}x_j = A_{i_0,i_0}x_{i_0} + \sum_{j \neq i_0} A_{i_0,j}x_j,$$

d'où

$$|\lambda - A_{i_0,i_0}| = \left| \sum_{j \neq i_0} A_{i_0,j}\frac{x_j}{x_{i_0}} \right| \leq \sum_{j \neq i_0} \left| A_{i_0,j}\frac{x_j}{x_{i_0}} \right| \leq \sum_{j \neq i_0} |A_{i_0,j}|$$

et le résultat en découle.

2. Les disques de Gershgorin de A sont $D_1 = D(3+i, 3)$, $D_2 = D(3-i, 2)$, $D_3 = D(3, 2)$ et $D_4 = D(5, 2+\sqrt{2})$. Par la question 1, $\sigma(A) \subset D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4$. Tous les éléments de $D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4$ sont de partie réelle strictement positive, à l'exception de $\lambda = i$. Pour conclure, il faut donc justifier que i n'est pas valeur propre de A. Cela peut se faire par un calcul de déterminant fastidieux, ou mieux en appliquant la question 1 à la matrice A^t, qui a même valeurs propres que A et pour laquelle i n'est pas dans la réunion des disques de Gershgorin.