

VERS LA CONJECTURE DE KANNAN–LOVÁSZ–SIMONOVITS
[d’après Yuansi Chen]

par **Guillaume Aubrun**

1. INTRODUCTION

1.1. Profil isopérimétrique

Soit (X, d) un espace métrique muni d’une mesure borélienne μ . Si A est une partie de X et $\varepsilon > 0$, on note A_ε la réunion des boules ouvertes de rayon ε dont le centre appartient à A . Si A est un borélien, on peut définir sa mesure de bord comme

$$\text{bord}_\mu(A) = \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\mu(A_\varepsilon) - \mu(A)}{\varepsilon}.$$

Le profil isopérimétrique de l’espace métrique mesuré (X, d, μ) est défini comme la solution du problème de minimisation suivant, pour un réel t donné

$$I_\mu(t) = \inf\{\text{bord}_\mu(A) : A \subset X \text{ borélien, } \mu(A) = t\}.$$

Autrement dit, à mesure fixée, on veut minimiser la mesure de bord. La solution exacte du problème isopérimétrique n’est connue que dans de rares situations très symétriques. À défaut, on peut se satisfaire d’une solution approximative. Nous nous plaçons dans cette optique, dans le cas particulier où X est un convexe de volume fini et strictement positif de l’espace euclidien usuel $(\mathbf{R}^n, \|\cdot\|)$ et où la mesure μ est la mesure de Lebesgue restreinte à X . Dans ce contexte, la conjecture de KANNAN, LOVÁSZ et SIMONOVITS

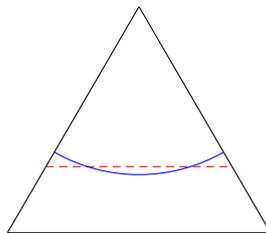


FIGURE 1. Si on veut partitionner un triangle équilatéral en deux parties de même aire, la coupe rectiligne la plus courte est comparable (environ 5% plus longue) à la coupe curviligne la plus courte. La conjecture KLS affirme que le même phénomène est vrai pour un convexe de dimension arbitraire.

(1995), ou conjecture KLS, affirme que restreindre l'infimum dans la définition de $I_\mu(1/2)$ aux parties A de la forme $X \cap H$, où H est un demi-espace de \mathbf{R}^n , n'affecte sa valeur que par une constante multiplicative indépendante de la dimension. Si la conjecture KLS est toujours ouverte, des progrès spectaculaires vers sa résolution ont été accomplis par CHEN (2021).

Ce texte est organisé comme suit. Dans une première partie, on donne une présentation de la conjecture KLS et des conjectures liées. La seconde partie introduit le schéma de localisation stochastique d'Eldan, qui est l'outil principal sur lequel repose la preuve de Chen. La preuve elle-même est détaillée dans une troisième partie.

Précisons quelques notations utilisées dans le texte. Étant données deux quantités réelles strictement positives A et B dont la valeur peut dépendre de plusieurs paramètres, la notation $A \lesssim B$ (ou de manière équivalente $B \gtrsim A$) signifie que l'ensemble des valeurs prises par le quotient A/B est une partie majorée de \mathbf{R} . La notation $A \asymp B$ signifie l'on a simultanément $A \lesssim B$ et $B \lesssim A$.

1.2. Mesures log-concaves

Dans ce texte, toutes les mesures considérées seront implicitement des mesures de probabilité. On dit qu'une mesure μ sur \mathbf{R}^n est log-concave si elle admet une densité $p: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^+$ par rapport à la mesure de Lebesgue et si $\log p: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ est une fonction concave.

Un exemple fondamental de mesure log-concave est donnée par la mesure uniforme sur un ensemble convexe borné d'intérieur non vide de \mathbf{R}^n . Les mesures gaussiennes sont également log-concaves. Pour des questions de géométrie des convexes, il est souvent utile de considérer la classe des mesures log-concaves, qui jouit de plus grandes propriétés de stabilité. Retenons en particulier le théorème de Prékopa qui affirme qu'une marginale d'une mesure log-concave est log-concave ; ce qu'on veut dire par là est que si μ est une mesure log-concave sur \mathbf{R}^n , son image par une surjection linéaire de \mathbf{R}^n sur \mathbf{R}^m est une mesure log-concave sur \mathbf{R}^m .

Notons également la caractérisation suivante : une mesure absolument continue μ sur \mathbf{R}^n est log-concave si et seulement si elle vérifie l'inégalité de Brunn–Minkowski

$$\mu(tA + (1-t)B) \geq \mu(A)^t \mu(B)^{1-t}$$

pour tout réel t de $[0, 1]$ et pour toutes parties compactes A, B de \mathbf{R}^n .

Un résultat remarquable (MILMAN, 2009 ; STERNBERG et ZUMBRUN, 1999) qui sera très utile pour nos considérations, est que la log-concavité peut se lire sur le profil isopérimétrique.

THÉORÈME 1.1. — *Si μ est une mesure log-concave sur \mathbf{R}^n , son profil isopérimétrique I_μ est une fonction concave qui vérifie $I_\mu(t) = I_\mu(1-t)$. Elle est donc maximale en $1/2$.*

Soit μ une mesure log-concave sur \mathbf{R}^n de densité p . La concavité du profil isopérimétrique implique en particulier la minoration suivante : pour $t \in [0, 1]$

$$(1) \quad I_\mu(t) \geq 2I_\mu(1/2) \min(t, 1-t) \geq 2I_\mu(1/2)t(1-t).$$

Si $A \subset \mathbf{R}^n$ est une partie régulière (ce qu'on peut définir par exemple en disant que sa frontière est de classe C^2), sa mesure de bord, que l'on notera $\mu^+(\partial A)$ plutôt que $\text{bord}_\mu(A)$, s'écrit comme

$$\mu^+(\partial A) = \int_{\partial A} p(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

On peut restreindre l'infimum définissant le profil isopérimétrique aux parties régulières, c'est-à-dire que pour tout $t \in [0, 1]$ on a

$$I_\mu(t) = \inf\{\mu^+(\partial A) : A \subset \mathbf{R}^n \text{ régulière, } \mu(A) = t\}.$$

1.3. Conjecture de Kannan, Lovász et Simonovits : formulation et historique

Soit μ une mesure log-concave sur \mathbf{R}^n . On obtient évidemment une majoration du profil isopérimétrique de μ en restreignant le problème de minimisation aux demi-espaces. (On appelle demi-espace de \mathbf{R}^n tout ensemble de la forme $f^{-1}([a, +\infty[)$, où a est un réel et f est une forme linéaire non identiquement nulle sur \mathbf{R}^n .) Définissons le profil isopérimétrique linéaire de μ , pour un réel $t \in [0, 1]$, comme

$$(2) \quad I_\mu^{\text{lin}}(t) = \inf\{\mu^+(\partial H) : H \subset \mathbf{R}^n \text{ demi-espace, } \mu(H) = t\},$$

de sorte que $I_\mu \leq I_\mu^{\text{lin}}$. La conjecture KLS postule que le quotient $I_\mu^{\text{lin}}(1/2)/I_\mu(1/2)$ est borné par une constante indépendante de la dimension. Pour l'étudier, posons

$$(3) \quad \text{KLS}_n = \sup \left\{ \frac{I_\mu^{\text{lin}}(1/2)}{I_\mu(1/2)} : \mu \text{ mesure log-concave sur } \mathbf{R}^n \right\}.$$

CONJECTURE 1.2 (Conjecture KLS). — *La suite (KLS_n) est bornée.*

Des bornes polynomiales de la forme $\text{KLS}_n \lesssim n^\alpha$ ont été obtenues avec les améliorations successives $\alpha = \frac{1}{2}$ (KANNAN, LOVÁSZ et SIMONOVITS, 1995), $\alpha = \frac{1}{3} + o(1)$ (ELDAN, 2013) puis $\alpha = \frac{1}{4}$ (LEE et VEMPALA, 2017). Un progrès spectaculaire plus récent, dû à CHEN (2021) est l'objet de ce texte.

THÉORÈME 1.3 (Chen). — *Il existe un réel C tel que, pour tout $n \geq 3$*

$$\text{KLS}_n \leq \exp \left(C \sqrt{\log n} \sqrt{\log \log n} \right).$$

Remarque 1.4. — Voici un exemple qui montre que le quotient I_μ^{lin}/I_μ n'est pas majoré uniformément sur $]0, 1[$. Soit μ la mesure uniforme sur un disque $D \subset \mathbf{R}^2$. Les solutions du problème isopérimétrique sont les parties dont la frontière est un arc de cercle intersectant ∂D orthogonalement. On en déduit que pour t au voisinage de 0, on a les relations $I_\mu(t) \asymp t^{1/2}$ et $I_\mu^{\text{lin}}(t) \asymp t^{1/3}$.

Remarque 1.5. — Appelons mesure log-concave uniforme une mesure log-concave dont la densité est constante sur son support. Nous avons formulé la conjecture KLS en prenant la borne supérieure dans (3) sur l'ensemble des mesures log-concaves sur \mathbf{R}^n . On obtient une conjecture formellement équivalente en restreignant la borne supérieure aux mesures log-concaves uniformes. La raison est que toute mesure log-concave est limite

de marginales de mesures log-concaves uniformes. En effet, soit une mesure log-concave sur \mathbf{R}^n de densité p . Pour un entier s , considérons l'ensemble $K_s \subset \mathbf{R}^{n+s}$ défini par

$$K_s = \{(x, y) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^s : \|y\| \leq 1 + s^{-1} \log p(x)\}$$

qui est convexe par l'inégalité de Brunn–Minkowski. L'image de la mesure uniforme sur K_s par la projection de $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^s$ sur \mathbf{R}^n a une densité proportionnelle à $(1 + s^{-1} \log p)_+^s$, qui tend vers p lorsque s tend vers l'infini.

1.4. Profil isopérimétrique linéaire et matrice de covariance

Expliquons comment le problème de minimisation restreint aux demi-espaces peut être résolu approximativement. Si μ est une mesure log-concave sur \mathbf{R}^n , on note $\mathbf{b}(\mu) = \int \mathbf{x} d\mu(\mathbf{x})$ son barycentre, et $\mathbf{Cov}(\mu)$ sa matrice de covariance (ou d'inertie) définie par

$$\mathbf{Cov}(\mu) = \int_{\mathbf{R}^n} (\mathbf{x} - \mathbf{b}(\mu))(\mathbf{x} - \mathbf{b}(\mu))^t d\mu(\mathbf{x}) = \int_{\mathbf{R}^n} \mathbf{x}\mathbf{x}^t d\mu(\mathbf{x}) - \mathbf{b}(\mu)\mathbf{b}(\mu)^t.$$

On dira qu'une mesure log-concave est isotrope si elle vérifie les conditions de normalisation $\mathbf{b}(\mu) = 0$ et $\mathbf{Cov}(\mu) = \text{Id}$. Si \mathbf{A} est une matrice réelle symétrique de taille $n \times n$, sa norme d'opérateur, qui est sa plus grande valeur propre en valeur absolue, s'écrit

$$\|\mathbf{A}\| = \sup_{\boldsymbol{\theta} \in \mathbf{R}^n, \|\boldsymbol{\theta}\|=1} \langle \mathbf{A}\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta} \rangle.$$

La proposition suivante montre que le profil isopérimétrique linéaire s'estime aisément à partir de la matrice de covariance.

PROPOSITION 1.6. — *On a, pour tout entier $n \geq 1$ et pour toute mesure log-concave μ sur \mathbf{R}^n ,*

$$I_\mu^{\text{lin}}(1/2) \asymp \|\mathbf{Cov}(\mu)\|^{-1/2}.$$

Esquisse de démonstration. — La première partie de la preuve consiste à démontrer l'inégalité souhaitée en dimension 1, qui s'écrit ainsi : si $p: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}_+$ est une densité de probabilité log-concave de médiane m et de variance v , alors

$$(4) \quad p(m) \asymp v^{-1/2}.$$

Cette inégalité peut se démontrer par des considérations élémentaires sur les fonctions d'une variable réelle.

Montrons maintenant le résultat annoncé. Soit $\boldsymbol{\theta}$ un vecteur unitaire de \mathbf{R}^n et $H_{\boldsymbol{\theta}}$ l'unique hyperplan orthogonal à $\boldsymbol{\theta}$ vérifiant $\mu(H_{\boldsymbol{\theta}}) = 1/2$. Considérons l'image de la mesure μ par la projection orthogonale de \mathbf{R}^n sur $\mathbf{R}\boldsymbol{\theta}$, identifié à \mathbf{R} . Par le théorème de Prékopa, cette mesure est log-concave. Sa densité vérifie donc l'inégalité (4) qui se traduit pour la mesure μ en

$$\mu^+(\partial H_{\boldsymbol{\theta}}) \asymp \langle \mathbf{Cov}(\mu)\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta} \rangle^{-1/2}.$$

La conclusion de la proposition 1.6 s'en déduit en prenant la borne inférieure sur $\boldsymbol{\theta}$. \square

1.5. Constante de Poincaré

Soit μ une mesure log-concave sur \mathbf{R}^n . On appelle *constante de Poincaré* de μ , et on note $C_P(\mu)$, la plus petite constante vérifiant l'inégalité

$$(5) \quad \mathbf{Var}_\mu(f) \leq C_P(\mu) \int_{\mathbf{R}^n} \|\nabla f\|^2 d\mu$$

pour toute fonction régulière $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$, où l'on note $\mathbf{Var}_\mu(f) = \int f^2 d\mu - (\int f d\mu)^2$. Son inverse $C_P(\mu)^{-1}$ est le trou spectral de l'opérateur de Laplace–Beltrami sur $L^2(\mu)$; ce dernier est directement relié au profil isopérimétrique par la relation

$$(6) \quad C_P(\mu)^{-1} \asymp I_\mu(1/2)^2.$$

L'inégalité $C_P(\mu)^{-1} \gtrsim I_\mu(1/2)^2$, dite inégalité de Cheeger, est valable dans un contexte beaucoup plus général. Il est connu depuis BUSER (1982) et LEDOUX (1994) que l'inégalité inverse est vraie sous hypothèse de log-concavité.

Lorsque μ est la mesure uniforme sur un convexe K , sa constante de Poincaré intervient dans des problèmes fondamentaux de géométrie algorithmique en grande dimension. Comment échantillonner un point de K ? Comment estimer le volume de K ? Les meilleurs algorithmes connus à ce jour ont une complexité qui fait intervenir la constante \mathbf{KLS}_n et le théorème de Chen a donc des conséquences immédiates pour garantir leur efficacité. Nous renvoyons à LEE et VEMPALA (2019) pour une présentation détaillée de toutes ces questions.

1.6. Reformulation et liens avec d'autres conjectures

Nous mentionnons deux conjectures plus faibles que la conjecture KLS, pour lesquelles le théorème de Chen a des conséquences directes.

La *conjecture de l'hyperplan* formulée par Bourgain (BOURGAIN, 1986) a pendant longtemps été un des moteurs principaux de la recherche sur la distribution du volume dans les convexes de grande dimension. Voici une des nombreuses versions équivalentes de la conjecture : soit L_n le plus petit réel tel que, pour toute partie convexe $K \subset \mathbf{R}^n$ de volume 1 on puisse trouver un hyperplan affine H tel que $K \cap H$ ait un volume $(n-1)$ -dimensionnel minoré par L_n^{-1} . La conjecture de l'hyperplan affirme que la suite (L_n) est bornée. L'estimation $L_n \lesssim n^{1/4} \log n$ démontrée initialement par Bourgain n'a été que ensuite marginalement améliorée en $L_n \lesssim n^{1/4}$ par KLARTAG (2006) — un progrès d'apparence modeste mais considéré comme une avancée majeure.

Or on sait depuis ELDAN et KLARTAG (2011) que la conjecture de l'hyperplan est une conséquence formelle de la conjecture KLS, au sens où $L_n \lesssim \mathbf{KLS}_n$. Le théorème de Chen $\mathbf{KLS}_n \lesssim n^{o(1)}$ est donc le premier pas substantiel vers la conjecture de l'hyperplan, 35 ans après sa formulation.

La *conjecture de la couronne mince* a attiré beaucoup d'attention, en particulier à cause de ses conséquences pour le théorème de la limite centrale pour les mesures log-concaves, comme exposé dans BARTHE (2010). Elle s'énonce ainsi : si on note f la

fonction définie sur \mathbf{R}^n par $\mathbf{x} \mapsto \|\mathbf{x}\|^2$, alors toute mesure log-concave isotrope μ devrait vérifier

$$\mathbf{Var}_\mu(f) \lesssim n.$$

Autrement dit, la variance de f est comparable à son espérance, d'où un phénomène de concentration très prononcé de la masse de μ dans une couronne autour de la sphère de rayon \sqrt{n} . Il est immédiat que la conjecture de la couronne mince est une conséquence de la conjecture KLS, puisqu'elle est une instance de l'inégalité de Poincaré (5).

1.7. Le cas des mesures strictement log-concaves

Pour $n \in \mathbf{N}^*$ et $\kappa > 0$, notons $\gamma_{n,\kappa}$ la mesure gaussienne sur \mathbf{R}^n centrée et de covariance $\kappa^{-1}\text{Id}$. Sa densité est la fonction

$$f: \mathbf{x} \mapsto (\kappa/2\pi)^{n/2} \exp(-\kappa\|\mathbf{x}\|^2/2)$$

qui vérifie $\nabla^2[-\log(f)] = \kappa\text{Id}$. C'est l'un des rares exemples où l'on connaît exactement le profil isopérimétrique : par l'inégalité isopérimétrique gaussienne, les solutions du problème isopérimétrique sont des demi-espaces, ce qui s'écrit comme l'égalité

$$I_{\gamma_{n,\kappa}} = I_{\gamma_{n,\kappa}}^{\text{lin}} = I_{\gamma_{1,\kappa}}^{\text{lin}}.$$

On a en particulier

$$I_{\gamma_{n,\kappa}}(1/2) = \frac{\sqrt{\kappa}}{\sqrt{2\pi}}.$$

Si une mesure est “plus log-concave” qu'une de ces mesures gaussiennes, au sens d'un contrôle uniforme de la matrice hessienne, on peut alors contrôler son profil isopérimétrique.

THÉORÈME 1.7. — *Soit $\kappa > 0$ et μ une mesure sur \mathbf{R}^n de densité p vérifiant l'inégalité $\nabla^2[-\log p] \geq \kappa\text{Id}$ en tout point de son support. Alors $I_\mu \geq I_{\gamma_{n,\kappa}}$ et en particulier*

$$I_\mu(1/2) \geq \frac{\sqrt{\kappa}}{\sqrt{2\pi}}.$$

On a de plus $C_P(\mu) \leq C_P(\gamma_{n,\kappa}) = \kappa^{-1}$ et $\|\text{Cov}(\mu)\| \leq \kappa^{-1}$.

Il existe plusieurs preuves de ce résultat. On peut invoquer un théorème de CAFFARELLI (2000) qui affirme que, sous l'hypothèse du théorème 1.7, la mesure μ est l'image de la mesure $\gamma_{n,\kappa}$ par une contraction pour la distance euclidienne. Il est immédiat de voir que le profil isopérimétrique augmente sous l'action d'une contraction.

1.8. Réduction à des mesures isotropes à support compact

En conséquence de la proposition 1.6, montrons qu'on peut se restreindre pour l'étude la conjecture KLS à des mesures isotropes, que l'on peut aussi supposer à support dans une boule de rayon de l'ordre de \sqrt{n} . On note B_n la boule unité de l'espace euclidien usuel $(\mathbf{R}^n, \|\cdot\|)$.

PROPOSITION 1.8. — *Il existe un réel $R > 0$ tel que, si on note KLS'_n la borne supérieure des quantités $I_\mu(1/2)^{-1}$ lorsque μ parcourt l'ensemble des mesures log-concaves isotropes sur \mathbf{R}^n à support dans $R\sqrt{n}B_n$, on ait*

$$\text{KLS}_n \asymp \text{KLS}'_n.$$

Démonstration. — L'inégalité $\text{KLS}'_n \lesssim \text{KLS}_n$ découle immédiatement de la proposition 1.6. Réciproquement, soit μ une mesure log-concave. Alors μ est l'image d'une mesure isotrope ν par une transformation affine dont la partie linéaire est $\text{Cov}(\mu)^{1/2}$. En particulier, cette transformation affine étant lipschitzienne de constante $L = \|\text{Cov}(\mu)\|^{1/2}$, on a $I_\mu \geq L^{-1}I_\nu$ et donc en utilisant à nouveau la proposition 1.6

$$\frac{I_\mu^{\text{lin}}(1/2)}{I_\mu(1/2)} \lesssim \frac{I_\nu^{\text{lin}}(1/2)}{I_\nu(1/2)}.$$

Il faut maintenant expliquer comment remplacer ν par une mesure à support dans $R\sqrt{n}B_n$. Pour cela, on utilisera le lemme suivant.

LEMME 1.9. — *Soit ν une mesure log-concave sur \mathbf{R}^n et K un convexe tel que $\nu(K) \geq \frac{9}{10}$. Soit ν_K la mesure obtenue en conditionnant ν à K , définie pour un borélien $A \subset \mathbf{R}^n$ par $\nu_K(A) = \frac{\nu(A \cap K)}{\nu(K)}$. Alors $I_\nu(1/2) \geq \frac{7}{10}I_{\nu_K}(1/2)$.*

Soit ν une mesure log-concave et isotrope. Posons $K = r\sqrt{n}B_n$ où $r \geq \sqrt{10}$ est une constante à déterminer. Puisque $\int_{\mathbf{R}^n} \|\mathbf{x}\|^2 d\nu(\mathbf{x}) = n$, il suit de l'inégalité de Markov que $\nu(K) \geq 1 - r^{-2} \geq \frac{9}{10}$. D'après le lemme 1.9, la mesure ν_K obtenue en conditionnant ν à K vérifie donc $I_\nu(1/2) \geq \frac{7}{10}I_{\nu_K}(1/2)$. L'inégalité

$$(7) \quad \frac{1}{2}\text{Id} \leq \text{Cov}(\nu_K) \leq \frac{10}{9}\text{Id}$$

permettra ensuite de conclure, puisque l'on peut remplacer ν_K par une image linéaire isotrope π qui vérifie $I_{\nu_K} \asymp I_\pi$ et $I_{\nu_K}^{\text{lin}} \asymp I_\pi^{\text{lin}}$. Justifions maintenant que l'on peut choisir $r > 0$ pour garantir (7). On utilisera le résultat élémentaire suivant : il existe un réel C telle que l'inégalité $\int x^4 d\mu(x) \leq C$ est vraie pour toute mesure log-concave isotrope μ sur \mathbf{R} . Soit $\boldsymbol{\theta}$ un vecteur unitaire de \mathbf{R}^n . On a d'après l'inégalité de Cauchy–Schwarz

$$\begin{aligned} 1 &\geq \int_K \langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\theta} \rangle^2 d\nu(\mathbf{x}) = 1 - \int_{K^c} \langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\theta} \rangle^2 d\nu(\mathbf{x}) \\ &\geq 1 - \nu(K^c)^{1/2} \left(\int_{\mathbf{R}^n} \langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\theta} \rangle^4 d\nu(\mathbf{x}) \right)^{1/2} \\ &\geq 1 - r^{-1}C^{1/2}. \end{aligned}$$

On peut donc choisir la constante r de telle sorte que l'on ait

$$\frac{1}{2} \leq \int_{\mathbf{R}^n} \langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\theta} \rangle^2 d\nu_k(\mathbf{x}) \leq \nu(K)^{-1} \leq \frac{10}{9}$$

pour tout vecteur unitaire $\boldsymbol{\theta}$, ce qui est équivalent à (7). \square

Démonstration du lemme 1.9. — Soit $A \subset \mathbf{R}^n$ une partie régulière telle que $\nu(A) = 1/2$. Alors

$$\frac{4}{10} \leq \frac{\nu(A) - \nu(K^c)}{\nu(K)} \leq \nu_K(A) \leq \frac{\nu(A)}{\nu(K)} \leq \frac{5}{9}$$

et l'inégalité (1) implique $\nu_K^+(\partial A) \geq I_{\nu_K}(4/10) \geq \frac{8}{10} I_{\nu_K}(1/2)$. On en déduit que $\nu^+(\partial A) \geq \nu(K) \nu_K^+(\partial A) \geq \frac{7}{10} I_{\nu_K}(1/2)$, d'où le résultat en prenant la borne inférieure sur A . \square

2. LE SCHEMA DE LOCALISATION STOCHASTIQUE

2.1. Préliminaires sur les processus d'Itô

Soit $(\mathbf{B}_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien dans \mathbf{R}^n . Pour tout $t \geq 0$, on note \mathcal{F}_t la tribu engendrée par $\{\mathbf{B}_s : s \leq t\}$. Tous les processus considérés seront adaptés à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$. L'intégrale stochastique dans la définition qui suit doit être comprise au sens d'Itô.

DÉFINITION 2.1. — *On appelle processus d'Itô un processus $(X_t)_{t \geq 0}$ qui peut s'écrire sous la forme*

$$(8) \quad X_t = X_0 + \int_0^t \delta_s ds + \int_0^t \boldsymbol{\sigma}_s \cdot d\mathbf{B}_s$$

où X_0 est constant et $(\delta_t)_{t \geq 0}$, $(\boldsymbol{\sigma}_t)_{t \geq 0}$ sont des processus adaptés vérifiant presque sûrement pour tout $t \geq 0$ les conditions $\int_0^t |\delta_s| ds < +\infty$ et $\int_0^t \|\boldsymbol{\sigma}_s\|^2 ds < +\infty$. Lorsque presque sûrement $\delta_t = 0$ pour tout t , on dit que $(X_t)_{t \geq 0}$ est une martingale d'Itô.

Les processus $(\delta_t)_{t \geq 0}$ et $(\boldsymbol{\sigma}_t)_{t \geq 0}$ sont alors uniques, respectivement notés $(\delta[X_t])_{t \geq 0}$ et $(\boldsymbol{\sigma}[X_t])_{t \geq 0}$ et appelés *dérive* et *volatilité* de $(X_t)_{t \geq 0}$. Il est d'usage d'écrire l'équation intégrale (8) sous la forme différentielle

$$dX_t = \delta_t dt + \langle \boldsymbol{\sigma}_t, d\mathbf{B}_t \rangle.$$

Rappelons les rudiments de calcul stochastique qui seront utilisés dans la preuve du théorème de Chen. Tout d'abord, si $(X_t)_{t \geq 0}$ est un processus d'Itô, son espérance se calcule directement en intégrant la dérive comme

$$(9) \quad \mathbf{E}[X_t] = X_0 + \int_0^t \mathbf{E}[\delta[X_s]] ds.$$

Si $(X_t)_{t \geq 0}$ est une martingale d'Itô, on peut calculer sa variance en intégrant la volatilité

$$(10) \quad \mathbf{Var}[X_t] = \int_0^t \mathbf{E}[\|\boldsymbol{\sigma}[X_s]\|^2] ds.$$

Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ un processus d'Itô et $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction de classe C^2 . Alors le processus $(Y_t = f(X_t))_{t \geq 0}$ est un processus d'Itô, de dérive et de volatilité donnés par la formule d'Itô

$$\delta[Y_t] = f'(X_t)\delta[X_t] + \frac{1}{2}f''(X_t)\|\sigma[X_t]\|^2, \quad \sigma[Y_t] = f'(X_t)\sigma[X_t].$$

Voici un autre incarnation de la formule d'Itô. Si $(X_t)_{t \geq 0}$ et $(Y_t)_{t \geq 0}$ sont des processus d'Itô, leur produit $(X_t Y_t)_{t \geq 0}$ est un processus d'Itô qui vérifie

$$(11) \quad \delta[X_t Y_t] = X_t \delta[Y_t] + Y_t \delta[X_t] + \langle \sigma[X_t], \sigma[Y_t] \rangle,$$

$$(12) \quad \sigma[X_t Y_t] = X_t \sigma[Y_t] + Y_t \sigma[X_t].$$

Enfin, soit $(X_t)_{t \geq 0}$ un processus d'Itô et τ un temps d'arrêt. Alors le processus arrêté défini par $Z_t = X_{\min(t, \tau)}$ est aussi un processus d'Itô qui vérifie

$$(13) \quad \delta[Z_t] = \mathbf{1}_{\{t \leq \tau\}} \delta[X_t], \quad \sigma[Z_t] = \mathbf{1}_{\{t \leq \tau\}} \sigma[X_t]$$

Les résultats qui précèdent ont été énoncés pour des processus d'Itô à valeurs scalaires, mais admettent des extensions immédiates au cas de processus d'Itô à valeurs dans un espace vectoriel de dimension finie V . La volatilité d'un tel processus est alors à valeurs dans $V \otimes \mathbf{R}^n$.

2.2. Le processus de localisation stochastique

Soit μ une mesure log-concave sur \mathbf{R}^n . On va définir une martingale d'Itô $(\mu_t)_{t \geq 0}$ « à valeurs dans les mesures log-concaves sur \mathbf{R}^n » vérifiant $\mu_0 = \mu$. Ce processus, appelé processus de localisation stochastique, a été introduit dans ELDAN (2013) et joue un rôle central dans plusieurs avancées récentes. Nous renvoyons à ELDAN (2022) pour un panorama de ces dernières.

Le processus $(\mu_t)_{t \geq 0}$ va être construit à partir d'un processus d'Itô $(\mathbf{c}_t)_{t \geq 0}$ à valeurs dans \mathbf{R}^n . On définit ensuite la mesure μ_t comme étant de densité

$$(14) \quad p_t(\mathbf{x}) = \frac{1}{Z_t} p(\mathbf{x}) \exp\left(\langle \mathbf{c}_t, \mathbf{x} \rangle - t \|\mathbf{x}\|^2 / 2\right),$$

où la variable aléatoire Z_t est choisie pour que p_t soit une densité de probabilité. On note $\mathbf{b}_t = \mathbf{b}(\mu_t)$ son barycentre, $\mathbf{A}_t = \text{Cov}(\mu_t)$ sa matrice de covariance, et \mathbb{T}_t son tenseur des moments centrés d'ordre 3, défini comme

$$\mathbb{T}_t = \int_{\mathbf{R}^n} (\mathbf{x} - \mathbf{b}_t)^{\otimes 3} d\mu_t \in \mathbf{R}^n \otimes \mathbf{R}^n \otimes \mathbf{R}^n.$$

THÉORÈME 2.2. — *Soit μ une mesure log-concave sur \mathbf{R}^n , de densité p . Il existe un processus d'Itô $(\mathbf{c}_t)_{t \geq 0}$ à valeurs dans \mathbf{R}^n tel que, avec les notations ci-avant*

1. *pour tout \mathbf{x} dans \mathbf{R}^n , le processus $(p_t(\mathbf{x}))_{t \geq 0}$ est une martingale d'Itô de volatilité $\sigma[p_t(\mathbf{x})] = \mathbf{x} - \mathbf{b}_t$,*
2. *le processus $(\mathbf{b}_t)_{t \geq 0}$ est une martingale d'Itô (à valeurs dans \mathbf{R}^n) de volatilité $\sigma[\mathbf{b}_t] = \mathbf{A}_t$.*

3. le processus $(\mathbf{A}_t)_{t \geq 0}$ est un processus d'Itô (à valeurs dans $M_n(\mathbf{R})$) de dérive $\delta[\mathbf{A}_t] = -\mathbf{A}_t^2$ et de volatilité $\sigma[\mathbf{A}_t] = \mathbf{T}_t$.

Démonstration. — On définit le processus d'Itô $(\mathbf{c}_t)_{t \geq 0}$ comme l'unique solution de l'équation différentielle stochastique

$$\mathbf{c}_0 = \mathbf{0}, \quad d\mathbf{c}_t = \mathbf{b}_t dt + \text{Id} \cdot d\mathbf{B}_t.$$

L'existence et l'unicité du processus $(\mathbf{c}_t)_{t \geq 0}$ se déduit de l'analogie stochastique du théorème de Cauchy–Lipschitz (voir par exemple ØKSENDAL, 2003, Theorem 5.2.1). La vérification des propriétés annoncées découle d'applications répétées de la formule d'Itô. Soit $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$. D'après la formule d'Itô appliquée à la fonction exponentielle, on en déduit

$$d[e^{\langle \mathbf{c}_t, \mathbf{x} \rangle}] = e^{\langle \mathbf{c}_t, \mathbf{x} \rangle} \left[\langle \mathbf{b}_t, \mathbf{x} \rangle + \frac{\|\mathbf{x}\|^2}{2} \right] dt + \langle \mathbf{x} e^{\langle \mathbf{c}_t, \mathbf{x} \rangle}, d\mathbf{B}_t \rangle.$$

Si on pose $q_t(\mathbf{x}) = e^{\langle \mathbf{c}_t, \mathbf{x} \rangle - t\|\mathbf{x}\|^2/2} p(\mathbf{x})$, on a donc

$$dq_t(\mathbf{x}) = q_t(\mathbf{x}) [\langle \mathbf{b}_t, \mathbf{x} \rangle dt + \langle \mathbf{x}, d\mathbf{B}_t \rangle].$$

En intégrant sur \mathbf{R}^n , il s'ensuit que le processus $Z_t = \int_{\mathbf{R}^n} q_t(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$ vérifie (en utilisant la formule $\int_{\mathbf{R}^n} \mathbf{x} q_t(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \mathbf{b}_t Z_t$),

$$dZ_t = Z_t \left[\|\mathbf{b}_t\|^2 dt + \langle \mathbf{b}_t, d\mathbf{B}_t \rangle \right],$$

puis

$$dZ_t^{-1} = -\frac{1}{Z_t^2} dZ_t + \frac{1}{Z_t^3} \|\mathbf{b}_t Z_t\|^2 dt = -\frac{\langle \mathbf{b}_t, d\mathbf{B}_t \rangle}{Z_t}.$$

Enfin, on calcule la dérivée de $p_t(\mathbf{x}) = Z_t^{-1} q_t(\mathbf{x})$ comme

$$\begin{aligned} dp_t(\mathbf{x}) &= Z_t^{-1} dq_t(\mathbf{x}) + q_t(\mathbf{x}) dZ_t^{-1}(\mathbf{x}) - \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{b}_t \rangle q_t(\mathbf{x})}{Z_t} dt \\ &= p_t(\mathbf{x}) \langle \mathbf{x}, \mathbf{b}_t \rangle dt + p_t(\mathbf{x}) \langle \mathbf{x}, d\mathbf{B}_t \rangle - p_t(\mathbf{x}) \langle \mathbf{b}_t, d\mathbf{B}_t \rangle - p_t(\mathbf{x}) \langle \mathbf{x}, \mathbf{b}_t \rangle dt \\ &= p_t(\mathbf{x}) \langle \mathbf{x} - \mathbf{b}_t, d\mathbf{B}_t \rangle, \end{aligned}$$

ce qui montre le premier point du théorème. Par intégration de la formule $dp_t(\mathbf{x}) = p_t(\mathbf{x}) \langle \mathbf{x} - \mathbf{b}_t, d\mathbf{B}_t \rangle$, on obtient

$$d\mathbf{b}_t = \mathbf{A}_t \cdot d\mathbf{B}_t$$

et on en déduit que

$$d\mathbf{A}_t = \int_{\mathbf{R}^n} (\mathbf{x} - \mathbf{b}_t)^{\otimes 2} \langle \mathbf{x} - \mathbf{b}_t, d\mathbf{B}_t \rangle p_t(\mathbf{x}) d\mathbf{x} - \mathbf{A}_t^2 dt$$

qui est le résultat annoncé. \square

Retenons comme conséquence du premier point du théorème 2.2 les informations suivantes : pour tout borélien $A \subset \mathbf{R}^n$, le processus $(\mu_t(A))_{t \geq 0}$ est une martingale d'Itô de volatilité $\sigma[\mu_t(A)] = \int_A (\mathbf{x} - \mathbf{b}_t) d\mu_t(\mathbf{x})$. De même, si A est une partie régulière, $(\mu_t^+(\partial A))_{t \geq 0}$ est une martingale d'Itô.

Il est immédiat d'après la formule (14) que l'on a presque sûrement, pour tout $t > 0$

$$\nabla^2(-\log p_t) \geq \nabla^2(-\log p) + t\text{Id} \geq t\text{Id}$$

et donc d'après le théorème 1.7

$$(15) \quad I_{\mu_t}(1/2) \gtrsim \sqrt{t}, \quad C_P(\mu_t) \leq 1/t, \quad \|\mathbf{A}_t\| \leq 1/t.$$

La mesure aléatoire μ_t possède ainsi des propriétés isopérimétriques d'autant meilleures que t est grand. La difficulté va être de contrôler le processus de localisation stochastique pour des petits temps ; on cherchera notamment à améliorer la borne (15) pour $t \ll 1$.

2.3. Exemples

Soit μ la mesure gaussienne standard sur \mathbf{R}^n . Dans ce cas, le processus de localisation stochastique associé admet une description simple puisqu'il découle de la formule (14) que la mesure aléatoire μ_t est presque sûrement gaussienne. Comme le tenseur des moments d'ordre 3 de toute mesure gaussienne est nul, on en déduit que le processus $(\mathbf{A}_t)_{t \geq 0}$ est déterministe et vérifie l'équation différentielle ordinaire $\mathbf{A}'_t = -\mathbf{A}_t^2$ qui se résout en $\mathbf{A}_t = \frac{1}{t+1}\text{Id}$. On a alors

$$\mathbf{b}_t = \int_0^t \frac{d\mathbf{B}_s}{s+1}$$

et à t fixé, \mathbf{b}_t suit la loi $N(0, \frac{t}{t+1}\text{Id})$. La mesure μ_t est donc la mesure gaussienne $N(\mathbf{b}_t, \frac{1}{t+1}\text{Id})$. On a de plus $\mathbf{c}_t = (t+1)\mathbf{b}_t$, donc \mathbf{c}_t suit la loi $N(0, t(t+1)\text{Id})$.

En dehors du cadre gaussien, il semble difficile d'obtenir des formules explicites. On peut toutefois faire la remarque suivante : si μ^1 et μ^2 sont des mesures log-concaves, respectivement sur \mathbf{R}^m et \mathbf{R}^n , alors $\mu^1 \otimes \mu^2$ est une mesure log-concave sur $\mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n$. Si $(\mu_t^1)_{t \geq 0}$ et $(\mu_t^2)_{t \geq 0}$ sont les processus de localisation stochastique associés respectivement à μ^1 et μ^2 , construits sur des mouvements browniens indépendants, alors le processus $(\mu_t^1 \otimes \mu_t^2)_{t \geq 0}$ s'identifie au processus de localisation stochastique associé à $\mu^1 \otimes \mu^2$.

Ce principe se généralise sans difficulté à un plus grand nombre de facteurs. Soit μ la loi exponentielle, c'est-à-dire la mesure log-concave sur \mathbf{R} de densité $p(x) = e^{-x}\mathbf{1}_{\{x \geq 0\}}$. Soit $(p_t)_{t \geq 0}$ le processus de localisation stochastique associé et v_t la variance de la densité p_t . On peut observer sur la densité (14) que $v_t \gtrsim 1/t$ avec probabilité positive.

Considérons maintenant la mesure sur \mathbf{R}^n obtenue comme la loi de n variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle. La matrice de covariance $\mathbf{A}_t^{(n)}$ du processus de localisation associé est diagonale et ses coefficients diagonaux sont des copies indépendantes de v_t . On en déduit l'information suivante : la fonction qui à t associe $\sup_n \mathbf{E} \|\mathbf{A}_t^{(n)}\|$ est de l'ordre de $1/t$, donc non intégrable au voisinage de 0. L'intérêt de cette remarque est d'expliquer pourquoi l'approche de Chen via la proposition 3.1 ne peut pas suffire à démontrer la conjecture KLS.

3. PREUVE DU THÉORÈME DE CHEN

Dans cette partie, on démontre le théorème de Chen à l'aide du processus de localisation stochastique. La preuve que nous présentons suit de très près le raisonnement de KLARTAG (2021) qui incorpore des simplifications attribuées à Daniel Dadush, Ronen Eldan et Joseph Lehec. Rappelons que notre but est de démontrer la borne supérieure

$$\text{KLS}_n \leq \exp \left(C \sqrt{\log n} \sqrt{\log \log n} \right).$$

D'après la proposition 1.8, il suffit de montrer que toute mesure μ sur \mathbf{R}^n , log-concave, isotrope et à support dans $R\sqrt{n}B_n$ vérifie une estimation du type

$$I_\mu(1/2) \geq \exp \left(-C \sqrt{\log n} \sqrt{\log \log n} \right).$$

On note $(\mu_t)_{t \geq 0}$ le processus de localisation stochastique associé à μ , p_t la densité de μ_t , \mathbf{b}_t son barycentre, \mathbf{A}_t sa matrice de covariance et \mathbf{T}_t son tenseur de moment centré d'ordre 3.

3.1. La stratégie générale de preuve

La première étape de la preuve de Chen, déjà présente dans les arguments antérieurs, se ramène à contrôler l'évolution de la matrice de covariance au long du processus de localisation stochastique.

PROPOSITION 3.1. — *Soit μ une mesure log-concave sur \mathbf{R}^n . Pour tout $T > 0$, on a l'inégalité*

$$I_\mu(1/2) \gtrsim \sqrt{T} \left(\frac{1}{4} - \int_0^T \mathbf{E}[\|\mathbf{A}_t\|] dt \right).$$

Démonstration. — Soit $E \subset \mathbf{R}^n$ une partie régulière vérifiant $\mu(E) = 1/2$. La propriété de martingale implique que $\mathbf{E}[\mu_T(E)] = 1/2$ et donc $\mathbf{Var}[\mu_T(E)] = \frac{1}{4} - \mathbf{E}[\mu_T(E)(1 - \mu_T(E))]$. Le cœur de l'argument est l'enchaînement d'inégalités que voici

$$\begin{aligned} \mu^+(\partial E) &= \mathbf{E}[\mu_T^+(\partial E)] \\ &\geq 2 \mathbf{E}[I_{\mu_T}(1/2) \mu_T(E)(1 - \mu_T(E))] \\ (16) \quad &\gtrsim \sqrt{T} \left(\frac{1}{4} - \mathbf{Var}[\mu_T(E)] \right). \end{aligned}$$

On a utilisé successivement le fait que $(\mu_t^+(\partial E))_{t \geq 0}$ est une martingale, l'inégalité (1), p. 2, sur le profil isopérimétrique de la mesure aléatoire μ_T et la borne inférieure presque sûre $I_{\mu_T}(1/2) \gtrsim \sqrt{T}$ observée en (15).

Puisque $(\mu_t(E))_{t \geq 0}$ est une martingale d'Itô, sa variance se calcule d'après (10) comme volatilité cumulée

$$(17) \quad \mathbf{Var}[\mu_T(E)] = \int_0^T \mathbf{E}[\|\sigma[\mu_t(E)]\|^2] dt.$$

On a

$$\boldsymbol{\sigma}[\mu_t(E)] = \int_E (\mathbf{x} - \mathbf{b}_t) d\mu_t(\mathbf{x})$$

et donc, en utilisant l'inégalité de Cauchy–Schwarz

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{\sigma}[\mu_t(E)]\| &= \sup_{\|\mathbf{u}\|=1} \langle \mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}[\mu_t(E)] \rangle \\ &= \sup_{\|\mathbf{u}\|=1} \int_E \langle \mathbf{u}, \mathbf{x} - \mathbf{b}_t \rangle d\mu_t(\mathbf{x}) \\ &\leq \left(\sup_{\|\mathbf{u}\|=1} \int_E \langle \mathbf{u}, \mathbf{x} - \mathbf{b}_t \rangle^2 d\mu_t(\mathbf{x}) \right)^{1/2} \\ &\leq \left(\sup_{\|\mathbf{u}\|=1} \int_{\mathbf{R}^n} \langle \mathbf{u}, \mathbf{x} - \mathbf{b}_t \rangle^2 d\mu_t(\mathbf{x}) \right)^{1/2} \\ (18) \qquad &= \|\mathbf{A}_t\|^{1/2}. \end{aligned}$$

On obtient la conclusion en combinant (16), (17) et (18), par passage à la borne inférieure sur E . \square

La difficulté est maintenant de contrôler la norme d'opérateur de la matrice de covariance pour des temps aussi grands que possible. La majoration $\|\mathbf{A}_t\| \leq 1/t$ valable en toute généralité est insuffisante pour cela.

Introduisons les réels $T_0(\mu)$ et $T_1(\mu)$ définis par les relations

$$\begin{aligned} T_0(\mu) &= \min \left(\frac{1}{48}, \inf \{t : \mathbf{E} \|\mathbf{A}_t\| \leq 3\} \right), \\ \int_0^{T_1(\mu)} \mathbf{E} \|\mathbf{A}_t\| dt &= \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

On a alors $I_\mu(1/2) \gtrsim \sqrt{T_1(\mu)}$ d'après la proposition 3.1. La clé de la démonstration réside dans les deux inégalités suivantes

LEMME 3.2. — *Si μ est une mesure log-concave isotrope sur \mathbf{R}^n à support contenu dans $R\sqrt{n}B_n$, alors*

$$T_0(\mu) \gtrsim \text{KLS}_n^{-2} (\log n)^{-1}.$$

LEMME 3.3. — *Si μ est une mesure log-concave isotrope sur \mathbf{R}^n , alors pour tout entier $q \geq 2$,*

$$T_1(\mu)^{2q+1} \gtrsim T_0(\mu)^{2q} n^{-1/q}.$$

On peut ainsi mettre en place une boucle de rétroaction : $T_1(\mu)$ est contrôlé par $T_0(\mu)$, lui-même contrôlé par KLS_n ; or l'inégalité $I_\mu(1/2) \geq c\sqrt{T_1(\mu)}$ permet de contrôler $T_1(\mu)$ par KLS_n .

En détails, terminons la preuve du théorème de Chen. D'après la proposition 1.8, on peut trouver une mesure log-concave isotrope sur \mathbf{R}^n , à support dans $R\sqrt{n}B_n$ et telle que $I_\mu(1/2) \asymp \text{KLS}_n^{-1}$. On a alors, pour tout entier $q \geq 2$,

$$\begin{aligned} \text{KLS}_n &\lesssim T_1(\mu)^{-1/2} \\ &\lesssim T_0(\mu)^{-\frac{q}{2q+1}} n^{\frac{1}{2q(2q+1)}} \\ &\lesssim \text{KLS}_n^{\frac{2q}{2q+1}} n^{\frac{1}{2q(2q+1)}} (\log n)^{\frac{q}{2q+1}} \end{aligned}$$

et donc il existe un réel $C > 0$ tel que

$$\text{KLS}_n \leq (C \log n)^q n^{1/2q}.$$

En choisissant la valeur optimale $q \asymp \sqrt{\log n / \log \log n}$, on obtient le résultat souhaité

$$\text{KLS}_n \leq \exp\left(C\sqrt{\log n \log \log n}\right).$$

3.2. Preuve des lemmes 3.2 et 3.3

Le processus $(\mathbf{A}_t)_{t \geq 0}$ est un processus d'Itô à valeurs matricielles. Par conséquent, pour tout entier $q \geq 2$, le processus $(\text{tr} \mathbf{A}_t^q)_{t \geq 0}$ est un processus d'Itô à valeurs scalaires. Le lemme suivant, démontré ultérieurement, majore sa dérive.

LEMME 3.4. — *Pour tout entier $q \geq 2$ un entier, on a l'inégalité*

$$\delta[\text{tr}(\mathbf{A}_t^q)] \leq 2q^2 C_P(\mu_t) \text{tr}(\mathbf{A}_t^q).$$

Expliquons comment le lemme 3.4 implique les deux estimations sur $T_0(\mu)$ et $T_1(\mu)$.

Preuve du lemme 3.2. — Pour tout $t > 0$, la mesure μ_t est (presque sûrement) à support dans $R\sqrt{n}B_n$ et vérifie donc l'inégalité $\|\mathbf{A}_t\| \leq R^2 n$.

En combinant (6) avec la proposition 1.6, on obtient

$$C_P(\mu_t) \asymp [I_{\mu_t}(1/2)]^{-2} \leq \text{KLS}_n^2 [I_{\mu_t}^{\text{lin}}(1/2)]^{-2} \asymp \text{KLS}_n^2 \|\mathbf{A}_t\|$$

et le lemme 3.4 (appliqué pour un entier $q \geq 2$ à déterminer) implique que

$$\delta[\text{tr}(\mathbf{A}_t^q)] \lesssim q^2 \text{KLS}_n^2 \|\mathbf{A}_t\| \text{tr}(\mathbf{A}_t^q).$$

Soit τ le temps d'arrêt défini par $\tau = \inf\{t > 0 : \|\mathbf{A}_t\| \geq 2\}$. Notons $X_t = \text{tr}(\mathbf{A}_{t \wedge \tau}^q)$ le processus arrêté. Sa dérive, décrite par (13), satisfait

$$\delta[X_t] \lesssim q^2 \text{KLS}_n^2 X_t$$

et donc la fonction $f(t) = \mathbf{E}[X_t]$ vérifie d'après (9) l'inégalité différentielle

$$f'(t) \lesssim q^2 \text{KLS}_n^2 f(t).$$

Puisque $f(0) = n$, on en déduit, pour une constante $C > 0$, la borne $f(t) \leq n \exp(Cq^2 \text{KLS}_n^2 t)$ pour tout $t > 0$. On peut écrire

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \|\mathbf{A}_t\| &\leq 2 + R^2 n \mathbf{P}(\|\mathbf{A}_t\| \geq 2) \\ &\leq 2 + R^2 n \mathbf{P}(X_t \geq 2^q) \\ &\leq 2 + R^2 n 2^{-q} \mathbf{E}[X_t] \\ &\leq 2 + R^2 n^2 2^{-q} \exp(Cq^2 \text{KLS}_n^2 t). \end{aligned}$$

Choisissons $q \asymp \log n$ de sorte que $R^2 n^2 2^{-q} \leq n^{-1}$. L'inégalité $\mathbf{E} \|\mathbf{A}_t\| \leq 3$ est alors vérifiée dès que $Cq^2 \text{KLS}_n^2 t \leq \log n$. Nous avons bien démontré

$$T_0(\mu) \gtrsim q^{-2} \text{KLS}_n^{-2} \log n \gtrsim \text{KLS}_n^{-2} (\log n)^{-1}. \quad \square$$

Preuve du lemme 3.3. — D'après (15), on a presque sûrement l'inégalité $C_P(\mu_t) \leq 1/t$, que l'on combine avec le lemme 3.4 pour obtenir

$$\delta[\text{tr}(\mathbf{A}_t^q)] \leq \frac{2q^2}{t} \text{tr}(\mathbf{A}_t^q).$$

Puisque la fonction $x \mapsto x^{1/q}$ est concave, on a

$$\delta[\|\mathbf{A}_t\|_q] \leq \frac{2q}{t} \|\mathbf{A}_t\|_q.$$

La fonction $f: t \mapsto \mathbf{E} \|\mathbf{A}_t\|_q$ vérifie donc l'inégalité différentielle

$$(\log f)'(t) \leq \frac{2q}{t}.$$

Posons $T_0 = T_0(\mu)$ et $T_1 = T_1(\mu)$. Puisque $f(T_0) \leq 3n^{1/q} \mathbf{E} \|\mathbf{A}_{T_0}\| \leq 3n^{1/q}$, on a pour tout $t \geq T_0$,

$$\log f(t) - \log f(T_0) \leq \int_{T_0}^t \frac{2q}{u} du = 2q(\log t - \log T_0),$$

ou encore $f(t) \leq (t/T_0)^{2q} 3n^{1/q}$. On a donc

$$\frac{1}{8} - \frac{1}{16} \leq \int_{T_0}^{T_1} \mathbf{E} \|\mathbf{A}_t\| dt \leq \int_{T_0}^{T_1} f(t) dt \leq 3n^{1/q} \int_{T_0}^{T_1} \left(\frac{t}{T_0}\right)^{2q} dt \leq 3n^{1/q} \frac{T_1^{2q+1}}{T_0^{2q}}. \quad \square$$

3.3. Calculs sur la matrice de covariance

Commençons par démontrer une inégalité qui relie la matrice de covariance et le tenseur de moment centré d'ordre 3 d'une mesure log-concave. Il sera commode d'identifier ce dernier à une application linéaire $\mathbb{T}: \mathbf{R}^n \rightarrow M_n(\mathbf{R})$. Ainsi, pour tout \mathbf{x} dans \mathbf{R}^n , $\mathbb{T}(\mathbf{x})$ est une matrice symétrique.

LEMME 3.5. — *Soit μ une mesure log-concave sur \mathbf{R}^n , \mathbf{A} sa matrice de covariance et \mathbb{T} son tenseur de moment centré d'ordre 3. Pour tous \mathbf{x}, \mathbf{y} dans \mathbf{R}^n , on a*

$$[\text{tr}(\mathbb{T}(\mathbf{x})\mathbb{T}(\mathbf{y}))]^2 \leq 4C_P(\mu) \langle \mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \text{tr}(\mathbf{A}\mathbb{T}(\mathbf{y})^2).$$

Démonstration. — On peut supposer que μ est centrée. Soient \mathbf{x} et \mathbf{y} dans \mathbf{R}^n . Puisque $\int_{\mathbf{R}^n} \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle d\mu(\mathbf{z}) = 0$, on peut écrire par l'inégalité de Cauchy–Schwarz

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(\mathbb{T}(\mathbf{x})\mathbb{T}(\mathbf{y})) &= \int_{\mathbf{R}^n} \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle \langle \mathbb{T}(\mathbf{y})\mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle d\mu(\mathbf{z}) \\ &\leq \left(\int_{\mathbf{R}^n} \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle^2 \right)^{1/2} \operatorname{Var}_\mu(f)^{1/2} \end{aligned}$$

où $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ est la fonction définie par $f(\mathbf{z}) = \langle \mathbb{T}(\mathbf{y})\mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle$. Puisque $|\nabla f(\mathbf{z})|^2 = 4|\mathbb{T}(\mathbf{y})\mathbf{z}|^2$, l'inégalité de Poincaré s'écrit alors

$$\operatorname{Var}_\mu(f) \leq C_P(\mu) \int_{\mathbf{R}^n} \|\nabla f\|^2 d\mu = 4C_P(\mu) \int_{\mathbf{R}^n} \|\mathbb{T}(\mathbf{y})\mathbf{z}\|^2 d\mu(\mathbf{z}) = 4C_P(\mu) \operatorname{tr}(\mathbf{A}\mathbb{T}(\mathbf{y})^2),$$

d'où le résultat. \square

Démontrons maintenant le lemme 3.4. Le processus $(\mathbf{A}_t)_{t \geq 0}$ est un processus d'Itô à valeurs matricielles, de dérive et de volatilité données par le théorème 2.2 comme

$$\delta[\mathbf{A}_t] = -\mathbf{A}_t^2, \quad \sigma[\mathbf{A}_t] = \mathbb{T}_t.$$

Pour tout entier $q \geq 1$, le processus $(\mathbf{A}_t^q)_{t \geq 0}$ est également un processus d'Itô à valeurs matricielles. Soit (\mathbf{e}_k) la base canonique de \mathbf{R}^n . En itérant les formules (11)–(12), p. 9, sur le produit de processus d'Itô, on calcule sa dérive comme étant

$$\delta[\mathbf{A}_t^q] = -q\mathbf{A}_t^{q+1} + \sum_{k=1}^n \sum_{1 \leq i < j \leq q} \mathbf{A}_t^{i-1} \mathbb{T}_t(\mathbf{e}_k) \mathbf{A}_t^{j-i} \mathbb{T}_t(\mathbf{e}_k) \mathbf{A}_t^{q-j-1}.$$

Puisque la matrice $-\mathbf{A}_t^{q+1}$ est de trace négative, on a

$$\delta[\operatorname{tr}(\mathbf{A}_t^q)] \leq \sum_{k=1}^n \sum_{1 \leq i < j \leq q} \operatorname{tr}(\mathbf{A}_t^{q+i-j-2} \mathbb{T}_t(\mathbf{e}_k) \mathbf{A}_t^{j-i} \mathbb{T}_t(\mathbf{e}_k)).$$

Si M est une matrice symétrique positive et N est une matrice symétrique, on a pour tout $0 \leq x \leq 1$ l'inégalité

$$\operatorname{tr}(M^x N M^{1-x} N) \leq \operatorname{tr}(M N^2)$$

(en effet, si on note $f(x)$ le membre de gauche, il suit de l'inégalité de Cauchy–Schwarz que $f(\frac{x_1+x_2}{2}) \leq \sqrt{f(x_1)f(x_2)}$ et le résultat se déduit de la convexité de $\log f$). On a donc

$$(19) \quad \delta[\operatorname{tr}(\mathbf{A}_t^q)] \leq \binom{q}{2} \operatorname{tr}(\mathbf{A}_t^{q-2} \sum_k \mathbb{T}_t(\mathbf{e}_k)^2) = \binom{q}{2} \operatorname{tr}(\mathbf{A}_t^{q-2} \mathbb{T}_t^* \mathbb{T}_t)$$

Soit (\mathbf{x}_k) une base orthonormée de vecteurs propres de la matrice symétrique \mathbf{A}_t , vérifiant $\mathbf{A}_t \mathbf{x}_k = \lambda_k \mathbf{x}_k$ (on omet la dépendance en t pour alléger la notation). On a, en utilisant

le lemme 3.5 puis l'inégalité de Cauchy–Schwarz,

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}(\mathbf{A}_t^{q-2} \mathbf{T}_t^* \mathbf{T}_t) &= \sum_{k=1}^n \lambda_k^{q-2} \mathrm{tr}(\mathbf{T}_t(\mathbf{x}_k)^2) \\
&\leq 2\sqrt{C_P(\mu_t)} \sum_{k=1}^n \lambda_k^{q-2} \sqrt{\lambda_k} \sqrt{\mathrm{tr}(\mathbf{A}_t \mathbf{T}_t(\mathbf{x}_k)^2)} \\
&\leq 2\sqrt{C_P(\mu_t)} \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k^q \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k^{q-3} \mathrm{tr}(\mathbf{A}_t \mathbf{T}_t(\mathbf{x}_k)^2) \right)^{1/2} \\
&\leq 2\sqrt{C_P(\mu_t)} (\mathrm{tr}(\mathbf{A}_t^q))^{1/2} (\mathrm{tr}(\mathbf{A}_t^{q-2} \mathbf{T}_t^* \mathbf{T}_t))^{1/2}
\end{aligned}$$

et on en déduit l'inégalité $\mathrm{tr}(\mathbf{A}_t^{q-2} \mathbf{T}_t^* \mathbf{T}_t) \leq 4C_P(\mu_t) \mathrm{tr}(\mathbf{A}_t^q)$, qui combinée avec (19) termine la preuve du lemme 3.4.

RÉFÉRENCES

- Franck BARTHE (2010). « Un théorème de la limite centrale pour les ensembles convexes (d'après Klartag et Fleury-Guédon-Paouris) », in : 332. Séminaire Bourbaki. Volume 2008/2009. Exposés 997–1011, Exp. No. 1007, ix, 287-304.
- Jean BOURGAIN (1986). « On high-dimensional maximal functions associated to convex bodies », *Amer. J. Math.* **108** (6), p. 1467-1476.
- Peter BUSER (1982). « A note on the isoperimetric constant », *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **15** (2), p. 213-230.
- Luis A. CAFFARELLI (2000). « Monotonicity properties of optimal transportation and the FKG and related inequalities », *Comm. Math. Phys.* **214** (3), p. 547-563.
- Yuansi CHEN (2021). « An almost constant lower bound of the isoperimetric coefficient in the KLS conjecture », *Geometric and Functional Analysis* **31** (1), p. 34-61.
- Ronen ELDAN (2013). « Thin shell implies spectral gap up to polylog via a stochastic localization scheme », *Geom. Funct. Anal.* **23** (2), p. 532-569.
- (2022). « Analysis of high-dimensional distributions using pathwise methods ». In : *Proceedings of ICM*.
- Ronen ELDAN et Bo'az KLARTAG (2011). « Approximately Gaussian marginals and the hyperplane conjecture », in : *Concentration, functional inequalities and isoperimetry*. T. 545. Contemp. Math. Amer. Math. Soc., Providence, RI, p. 55-68.
- Ravindran KANNAN, László LOVÁSZ et Miklós SIMONOVITS (1995). « Isoperimetric problems for convex bodies and a localization lemma », *Discrete Comput. Geom.* **13** (3-4), p. 541-559.
- Bo'az KLARTAG (2006). « On convex perturbations with a bounded isotropic constant », *Geom. Funct. Anal.* **16** (6), p. 1274-1290.
- (jan. 2021). *On Yuansi Chen's work on the KLS conjecture*. Lecture notes for a Winter School at the Hausdorff Institute.

- Michel LEDOUX (1994). « A simple analytic proof of an inequality by P. Buser », *Proc. Amer. Math. Soc.* **121** (3), p. 951-959.
- Yin Tat LEE et Santosh S. VEMPALA (2017). « Eldan’s stochastic localization and the KLS hyperplane conjecture : an improved lower bound for expansion », in : *58th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science—FOCS 2017*. IEEE Computer Soc., Los Alamitos, CA, p. 998-1007.
- (2019). « The Kannan-Lovász-Simonovits conjecture », in : *Current developments in mathematics 2017*. Int. Press, Somerville, MA, p. 1-36.
- Emanuel MILMAN (2009). « On the role of convexity in isoperimetry, spectral gap and concentration », *Invent. Math.* **177** (1), p. 1-43.
- Bernt ØKSENDAL (2003). *Stochastic differential equations*. Sixth. Universitext. An introduction with applications. Springer-Verlag, Berlin, p. xxiv+360.
- Peter STERNBERG et Kevin ZUMBRUN (1999). « On the connectivity of boundaries of sets minimizing perimeter subject to a volume constraint », *Comm. Anal. Geom.* **7** (1), p. 199-220.

Guillaume Aubrun

Université Claude Bernard Lyon 1

Institut Camille Jordan

43 boulevard du 11 novembre 1918

69622 VILLEURBANNE CEDEX

E-mail : aubrun@math.univ-lyon1.fr