Exercice 12

(1) Voyons l'existence. Soit $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ définie par $f(M) = O + l(\overrightarrow{OM})$, ainsi on a : $\overrightarrow{Of(M)} = l(\overrightarrow{OM})$. On remarque déjà que $f(O) = O$. On voit que f est affine car pour tout M, $\overrightarrow{f(O)f(M)} = l(\overrightarrow{OM})$.
Voyons l'unicité. Soient f affine telle que $f(O) = O$ et $\overrightarrow{f} = l$. Soit $M \in \mathcal{E}$. Alors $\overrightarrow{Of(M)} = \overrightarrow{f(O)f(M)} = l(\overrightarrow{OM})$ ce qui signifie que $f(M) = O + l(\overrightarrow{OM})$. Ainsi l'expression de $f(M)$ est uniquement déterminée. (Remarque, on aurait pu prendre deux applications affines f et g avec les conditions requises et montrer que $f = g$.)

(2) Le but ici est de montrer que pour toute application affine $\phi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ il existe un unique couple (u, ψ) avec $u \in E$ et $\psi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ affine telle que $\psi(O) = O$ tel que $\phi = t_u \circ \psi$.
Faisons une analyse ce qui montrera l'unicité. Supposons qu'un tel couple (u, ψ) existe.
Alors $\phi(O) = t_u(\psi(O)) = t_u(O) = O + u$ donc $u = \overrightarrow{O\phi(O)}$. D'autre part on sait qu'une translation t_u est bijective et que son application inverse est t_{-u} (si on ne le sait pas, ça se démontre trivialement en composant les deux). L'hypothèse nous dit que $\phi = t_u \circ \psi$. On compose par t_{-u} et on obtient $\psi = t_{-u} \circ \phi$. Cela montre que u et ψ sont bien uniques.
Voyons l'existence. On pose $u = \overrightarrow{O\phi(O)}$ et $\psi = t_{-u} \circ \phi$. On a immédiatement que ψ est affine. De plus en composant par t_u on a $\phi = t_u \circ \psi$ et d'autre part quand on évalue en O on obtient : $\phi(O) = t_u(\psi(O)) = u + \psi(O) = \overrightarrow{O\phi(O)} + \psi(O)$ d'où $\overrightarrow{\psi(O)\phi(O)} = \overrightarrow{O\phi(O)}$ ce qui montre que $\psi(O) = O$.

(3) Il est facile de vérifier que $GA_O(\mathcal{E})$ est un sous-groupe de $GA(\mathcal{E})$ (laissé en exercice). On considère alors l'application $\alpha : GA_O(\mathcal{E}) \to GL(E)$ définie par $\alpha(f) = \overrightarrow{f}$. Cette application est un morphisme de groupe (voir le CM ou le faire en exercice). Pour finir, la question 1 nous dit que pour tout $l \in GL(E)$ il existe un unique $f \in GA_O(\mathcal{E})$ tel que $\overrightarrow{f} = l$, autrement dit tout élément de l'ensemble d'arrivée admet un unique antécédent par α ce qui montre que α est bijective.

(4) Supposons pour commencer que $\overrightarrow{f}$ ait 1 comme valeur propre et soit $v \in E$ un vecteur propre associé.
Soient $A, B \in \mathcal{E}$ tels que $\overrightarrow{AB} = v$. Alors $\overrightarrow{AB} = v = \overrightarrow{f}(v) = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{f(A)f(B)}$. Si maintenant A est un point fixe de f alors en posant $B = A + v$, on obtient $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{Af(B)}$ ce qui entrain $f(B) = B$ et B est un autre point fixe. Ce la montre que si on suppose que 1 est une valeur propre de $\overrightarrow{f}$ alors on a deux possibilités : soit f n'a aucun point fixe, soit f a au moins deux points fixes.
L'implication qu'on vient d'énoncer montre (par contraposée) que si f a un unique point fixe alors 1 n'est pas valeur propre de $\overrightarrow{f}$.
Supposons que 1 n'est pas valeur propre de $\overrightarrow{f}$ et montrons que f admet un unique point fixe.
Voyons l'unicité. Supposons par l'absurde qu'on ait au moins deux points fixes (distincts) A et B. Notons $v = \overrightarrow{AB}$. Ce vecteur est non nul. De plus $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{f(A)f(B)} = \overrightarrow{AB}$ i.e. $\overrightarrow{f}(v) = v$ donc 1 est une valeur propre ce qui est absurde.
Pour finir montrons l'existence.
Il me semble qu'on est obligé de supposer que $\dim(E)$ est finie, c'est ce que je fais. Dire que 1 n'est pas valeur propre signifie que $\ker(\overrightarrow{f} - \mathrm{Id}_E) = \{0\}$. Comme on est en dimension finie, cela implique que l'application $\overrightarrow{f} - \mathrm{Id}_E$ est surjective. Soit maintenant $A \in \mathcal{E}$. Si $f(A) = A$ il n'y a rien à faire, on a notre point fixe. On suppose donc que $\overrightarrow{Af(A)} \neq \overrightarrow{0}$. Soit $M \in \mathcal{E}$ quelconque. On a la suite d'équivalence suivante :

$$\begin{aligned} f(M) = M &\iff \overrightarrow{Mf(M)} = \overrightarrow{0} \\ &\iff \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{Af(A} + \overrightarrow{f(A)f(M)} = \overrightarrow{0} \\ &\iff \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{Af(A)} + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{AM}) = \overrightarrow{0} \\ &\iff (\overrightarrow{f} - \mathrm{Id}_E)(\overrightarrow{AM}) = \overrightarrow{f(A)A}. \end{aligned}$$

Par la surjectivité évoquée plus haut, soit u un antécédent de $\overrightarrow{f(A)A}$ par $\overrightarrow{f} - \mathrm{Id}_E$ puis soit M définie par $M = A + u$, i.e. $\overrightarrow{AM} = u$. On a donc $(\overrightarrow{f} - \mathrm{Id}_E)(\overrightarrow{AM}) = \overrightarrow{f(A)A}$ et en remontant les équivalence on obtient M comme point fixe.

Exercice 13

(1) D'après le cours, $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ est soit vide soit un sous-espace affine de direction $F \cap G = \{0\}$. Autrement dit c'est soit vide soit un singleton. Montrons que ce n'est pas vide. Écrivons $\mathcal{F} = A + F$ et $\mathcal{G} = B + G$. On décompose le vecteur $\overrightarrow{AB}$ dans la somme directe $E = F \oplus G$ et on l'écrit $\overrightarrow{AB} = u + v$ avec $u \in F$ et $v \in G$. On pose alors $C = A + u$. Alors d'une part $C \in \mathcal{F}$ et d'autre part $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = -u + (u + v) = v$ donc $BC = -v$ i.e. $C = B - v$ ce qui entraîne $C \in \mathcal{G}$. Ainsi $C \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ qui n'est pas vide.

(2) Remarquons d'abord que pour les mêmes raisons qu'à la question 1, $\mathcal{F} \cap (M + G)$ est un singleton pour tout point M.
Montrons l'implication gauche-droite.
Par hypothèse $M' = p(M) = \mathcal{F} \cap (M + \mathcal{G})$ donc $M' \in \mathcal{F}$. D'autre part $M' \in M + \mathcal{G}$ ce qui signifie que $\overrightarrow{MM'} \in G$.
Voyons l'implication inverse.
Par hypothèse $M' \in \mathcal{F}$. D'autre part $\overrightarrow{MM'} \in G$ implique $M' \in M + G$ ainsi $M' \in \mathcal{F} \cap (M + G)$.

(3) Notons $O = \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$. Montrons l'implication gauche-droite.
On a $p(O) = \mathcal{F} \cap (O + G) = \mathcal{F} \cap \mathcal{G} = O$ donc O est un point fixe de p. On note $\pi : E \to E$ la projection (vectorielle) sur F parallèlement à G et on définit $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ par $f(M) = O + \pi(\overrightarrow{OM})$. Cette application est bien affine avec $\overrightarrow{f} = \pi$ car $\overrightarrow{f(O)f(M)} = \overrightarrow{Of(M)} = \pi(\overrightarrow{OM})$.
Montrons que $f = p$. Soit $M \in \mathcal{E}$. On décompose $\overrightarrow{OM} = u + v$ avec $u \in F$ et $v \in G$. Par définition $f(M) = O + u$ ce qui implique $f(M) \in \mathcal{F}$. De plus $\overrightarrow{Mf(M)} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{Of(M)}(-u - v) + u = -v \in G$. Ainsi $f(M) = p(M)$. On a donc montré que la partie linéaire de p est une projection vectorielle et que O est un point fixe de p.
Réciproquement, on suppose que la partie linéaire de f est une projection vectorielle (i.e. est de la forme π selon les notations précédentes) et on suppose que f admet un certain point fixe O. Dans ce cas, la démo précédente montrer que f est la projection affine sur $\mathcal{F}$ parallèlement à $\mathcal{G}$.

(4) Montrons l'implication gauche-droite.
On a déjà vu au (3) que p est bien une application affine. Montrons que $p^2 = p$. Soit $M \in \mathcal{E}$ et soit $M' = p(M)$ et soit $M'' = p(M')$. Par construction $M'' \in \mathcal{F}$. De plus $\overrightarrow{MM''} = \overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{M'M''}$ et ces deux vecteurs sont dans G par construction donc $\overrightarrow{MM''}$ aussi. Cela entraine (par (2)) que $M'' = M'$.
Voyons l'implication inverse.
Par le CM, $\overrightarrow{p \circ p} = \overrightarrow{p} \circ \overrightarrow{p} = \overrightarrow{p}$ donc $\overrightarrow{p}$ est une projection vectorielle. Par conséquent il existe F et G supplémentaires dans E tels que $\overrightarrow{p}$ soit la projection vectorielle sur F parallèlement à G.
Soit maintenant $\mathcal{F} = p(\mathcal{E})$. C'est un sous-espace affine dont la direction est $\overrightarrow{p}(E) = F$ (c'est F car $\overrightarrow{p}$ est une projection vectorielle sur F). On prend $O \in \mathcal{F}$ et on pose $\mathcal{G} = O + G$. Montrons que p est alors la projection affine sur $\mathcal{F}$ parallèlement à $\mathcal{G}$.
Soit donc $M \in \mathcal{E}$ quelconque et soit $M' = p(M)$. Alors

$$\overrightarrow{p}(\overrightarrow{Mp(M)}) = \overrightarrow{p(M)p(p(M))} = \overrightarrow{p(M)p(M)} = \overrightarrow{0}.$$

Par conséquent, $\overrightarrow{MP(M)}$ appartient à G et comme par construction de $\mathcal{F}$, $p(M) \in \mathcal{F}$ cela entraine (par (2)) que $p(M)$ est l'image de M par la projection affine sur $\mathcal{F}$ parallèlement à $\mathcal{G}$.

(5) Soient $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (x + 1, 0)$. Cette application consiste en $f = p \circ t$ où p est la projection affine sur Ox parallèlement à Oy et t est la translation de vecteur $(1, 0)$. C'est donc bien une application affine. D'autre part $\overrightarrow{f} = \overrightarrow{p} \circ \overrightarrow{t} = \overrightarrow{p} \circ \mathrm{Id}_E$ (exo) donc $\overrightarrow{f}$ est bien une projection vectorielle. Par contre f n'est pas une projection affine car f n'a aucun point fixe puisque l'égalité $(x, y) = (x + 1, 0)$ est impossible dans $\mathbb{R}^2$.