UNIVERSITÉ D'ANGERS

Année : 2003
N° d'ordre : 568

CONTRIBUTIONS A L'ETUDE DES IDEAUX DE BERNSTEIN-SATO D'UN POINT DE VUE CONSTRUCTIF

THÈSE DE DOCTORAT

Spécialité : Mathématiques

ÉCOLE DOCTORALE D'ANGERS

Présentée et soutenue publiquement

le 27 Mai 2003
à l'université d'Angers
par Rouchdi BAHLOUL

Devant le jury ci-dessous :

Joël BRIANÇON,
Rapporteur, Professeur, Université de Nice Sophia-Antipolis
Philippe DU BOIS,
Examinateur, Professeur, Université d'Angers
Monique LEJEUNE-JALABERT,
Examinateur, Directrice de Recherche, UVSQ (Versailles)
Toshinori OAKU,
Rapporteur, Professeur, Tokyo Woman's Christian University
Claude SABBAH,
Examinateur, Directeur de Recherche, Ecole Polytechnique

Directeur de thèse : Michel GRANGER, Professeur, Université d'Angers

Nom et coordonnées du laboratoire : U.M.R N° 6093 associée au CNRS
2 Bd Lavoisier, 49045 Angers cedex 01, France

A mes parents,
à Chokri et Riad et leurs familles,
à Nathalie.

Remerciements

Par ces quelques lignes, j'aimerais remercier un certain nombre de personnes qui m'ont accompagné durant une partie ou la totalité de ma thèse.

En premier lieu, je voudrais dire un grand merci à mon “prof” Michel Granger. Cette thèse n'aurait pu voir le jour sans lui. Je le remercie pour la confiance qu'il a mise en moi, pour sa disponibilité sans faille, pour sa gentillesse et tout le professionnalisme avec lequel il m'a guidé durant ces années. Notre rencontre a eu lieu il y a plus de huit ans durant ma deuxième année de DEUG dans un cours consacré à la topologie de $\mathbf{R}$ et la dénombrabilité. Ensuite, il m'a accompagné durant toutes les années suivantes : en Licence avec un cours d'intégration, en Maîtrise avec un cours de Distributions et enfin en DEA avec un cours sur les $\mathcal{D}$-modules. Aujourd'hui, je mesure toute la chance de l'avoir croisé sur ma route.

Je tiens à adresser mes remerciements les plus sincères à Joël Briançon pour avoir accepté la tâche de rapporteur. Merci pour les remarques et les suggestions qu'il m'a communiquées durant la lecture. Dans ma thèse, je me suis beaucoup appuyé sur ses articles dont une partie écrite avec Philippe Maisonobe, et dont j'ai essayé de garder le style “coulé”.

Merci aussi sincèrement à Toshinori Ôaku, mon second rapporteur. Ma thèse s'inspire aussi fortement de ses travaux. Merci aussi pour m'avoir aidé à deux reprises dans la mise au point de mes programmes sur kan.

Merci à Claude Sabbah. Sa présence dans mon jury me touche profondément, j'en suis honoré.

Merci à Monique Lejeune-Jalabert pour avoir accepté d'être présente à mon jury. Mon chapitre 4 est dans la lignée de ses travaux.

Enfin, merci à Philippe du Bois pour avoir accepté d'être membre de mon jury.

Je remercie Abdallah Assi pour la lecture attentive du premier jet de ma thèse.

Je suis reconnaisant à Francisco Castro Jiménez pour son invitation à l'Université de Séville en juin 2002 et pour les discussions intéressantes que nous y avons eues. Ce fut une semaine vraiment agréable pour laquelle je ne peux manquer de dire merci également à Luis Narváez Macarro et José María Ucha Enríquez.

Des mercis à François Ducrot pour le temps passé à installer kan/sm1, à Nobuki Takayama pour l'aide apportée à ce sujet ainsi qu'à Philippe Maisonobe pour l'agréable semaine passée à Kaiserslautern.

Ces remerciements seraient bien bancals si je ne disais pas un mot à mon ami Paltin Ionescu. C'est lui qui m'a donné l'envie d'en savoir plus sur les maths durant le trop court trimestre où j'ai suivi ses TD lors d'un de ses séjours en tant qu'invité. Je souhaite à tout étudiant la chance d'avoir un jour un tel enseignant.

Pour finir, un gros coucou à tous les thésards d'Angers que j'ai cotoyés : ceux de ma “génération”, Bertrand, Céline, David, Franck, Goulwen, Mathieu, Oleg ; les p'tits nouveaux, Dika, Jean-Marc, Ludovic, Pascal, Souleymane, Thomasz ; et les anciens, Isabelle, Nicolas, Xavier, Yacoub (cette classification est purement arbitraire et n'engage que son auteur).

Table des matières

Notations et conventions

- ♦ **R** corps des réels
- ♦ **C** corps des complexes
- ♦ **Q** corps des rationnels
- ♦ **Z** entiers
- ♦ **N** entiers positifs ou nuls
- ♦ **k**, **K** corps de caractéristique[1] 0
- ♦ $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$
- ♦ $\partial_{x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}$
- ♦ $\partial_x^\alpha = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_n}^{\alpha_n}$
- ♦ $(x, \partial_x)^{(\alpha,\beta)} = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} \partial_{x_1}^{\beta_1} \cdots \partial_{x_n}^{\beta_n}$ où $(\alpha, \beta) \in \mathbf{N}^{2n}$
- ♦ $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$
- ♦ $(\alpha|\beta) = \sum \alpha_i \beta_i$
- ♦ $< F >$ idéal engendré par F
- ♦ $V(Q)$, $V(h)$ lieu des zéros de l'idéal Q (resp. de la fonction h)
- ♦ Idéal signifie idéal à gauche

[1] dans tout le texte, corps signifie corps de caractéristique 0

Introduction

Dans ce travail de thèse, nous allons nous intéresser au polynôme de Bernstein et aux idéaux de Bernstein-Sato. Nous allons les décrire. Soit $f = (f_1, \ldots, f_p)$ une application polynomiale où les f_j appartiennent à $\mathbf{k}[x_1, \ldots, x_n]$ ($\mathbf{k}$ étant un corps) ou analytique et dans ce cas les f_j sont dans $\mathbf{C}\{x_1, \ldots, x_n\}$. Soient $s_1, \ldots, s_p$ des indéterminées. Considérons l'équation suivante :

$$(\star) \qquad b(s_1, \ldots, s_p) f_1^{s_1} \cdots f_p^{s_p} = P f_1^{s_1+1} \cdots f_p^{s_p+1}.$$

On note $\mathbf{A}_n(\mathbf{k})$ l'algèbre des opérateurs différentiels à coefficients dans $\mathbf{k}[x_1, \ldots, x_n]$ et $\mathbf{A}_n(\mathbf{k})[s] = \mathbf{A}_n(\mathbf{k}) \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}[s_1, \ldots, s_p]$. De plus on note $\mathcal{D}_n$ l'anneau des opérateurs différentiels à coefficients dans $\mathbf{C}\{x_1, \ldots, x_n\}$ et $\mathcal{D}_n[s] = \mathcal{D}_n \otimes_{\mathbf{C}} \mathbf{C}[s_1, \ldots, s_p]$.

Lorsque f est polynomiale (resp. analytique), on note $\mathcal{B}_{alg}$ (resp. $\mathcal{B}_{an}$) l'idéal de $\mathbf{k}[s_1, \ldots, s_p]$ (resp. $\mathbf{C}[s_1, \ldots, s_p]$) constitué des polynômes $b(s)$ satisfaisant à $(\star)$ avec P appartenant à $\mathbf{A}_n(\mathbf{k})[s]$ (resp. $\mathcal{D}_n[s]$). L'idéal $\mathcal{B}_{alg}$ est appelé idéal de Bernstein-Sato algébrique associé à f et $\mathcal{B}_{an}$ idéal de Bernstein-Sato analytique associé à f. Maintenant lorsque $p = 1$, on note b_f le générateur unitaire de $\mathcal{B}_{alg}$ (resp. $\mathcal{B}_{an}$) et on l'appelle le polynôme de Bernstein algébrique (resp. analytique).

C'est I.N. Bernstein dans l'article [**Be**] tant de fois cité qui démontra la non nullité de $\mathcal{B}_{alg}$ dans le cas $p = 1$. Puis J.E. Björk le démontra dans le cas analytique dans un preprint non publié. Ensuite M. Kashiwara [**K**] publia la preuve de la non nullité de $\mathcal{B}_{an}$ dans le cas $p = 1$ en montrant de plus que le polynôme de Bernstein est à racines rationnelles négatives. En ce qui concerne le cas où p est plus grand que 1, la preuve donnée par I.N. Bernstein s'adapte facilement pour $\mathcal{B}_{alg}$. Pour ce qui est de $\mathcal{B}_{an}$, le fait qu'il soit non nul est dû à C. Sabbah (voir [**S1**] et [**S2**]). Signalons ici la contribution de A. Gyoja [**G**] qui démontra un résultat supplémentaire, à savoir que $\mathcal{B}_{an}$ contient un élément rationnel (signalons aussi que C. Sabbah connaissait ce résultat mais ne l'a pas publié).

Les idéaux de Bernstein-Sato (appellation qu'on réserve au cas $p \geq 2$) n'ont aucune raison d'être principaux. Et en effet, J. Briançon et H. Maynadier [**Br-May**] ont fourni un exemple d'un germe d'applications analytiques pour lequel l'idéal de Bernstein-Sato n'est pas principal.

Historiquement, le polynôme de Bernstein (associé à un polynôme) trouve son origine dans une question posée en 1954 par I.M. Gelfand au congrès international d'Amsterdam. Etant donné une fonction polynomiale positive sur $\mathbf{R}^n$, peut-on prolonger la distribution $s \mapsto f^s$ (à priori holomorphe sur le demi-plan $Re(s) > 0$) en une fonction méromorphe sur $\mathbf{C}$? Deux preuves indépendantes mais utilisant la résolution des singularités par H. Hironaka ([**Hi**]) ont été données par I.N. Bernstein et I.M. Gelfand en 1969 ([**Be-G**]) et par M.F. Atiyah en 1970 ([**At**]). Dans ces deux articles, il a été démontré que la distribution f^s se prolonge méromorphiquement sur $\mathbf{C}$ avec des pôles contenus dans $\{-1/N, -2/N, \ldots\}$ où N est entier dépendant de f. En 1972, I.N. Bernstein trouve une autre preuve du prolongement de f^s en introduisant le polynôme de Bernstein et en montrant son existence. Ce prolongement montre que les pôles sont contenus dans l'ensemble des $\lambda - k$ où λ est une racine de b_f et k un entier positif ou nul. Signalons que l'existence du polynôme de Bernstein (algébrique) se prouve par des moyens peu onéreux, par contre pour montrer que les pôles du prolongement sont rationnels, autrement dit pour montrer que les racines de b_f sont rationnels on a besoin à nouveau d'utiliser la résolution des singularités.

Introduit dans la théorie des distributions, le polynôme de Bernstein occupe maintenant une place importante dans la théorie des singularités depuis que B. Malgrange (dans [**Mal**]) a montré le lien étroit qui existe entre les racines du polynôme de Bernstein et l'action de la monodromie sur la cohomologie de la fibre de Milnor du germe de fonctions (à singularité isolé) auquel le polynôme de Bernstein est attaché. A côté de ce point de vue topologique et algébrique, il y a aussi le souci de calculer explicitement le polynôme de Bernstein associé à une fonction polynomiale ou analytique. On sait facilement calculer le polynôme de Bernstein associé à une singularité quasi-homogène, on sait depuis [**Br-G-M-M**] calculer le polynôme de Bernstein d'une singularité semi quasi-homogène et d'une singularité non dégénérée (au sens de Kouchnirenko). T. Oaku a donné un algorithme de calcul du polynôme de Bernstein associé à un polynôme dans le cas le plus général. L'algorithme en question est fondé sur la théorie des bases de Gröbner, théorie dont le point de départ est la thèse de B. Buchberger qui fût un élève de W. Gröbner. L'algorithme de T. Oaku dont nous parlons se trouve dans [**O2**]. Cet article a été le point de départ de la présente thèse. En effet, mon premier travail a été de tenter une généralisation de cet algorithme. Ce travail a donné lieu à un article paru au J. Symb. Comp. en 2001 et qui fait l'objet du dernier chapitre de cette thèse. Nous en dirons plus un peu plus loin.

Une fois ce travail accompli. Nous nous sommes intéressés à l'article [**L**] de A. Leykin qui a pour sujet d'étudier le comportement du polynôme de Bernstein (algébrique) lorsque les coefficients bougent. Nous avons alors tenté une généralisation à p fonctions de son travail. Néanmoins, les méthodes utilisées ne peuvent donner au premier abord qu'une contructibilité en un sens plus faible que dans le cas d'une fonction, la raison étant que pour $p \geq 2$, on ne sait pas s'il existe des génétateurs rationnels de $\mathcal{B}_{an}$. Entre temps, nous nous étions penchés sur la démonstration de C. Sabbah de la non nullité de $\mathcal{B}_{an}$. Il s'est avéré que dans la preuve, il y avait une proposition cruciale (prop. 2.2.3 de [**S1**]). Cruciale car le reste de la preuve est dans un certain sens similaire à celle de M. Kashiwara dans le cas $p = 1$. L'étude de cette proposition nous a permis d'en trouver une autre preuve plus constructive et aussi plus simple car ne s'appuyant sur rien de plus que la théorie des bases de Gröbner. Signalons cependant que la proposition en question est constituée de deux assertions et que nous redémontrons la première dans le cas p quelconque en évitant la notion délicate d'éventail de platitude (ou éventail adapté) mais la deuxième uniquement pour $p = 2$ à l'aide d'un récurrence sur les pentes de l'éventail de Gröbner. Cette redémonstration fait l'objet du chapitre 2 de cette thèse.

Après cela et à l'aide du résultat de rationalité de A. Gyoja, nous avons pu nous lancer de manière plus significative dans une tentative de généralisation du résultat de A. Leykin (citons [**Br-Mai**] où les auteurs démontre le même résultats par d'autres moyens). Ceci a donné lieu au chapitre 5 dans lequel on démontre l'existence d'un polynôme de Bernstein-Sato générique rationnel sur une variété affine irréductible sur n'importe quel corps $\mathbf{k}$ (resp. sur un germe de variété analytique irréductible) dans le cas "algébrico-algébrique" (resp. "algébrico-analytique"), nous entendons par là que les f_j dépendent polynomialement de $x_1, \ldots, x_n$ et dépendent polynomialement (resp. analytiquement) du système de paramètres. Signalons que par ce résultat, nous généralisons un résultat de H. Biosca [**Bi**] qui a démontré ce même résultat dans le cas où la variété est l'espace affine tout entier (resp. $(\mathbf{C}^m, 0)$). Signalons aussi que H. Biosca n'évoque pas la question de la rationalité. Cependant, un examen détaillé de son travail permet de conclure à la rationalité du polynôme de Bernstein-Sato générique qu'elle construit.

Contenu et résultats principaux

Dans ce qui va suivre, nous allons décrire chapitre par chapitre le contenu de la thèse et nous énoncerons les résultats principaux.

Chapitre 1 : Quelques rappels

Dans ce chapitre, nous rappelons trois notions. La première est celle des bases de Gröbner (ou bases standards, bien qu'usuellement les bases standards concernent les ordres qui ne sont pas bons, nous ne distinguerons pas les deux appellations). Nous distinguons le cas algébrique du cas analytique et nous soulignons le fait qu'un théorème de division n'est possible, dans le cas algébrique, que si l'ordre qu'on utilise est un bon ordre. Dans ce cas, nous rappelons l'algorithme de Buchberger qui permet de calculer effectivement une base standard. Pour ce qui est du cas analytique nous voyons dans quelles conditions une division est possible et on se rend compte que pour la plupart des cas qui nous importent elle n'existe pas. C'est ainsi (comme dans [**C-N**]) que nous introduisons l'anneau homogénéisé (isomorphe à l'anneau de Rees associé à la filtration par le degré total) qui permet dans les deux cas de faire des divisions.

La deuxième notion que nous voyons est celle d'éventail de Gröbner vu l'importance qu'il aura dans le chapitre 2.

Enfin nous rappelons (en termes de coordonnées) la V-multifiltration vu le rôle qu'elle jouera dans les chapitres 2 et 7.

Partie I : Etude des polynômes de Bernstein-Sato

Chapitre 2 : Preuve constructive de l'existence de polynômes de Bernstein-Sato pour plusieurs fonctions analytiques

Ce chapitre constitue l'un des coeurs de la thèse. Dans une première section, on rappelle la preuve de la non nullité de l'idéal de Bernstein-Sato de C. Sabbah en y isolant un résultat important (théorème 2.9) dont nous envisageons de fournir une formulation et une démonstration différentes. Il s'agit du théorème 2.10, le voici.
On rappelle d'abord comment faire opérer $\mathcal{D}_{n+p}$ sur f^s (en suivant B. Malgrange [**Mal**]) puis on considère I l'annulateur de f^s dans $\mathcal{D}_{n+p}$ et on note M le module $\mathcal{D}_{n+p}/I$. On note $\mathcal{U}_V$ l'ensemble des combinaisons linéaires des filtrations $V_1, \ldots, V_p$ à coefficients positifs, ainsi $\mathcal{U}_V \simeq \mathbf{R}^p_{\geq 0}$ et V_j est en termes de coordonnées la V-filtration associée à la variable t_j. On note V la multi-filtration $(V_1, \ldots, V_p)$ indexée

par $\mathbf{Z}^p$. On définit la filtration $\overline{V}(M)$ indexé par $\mathbf{Z}^p$ par

$$\overline{V}_w(M) = \bigcap_{L\in\mathcal{U}_V} V^L_{L(w)}(M),$$

où V^L est la filtration naturelle associée à $L \in \mathcal{U}_V$.

THEOREME (2.10)**.**

(1) Notons $\mathcal{E}_V(h(I))$ l'éventail de Gröbner de $h(I) \subset \mathcal{D}_{n+p}\langle z\rangle$ associé à la filtration $V(\mathcal{D}_{n+p})$. Si on note $\mathcal{L}(\mathcal{E}_V(h(I))$ les éléments primitifs de son 1*-squelette alors pour tout w de $\mathbf{Z}^p$,*

$$\overline{V}_w(M) = \bigcap_{L\in\mathcal{L}(\mathcal{E}_V(h(I)))} V^L_{L(w)}(M).$$

(2) Pour $p = 2$, il existe $\kappa \in \mathbf{N}^p$ qui dépend de $\mathcal{E}_V(h(I))$ tel que pour tout $w \in \mathbf{Z}^p$,

$$V_w(M) \subset \overline{V}_w(M) \subset V_{w+\kappa}(M).$$

Pour dire les choses de manière plus simple, la première assertion nous dit que la filtration $\overline{V}$ est "finiment engendrée" et la deuxième que la filtration $\overline{V}$ est bonne.

La deuxième section a pour objet la démonstration de ce théorème. Arrêtons nous sur le deuxième paragraphe de cette section. Il consiste en l'énoncé et la démonstration de ce que nous appelons "une proposition clé" (prop. 2.14). En effet la preuve de l'assertion 2 du résultat de C. Sabbah (à savoir que la filtration $\overline{V}$ est bonne) est basée sur une modification torique associée à un éventail dit "adapté" et une certaine proposition ([**S1**] prop. 2.2.1) que nous décrivons : soit Σ un éventail subdivisant le premier quadrant de $(\mathbf{Q}^p)^*$. Pour tout cône σ de dimension maximale, soit ${}^{\sigma}V(M)$ la filtration sur M indexée par $\mathbf{Z}^p$ définie par :

$$m \in {}^{\sigma}V_w(M) \iff \exists P \in {}^{\sigma}V_w(\mathcal{D}_{n+p}) = \bigcap_{L\in\sigma} V^L_{L(w)}(\mathcal{D}_{n+p}) \quad m = [P],$$

où $[\cdot]$ désigne la classe dans $M = \mathcal{D}_{n+p}/I$. Notons $\mathcal{L}(\sigma)$ les éléments primitifs du 1-squelette de σ. Alors la proposition 2.2.1 de [**S1**] affirme que si Σ est l'éventail adapté alors pour tout cône σ de dimension maximale de Σ, on a :

$$(\dagger) \qquad {}^{\sigma}V_w(M) = \bigcap_{L\in\mathcal{L}(\sigma)} V^L_{L(w)}(M).$$

Notre proposition clé affirme qu'en prenant pour Σ l'éventail $\mathcal{E}_V(h(I))$ alors pour tout cône σ on a $(\dagger)$.
Voici le bilan que l'on peut dresser sur les deux premières sections de ce chapitre :
- Nous démontrons l'assertion 1 du résultat de C. Sabbah par des moyens relativement élémentaires en evitant l'usage de l'éventail dit adapté.
- Nous démontrons l'assertion 2 du même résultat de C. Sabbah dans le cas $p = 2$ avec les mêmes techniques que précédement.
- Dans la preuve de C. Sabbah de l'assertion 2, on peut grâce à notre proposition clé, remplacer l'éventail adapté par l'eventail de Gröbner $\mathcal{E}_V(h(I))$ ce qui permet de démontrer l'assertion 2 en toute dimension en évitant la notion d'éventail adapté.

Nous terminons ce chapitre par la troisième section dans laquelle nous reprenons la preuve par I.N. Bernstein ([**Be**] qu'on trouve aussi dans [**Bj**]) de la non nullité de $\mathcal{B}_{alg}$ pour $p = 1$ en la généralisant au cas p quelconque. Il se trouve que cette généralisation est facile mais dans un souci d'être complet nous l'avons incluse dans la thèse. Signalons que cette preuve ne démontre pas l'existence d'un élément rationnel dans $\mathcal{B}_{alg}$ mais seulement d'un élément non nul. Cette section est une introduction au chapitre suivant dans lequel on montre l'existence d'un élément rationnel non nul dans $\mathcal{B}_{alg}$.

Avant de passer à la suite, décrivons de manière succinte comment C. Sabbah montre que $\mathcal{B}_{an}$ est non nul. Pour chaque $L \in \mathbf{N}^p \subset \mathcal{U}_V \simeq \mathbf{R}^p_{\geq 0}$, il démontre qu'il existe un polynôme b_L non nul d'une variable complexe qui vérifie :
Pour tout $k \in \mathbf{Z}$, $b(L(-\partial_t t) - k)V_k^L(M) \subset V_{k-1}^L(M)$.
Il vient alors grâce au théorème précédent que le polynôme suivant appartient à $\mathcal{B}_{an}$:

$$b(s_1, \ldots, s_p) = \prod_{L\in F} \prod_{-L(\kappa+(1,\ldots,1))<k\leq 0} b_L(L(s_1, \ldots, s_p) - k),$$

où $F = \mathcal{L}(\mathcal{E}_V(h(I)))$ et $L(s_1, \ldots, s_p) = \sum_{j=1}^p \alpha_j s_j$ où $\alpha \in \mathbf{N}^p$ est le vecteur coordonné de L.
La contribution de A. Gyoja a consisté à montrer que les racines de chaque b_L sont dans $\mathbf{Q}_{<0}$ ce qui permet d'en déduire la rationalité du polynôme ci-dessus.

Chapitre 3 : Polynômes de Bernstein-Sato algébriques rationnels et étude algorithmique

Dans ce chapitre le but est de démontrer que pour tout corps $\mathbf{k}$, l'idéal de Bernstein-Sato algébrique contient un élément non nul de $\mathbf{Q}[s_1, \ldots, s_p]$. Nous aurions pu nous contenter de dire que lorsque $\mathbf{k} = \mathbf{C}$, l'idéal $\mathcal{B}_{alg}$ contient un élément rationnel (en effet $\mathcal{B}_{alg}$ est l'intersection de l'ensemble (fini) des idéaux locaux et chacun d'entre eux en contient un, par suite le produit de tous ces polynômes est rationnel et dans $\mathcal{B}_{alg}$) puis d'utiliser un argument de relèvement des équations fonctionnelles de $\mathbf{C}$ à $\mathbf{k}$. Nous avons décidé de nous y prendre autrement. En effet la voie que nous choisissons nous permet de mieux connaitre les briques qui servent à construire un élément non nul dans $\mathcal{B}_{an}$, à savoir les polynômes b_L. Nous montrons d'abord que pour tout corps $\mathbf{k}$, il existe de tels polynômes non nuls, nous donnons aussi un algorithme de calcul du polynôme b_L, L étant donné. Nous montrons grâce à cet algorithme que b_L (algébrique) est aussi à racines dans $\mathbf{Q}_{<0}$ quelque soit le corps $\mathbf{k}$, ceci permet de montrer que $\mathcal{B}_{alg}$ contient un élément non nul dans $\mathbf{Q}[s_1, \ldots, s_p]$.

Partie II : Etude générique des polynômes de Bernstein-Sato et des éventails de Gröbner

Chapitre 4 : Spécialisation des bases de Gröbner

Dans la partie II, nous étudions certains objets d'un point de vue générique et comme nous les étudions à l'aide des bases de Gröbner, nous sommes amenés à nous intéresser à la spécialisation de ces derniers. C'est donc naturellement que ce chapitre introduit cette notion. Nous y trouverons deux versions d'un lemme dit de spécialisation : une version dite faible et l'autre forte. Chacune des versions étant traitée dans deux cas l'un algébrique et l'autre analytique. L'idée du lemme de spécialisation faible est la suivante. On considère un idéal $I \subset \mathbf{A}_n(\mathbf{k})[a] = \mathbf{A}_n(\mathbf{k}) \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}[a]$ (resp. $I \subset \mathbf{A}_n(\mathbf{C})\{a\} = \mathbf{A}_n(\mathbf{C}) \otimes_{\mathbf{C}} \mathbf{C}\{a\}$) où $a = (a^1, \ldots, a^m)$ est un système de variables vues comme paramètres. Nous considérons pour chaque $a \in \mathbf{k}^m$ (resp. a appartenant à un petit voisinage de 0 dans $\mathbf{C}^m$) l'idéal $I_{|a}$ spécialisé de I en a (En fait dans le cas analytique la spécialisation sera définie de façon précise dans le chapitre en question). On peut se poser la question naturelle suivante : existe-t-il un système de générateurs G de I tels que pour tout a, $G_{|a}$ engendre $I_{|a}$? La réponse est oui mais génériquement, c'est-à-dire qu'il existe une hypersurface algébrique de $\mathbf{k}^m$ (resp. un germe d'hypersurfaces de $\mathbf{C}^m$ en 0) en dehors de laquelle la réponse est affirmative. L'idée générale du lemme de spécialisation forte est de répondre à cette même question mais au lieu de spécialiser en un point a de $\mathbf{k}^m$ (resp. $\mathbf{C}^m$), on spécialise en un point du spectre de $\mathbf{k}[a]$ (resp. $\mathbf{C}\{a\}$). De ce point de vue, la version faible apparait comme un cas particulier de la version forte si on se restreint aux idéaux maximaux. On verra d'ailleurs que la spécialisation forte est plus naturelle que la faible en ce qui concerne le cas analytique.

Chapitre 5 : Polynôme de Bernstein-Sato générique

Dans la première section, nous considérons $f = \sum_{|\alpha| \leq d} g_\alpha(a) x^\alpha$ vu dans $\mathbf{k}[x][a]$ ou dans $\mathbf{C}[x]\{a\}$ où $a = (a^1, \ldots, a^m)$. On cherche à étudier le comportement du polynôme de Bernstein (algébrique) lorsque a parcourt $\mathbf{k}^m$ ou un petit voisinage de 0 dans $\mathbf{C}^m$. Ce problème a été résolu par A. Leykin (voir [**L**]) par des méthodes très proches pour le premier cas i.e. algébrique où $a \in \mathbf{k}^m$. Le résultat est que l'espace des paramètres $\mathbf{k}^m$ (resp. un voisinage de $0 \in \mathbf{C}^m$) se partitionne en une union finie d'ensembles localement fermés (resp. localement fermés analytiques) telle que sur chaque élément de cette partition le polynôme de Bernstein du spécialisé est constant. Citons [**Br-Mai**] dans lequel les auteurs démontrent ce résultat par des voies différentes qui utilisent des anneaux que l'on peut qualifier d'intermédiaires.
Dans la deuxième section, nous nous intéresserons au deux situations suivantes.

cas algébrique : $f_1, \ldots, f_p \in \mathbf{k}[x][a]$

cas analytique : $f_1, \ldots, f_p \in \mathbf{C}[x]\{a\}$

où $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $a = (a^1, \ldots, a^m)$. Nous pourrions aussi considérer le cas où les f_j sont analytiques par rapport à x mais cette situation n'est pas abordable avec les outils que nous avons (les lemmes de spécialisation n'étant pas valables dans ce cas). Etant donnée un variété affine $V(Q)$ irréductible (resp. un germe de variétés analytiques) donnée par un idéal premier Q de $\mathbf{k}[a]$ (resp. $\mathbf{C}\{a\}$), on considère l'équation suivante :

$$(\star\star) \qquad h(a)b(s_1, \ldots, s_p) f_1^{s_1} \cdots f_p^{s_p} = P f_1^{s_1+1} \cdots f_p^{s_p+1} + T f_1^{s_1} \cdots f_p^{s_p}.$$

Dans le cas analytique : si $b(s) \in \mathbf{C}[s] \smallsetminus 0$ satisfait une telle équation avec $h(a) \in \mathbf{C}\{a\} \smallsetminus Q$, $P \in \mathcal{D}_n[s] \otimes_{\mathbf{C}} \mathbf{C}\{a\}$ et $T \in \mathcal{D}_n[s] \otimes_{\mathbf{C}} Q$ alors on dit que c'est un polynôme de Bernstein-Sato générique sur $V(Q)$. Dans le cas algébrique, c'est la même définition où on remplace $\mathbf{C}[s]$ par $\mathbf{k}[s]$, $\mathbf{C}\{a\}$ par $\mathbf{k}[a]$, $\mathcal{D}_n[s] \otimes_{\mathbf{C}} \mathbf{C}\{a\}$ par $\mathbf{A}_n[s][a]$ et $\mathcal{D}_n[s] \otimes_{\mathbf{C}} Q$ par $\mathbf{A}_n(\mathbf{k})[s] \otimes_{\mathbf{k}} Q$. H. Biosca [**Bi**] montre dans les deux cas (le cas algébrique avec $\mathbf{k} = \mathbf{C}$) qu'il existe un polynôme de Bernstein-Sato générique sur $\mathbf{C}^m$ (resp. $(\mathbf{C}^m, 0)$) c'est-à-dire avec $Q = (0)$. Dans le théorème 5.8, nous améliorons ce résultat en montrant que dans les deux cas (avec $\mathbf{k}$ quelconque dans le premier) et pour tout idéal premier Q de $\mathbf{k}[a]$ (resp. $\mathbf{C}\{a\}$) il en existe un sur $V(Q)$ qui soit rationnel. Pour cela, nous utilisons les lemmes de spécialisations et le chapitre 3. Notons que les méthodes de H. Biosca ne semblent pas permettre pas d'arriver à ce résultat pour un idéal $Q \neq (0)$.

Chapitre 6 : Constructibilité de l'éventail de Gröbner

Ce chapitre répond à une question naturelle qui est la suivante. Comme pécédement, on considère deux cas. Soit I un idéal de $\mathbf{A}_n(\mathbf{k})[a]$ (resp. $\mathbf{A}_n(\mathbf{C})\{a\} = \mathbf{A}_n(\mathbf{C}) \otimes_{\mathbf{C}} \mathbf{C}\{a\}$). Comment se comporte l'eventail de Gröbner (algébrique) du spécialisé $I_{|a}$ de I lorsque a parcourt $\mathbf{k}^m$ (resp. un petit voisinage de 0 dans $\mathbf{C}\{a\}$) ? La réponse est la suivante :

THEOREME. *Il existe un partition de $\mathbf{k}^m$ (resp. un voisinage de 0 dans $\mathbf{C}^m$) constituée d'ensembles localement fermés (resp. localement fermés analytiques) W telle que sur chaque W l'éventail de Gröbner de $h(I_{|a})$ est constant.*

Partie III : Aspects plus calculatoires

Chapitre 7 :

Comme nous l'avons dit précédement, l'objet de ce chapitre est un article paru au J. of Symb. Comp. Nous l'avons inclus dans une partie dont le titre évoque l'aspect calculatoire des $\mathcal{D}$-modules car la principale raison d'être de cet article est la notion de complexité algorithmique. En effet, avant cet article, T. Oaku avait déja trouvé un algorithme général de calcul de $\mathcal{B}_{alg}$. Ce que nous proposons dans cet article est un algorithme probablement plus rapide que celui de T. Oaku (signalons quand même que nous n'avions à l'époque pas trouvé un algorithme pour $\mathcal{B}_{alg}$ mais pour deux autres idéaux de Bernstein-Sato) puisque ce dernier se fait à l'aide de calcul de bases de Gröbner sur $2n+4p$ variable, alors que le notre n'en utilise que $2n+3p$ (Remarquons que cette borne est baissée à $2n+2p$ dans [**Br-Mai**] avec des calculs qui se font dans d'autres anneaux).

L'article en question est suivi d'une courte section où nous énonçons certains résultats qui à l'époque ne nous avait pas frappés, signalons par exemple le fait que nous sommes capables effectivement de détecter les éléments non réguliers (i.e. dont le diagramme de Newton est sans pentes) d'un idéal par rapport à un certain nombre de formes linéaires ou bien aussi de calculer le gradué associé à plusieurs formes linéaires.

Annexe : Calculs sur Kan

Comme le titre l'indique, il s'agit essentiellement de calculs réalisés en utilisant le logiciel Kan de N. Takayama [**T**]. Dans une première section, nous avons calculé les idéaux de Bernstein-Sato absolus (par opposition à "génériques") de l'exemple de J. Briançon et H. Maynadier dont l'idéal $\mathcal{B}$ analytique est non principal (voir [**Br-May**]). Nous constatons que l'idéal $\mathcal{B}_1$ (algébrique) n'est pas principal alors que $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}_2$ le sont. Dans une deuxième section nous calculons sur deux exemples (dont le précédent) des idéaux de Bernstein-Sato génériques avec un paramètre. Dans la troisième section, nous calculons sur plusieurs exemples les idéaux $\mathcal{B}_L$ ainsi que les polynômes b_L intéressants et nous regardons le lien entre ces derniers et les idéaux de Bernstein-Sato $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$. Nous répondons notamment à une question naturelle qui est de savoir si le procédé par lequel la preuve de C. Sabbah construit un élément de $\mathcal{B}^v$ permet d'obtenir des générateurs. Nous verrons que non.

CHAPITRE 1

Quelques rappels

1. Divisions et bases standards

Le but de cette section est d'introduire les anneaux avec lesquels nous allons travailler, de rappeler les théorèmes de division et les notions de bases standards d'un idéal par rapport à un ordre $<$ sur $\mathbf{N}^{2n}$. Nous verrons dans un premier temps ce qui se passe sur l'algèbre de Weyl $\mathbf{A}_n = \mathbf{A}_n(\mathbf{k})$ (anneau des opérateurs différentiels à coefficients polynomiaux) pour laquelle nous distinguerons deux cas selon que l'ordre $<$ est bon ou non. Ainsi nous verrons que si l'ordre $<$ est bon nous avons un théorème de division dans $\mathbf{A}_n$. Dans un deuxième temps nous nous placerons dans le cas où l'ordre $<$ est subordonné à une forme linéaire $L : \mathbf{R}^{2n} \to \mathbf{R}$, on le notera alors $<_L$. Dans ce cas l'ordre $<_L$ est bon si et seulement si L est à coefficients strictement positifs. Dans un troisième temps, nous nous intéresserons à l'anneau $\mathcal{D}_n$ (anneau des opérateurs différentiels à coefficients analytiques sur $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$) et nous verrons dans quelles conditions sur L nous avons un théorème de division.
Dans le cas de $\mathbf{A}_n$ nous verrons que si l'ordre $<_L$ (ou plus généralement $<$) n'est pas bon alors comme dans [**C-N**], nous travaillerons dans un nouvel anneau $\mathbf{A}_n\langle z\rangle$ avec un nouvel ordre $<_L^h$ qui sera bon. De même en ce qui concerne $\mathcal{D}_n$, si la restriction de L à $\mathbf{R}^n \times \{0\}^n$ n'est pas nulle, nous travaillerons dans $\mathcal{D}_n\langle z\rangle$. Remarquons que demander que la restriction en question soit nulle limite les possibilités.
Mon but ici n'est pas de donner des démonstrations que l'on peut trouver dans [**C-G**] mais d'insister sur les points qui me semblent importants, par exemple savoir dans quelles situations on a une division, dans quels cas une base standard est un système de générateurs de l'idéal en question, de savoir contourner le problème en travaillant avec l'homogénéisé de l'idéal.

1.1. Sur l'anneau $\mathbf{A}_n$. Ce paragraphe qui concerne essentiellement les chapitres 7 et 3 est aussi une introduction au cas plus délicat des bases standards de $\mathcal{D}_n$ dont nous nous servirons dès le prochain chapitre.
Soit $<$ un ordre total sur $\mathbf{N}^{2n}$ compatible avec l'addition c'est-à-dire vérifiant la propriété suivante :

$$\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{N}^{2n},\ \alpha < \beta \Rightarrow \alpha + \gamma < \beta + \gamma.$$

On dit que $<$ est **bon** si toute partie de $\mathbf{N}^{2n}$ admet un plus petit élément. Dans le cas où $<$ est compatible avec l'addition nous avons l'équivalence suivante

$$< \text{ est bon } \iff \forall \alpha \in \mathbf{N}^{2n},\ \alpha \geq 0.$$

On dit que $<$ est un ordre **différentiel** si pour tout $i = 1, \ldots, n$

$$(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0, 1, \ldots, 0) > (0, \ldots, 0)$$

où dans l'écriture ci-dessus les 1 sont placés respectivement en i-ième et $(n+i)$-ième positions. On voit que tout bon ordre est différentiel.

Soit maintenant P non nul dans $\mathbf{A}_n(\mathbf{k})$. Ecrivons $P = \sum_{\alpha,\beta\in\mathbf{N}^n} p_{\alpha,\beta}x^\alpha\partial_x^\beta$ avec $p_{\alpha,\beta} \in \mathbf{k}$.
On définit alors :

– Le nuage ou diagramme de Newton de P :
$$\mathcal{N}(P) = \{(\alpha,\beta) \in \mathbf{N}^{2n} | \, p_{\alpha,\beta} \neq 0\},$$
– L'exposant privilégié de P par rapport à $<$:
$$\exp_<(P) = \max_< \mathcal{N}(P),$$
– le monôme privilégié de P par rapport à $<$:
$$\mathrm{mp}_<(P) = (x, \partial_x)^{\exp_<(P)},$$
– le coefficient privilégié de P par rapport à $<$:
$$\mathrm{cp}_<(P) = p_{\exp_<(P)},$$
– le terme privilégié de P par rapport à $<$:
$$\mathrm{tp}_<(P) = \mathrm{cp}_<(P)\mathrm{mp}_<(P).$$

Remarquons qu'ici le nuage de P est fini contrairement à ce qui se passera dans $\mathcal{D}_n$.

PROPRIETE 1.1. *Soit P et Q deux éléments non nuls de $\mathbf{A}_n(\mathbf{k})$ et $<$ un ordre différentiel total compatible avec l'addition sur $\mathbf{N}^{2n}$ alors*
– $\exp_<(PQ) = \exp_<(P) + \exp_<(Q)$,
– $tp_<(PQ) = tp_<(tp_<(P) \cdot tp_<(Q))$,
– *si* $\exp_<(P) \neq \exp_<(Q)$ *alors* $exp_<(P + Q) = max_<\{\exp_<(P), \exp_<(Q)\}$.

REMARQUE. *On voit facilement la nécessité de supposer que l'ordre ést différentiel. A partir de maintenant et sauf mention contraire, tout ordre sera supposé différentiel.*

A un q-uplet $(e^1, \ldots, e^q)$ d'éléments de $\mathbf{N}^{2n}$ nous associons une partition $\Delta_1, \ldots, \Delta_q, \bar{\Delta}$ de $\mathbf{N}^{2n}$ de la façon suivante (certains des Δ_i pourront être vides). On pose
– $\Delta_1 = e^1 + \mathbf{N}^{2n}$,
– Pour $i \geq 1$, $\Delta_{i+1} = (e^i + \mathbf{N}^{2n}) \smallsetminus (\Delta_1 \cup \cdots \cup \Delta_i)$,
– $\bar{\Delta} = \mathbf{N}^{2n} \smallsetminus (\cup_{i=1}^q \Delta_i)$.

On est maintenant en mesure d'énoncer le premier théorème de division.

THEOREME 1.2. *Supposons que l'ordre $<$ soit bon. Soient $P_1, \ldots, P_q$ des éléments non nuls dans $\mathbf{A}_n$. Notons $\Delta_1, \ldots, \Delta_q, \bar{\Delta}$ la partition de $\mathbf{N}^{2n}$ associée au q-uplet* $(\exp_<(P_1), \ldots, exp_<(P_q))$. *Alors pour tout $P \in \mathbf{A}_n$, il existe un unique $(q+1)$-uplet $(Q_1, \ldots, Q_q, R)$ dans $\mathbf{A}_n^{q+1}$ qui vérifie les propriétés suivantes :*

(1) $P = Q_1P_1 + \cdots + Q_qP_q + R$.

(2) Pour $i = 1, \ldots, q$, $\exp_<(P_i) + \mathcal{N}(Q_i) \subseteq \Delta_i$ *si* $Q_i \neq 0$.

(3) $\mathcal{N}(R) \subseteq \bar{\Delta}$ *si* $R \neq 0$.

On appelle R le reste de la division de P par $P_1, \ldots, P_q$ par rapport à $<$.

REMARQUE 1.3. *Dans les conditions du théorème, on a*
$$\exp_<(P) = max_<\{\exp_<(Q_iP_i),\ i = 1, \ldots, q;\ \exp_<(R)\}.$$

Soit maintenant I un idéal de $\mathbf{A}_n$, on définit son exposant (on dit aussi escalier) par rapport à $<$:

$$\exp_<(I) = \{\exp_<(P) |\, P \in I \setminus \{0\}\}.$$

Grâce aux propriétés de l'exposant on a

$$\exp_<(I) + \mathbf{N}^{2n} = \exp_<(I).$$

Rappelons qu'un tel ensemble admet un système fini de générateurs ce qui est l'objet du

LEMME 1.4. *(de Dickson) Soit $E \subseteq \mathbf{N}^r$ tel que $E + \mathbf{N}^r = E$ alors il existe un sous-ensemble fini F de E tel que*

$$E = \bigcup_{e \in F} (e + \mathbf{N}^r).$$

Ce lemme assure l'existence d'une base standard (ou de Gröbner) d'un idéal I. En voici la définition.

DEFINITION 1.5. *On dit qu'un système $P_1, \ldots, P_q$ d'éléments d'un idéal I est une base standard de I par rapport à l'ordre $<$ (non nécessairement bon) si*

$$\exp_<(I) = \bigcup_{i=1}^{q} (\exp_<(P_i) + \mathbf{N}^n).$$

Dans le cas où l'ordre $<$ est bon, nous avons les deux conséquences suivantes.

COROLLAIRE 1.6. *Soit $P_1, \ldots, P_q$ une famille d'éléments d'un idéal I alors les deux conditions suivantes sont équivalentes.*

(1) $P_1, \ldots, P_q$ est une base standard de I par rapport à $<$.

(2) Pour tout $P \in I$, le reste de la division de P par $(P_1, \ldots, P_q)$ est nul.

COROLLAIRE 1.7. *Soit $P_1, \ldots, P_q$ une base standard de I par rapport $<$ (supposé bon). Alors pour tout $P \in I$, il existe $Q_1, \ldots, Q_q \in \mathbf{A}_n$ tels que :*

– *$P = Q_1 P_1 + \cdots + Q_q P_q$,*

– *pour tout i tel que $Q_i \neq 0$, $\exp_<(P) \geq \exp_<(Q_i P_i)$.*

En particulier, les P_i engendrent l'idéal I.

DEFINITION 1.8. *Soit $<$ un ordre non nécessairement bon. Nous dirons qu'une famille $P_1, \ldots, P_q$ déléments d'un idéal I est une base standard génératrice de I par rapport à $<$ si pour tout $P \in I$, il existe $Q_1, \ldots, Q_q$ qui satisfont aux deux points du corollaire précédent.*

Une première remarque est que quelque soit la nature de l'ordre $<$, une base standard génératrice est une base standard. Nous venons de voir que la réciproque est vraie si l'ordre $<$ est bon.

Comme premier bilan, nous pouvons dire que si l'ordre $<$ est **bon** alors les notions de **base standard** et **base standard génératrice** coïncident.

Algorithmique

Dans ce paragraphe, nous allons discuter de la possibilité d'obtenir en un nombre fini d'étapes une base standard d'un idéal I en partant d'un système (fini) de générateurs. Mais d'abord, donnons un critère pour qu'un système de générateurs soit une base standard.

DEFINITION 1.9. *(Le S-opérateur)*

- *Soient γ_1 et γ_2 dans $\mathbf{N}^r$ (en ce qui concerne ce paragraphe $r = 2n$). On définit le p.p.c.m. de γ_1 et γ_2 comme l'élément $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_r) \in \mathbf{N}^r$ avec μ_i égal au maximum de $\gamma_{1,i}$ et $\gamma_{2,i}$, on note $\mu = ppcm(\gamma_1, \gamma_2)$.*
- *Soient P_1 et P_2 dans $\mathbf{A}_n$. On définit $S(P_1, P_2) \in \mathbf{A}_n$ de la façon suivante :*
  - $\mu = ppcm(\exp_<(P_1), \exp_<(P_2))$,
  - $m_1 = cp_<(P_2)(x, \partial_x)^{\mu - \exp_<(P_1)}$,
  - $m_2 = cp_<(P_1)(x, \partial_x)^{\mu - \exp_<(P_2)}$,
  - $S(P_1, P_2) = m_1 P_1 - m_2 P_2$.

  En résumé les m_i sont les "plus petits" monômes tels que dans $S(P_1, P_2)$ les exposants des P_i aient été éliminés.

LEMME 1.10. *Soit $P_1, \ldots, P_q$ une famille génératrice d'un idéal I de $\mathbf{A}_n$ et soit $<$ un bon ordre sur $\mathbf{N}^{2n}$. Supposons que pour tout i et j dans $\{1, \ldots, q\}$, le reste de la division de $S(P_i, P_j)$ par $(P_1, \ldots, P_q)$ par rapport à $<$ soit nul alors la famille des P_i est une base standard de I pour $<$.*

Grâce à ce critère nous pouvons donner un algorithme explicite de calcul d'une base standard à partir d'un sytème de générateurs donné. Il s'agit de l'algorithme de Buchberger.

ALGORITHME 1.11. *Soit $<$ un bon ordre sur $\mathbf{N}^{2n}$. Soit F un famille génératrice d'un idéal I de $\mathbf{A}_n$. Nous construisons une suite croissante F_l de familles génératrices de I :*

- *On pose $F_0 = F$.*
- *Pour $l \geq 0$, F_{l+1} est définie comme l'union de F_l et de l'ensemble des restes obtenus par division des $S(P, P')$, P et P' étant dans F_l, par la famille F_l par rapport à l'ordre $<$.*

Nous affirmons qu'il existe un rang l_0 tel que F_{l_0} est une base standard de I pour $<$.

Démonstration. Pour chaque l, notons $E_l = \bigcup_{P \in F_l} (\exp_<(P) + \mathbf{N}^{2n})$. Pour chaque l, E_l est un escalier, c'est-à-dire qu'il vérifie $E_l + \mathbf{N}^{2n} = E_l$. Il en est de même de l'union E des E_l. Par conséquent il existe $e_1, \ldots, e_r \in E$ tels que :

$$E = \bigcup_{i=1}^{r} (e_i + \mathbf{N}^{2n}).$$

Pour chaque $i \in \{1, \ldots, r\}$ il existe l_i tel que e_i appartienne à E_{l_i}. Notons l_0 le plus grand élément de $\{l_1, \ldots, l_r\}$. Alors pour $l \geq l_0$, $E_{l+1} = E_l$. Maintenant, en utilisant le critère précédent, il est facile de voir que F_{l_0} est une base standard de I. □

Et si l'ordre n'est pas bon...

Dans ce cas, le théorème de division n'est plus valable, ce qui conduit au fait qu'une base standard d'un idéal n'est plus nécessairement génératrice comme le montre l'exemple suivant.

EXEMPLE 1.12. *Considérons l'idéal $I = \mathbf{A}_1 \subset \mathbf{A}_1$ (on note x la variable). Soit $P = 1 + x \in I$. Soit $<$ l'ordre sur $\mathbf{N}^2$ définit par :*

$$(i,j) < (i',j') \iff \begin{cases} j-i < j'-i' \\ ou \\ j-i = j'-i' \text{ et } (i,j) <_0 (i',j') \end{cases}$$

où $<_0$ est bon ordre compatible avec l'addition sur $\mathbf{N}^2$. Alors $<$ est un ordre compatible avec l'addition mais n'est pas bon (puisque $(1,0) < (0,0)$). On a $\exp_<(P) = (0,0)$ ainsi $\{P\}$ est une base standard de I mais P n'engendre pas I.

Cependant il est quand même possible de construire une base standard qui soit génératrice.
La solution vient dans l'introduction de l'anneau $\mathbf{A}_n\langle z\rangle$. Il est définit comme la $\mathbf{k}$-algèbre engendrée par $x_1, \ldots, x_n, \partial_{x_1}, \ldots, \partial_{x_n}, z$ avec les relations suivantes :

$$\forall i, j,\ [x_i, x_j] = [\partial_{x_i}, \partial_{x_j}] = [x_i, z] = [\partial_{x_i}, z] = 0,$$

$$\forall i \neq j,\ [\partial_{x_i}, x_j] = 0 \text{ et } \forall i,\ [\partial_{x_i}, x_i] = z^2.$$

Si on note $\mathcal{R}^T(\mathbf{A}_n)$ l'algèbre de Rees de $\mathbf{A}_n$ associée à la filtration par l'ordre total en x_i et ∂_{x_i}, on voit qu'elle est isomorphe à l'algèbre $\mathbf{A}_n\langle z\rangle$.

Parlons d'homogénéisation.
En effet on dira que $H \in \mathbf{A}_n\langle z\rangle$ est homogène de degré (ou d'ordre) d si dans l'écriture

$$H = \sum_{\alpha,\beta,k} h_{\alpha,\beta,k} x^\alpha \partial_x^\beta z^k,$$

les $h_{\alpha,\beta,k}$ sont non nuls seulement si $|\alpha| + |\beta| + k = d$ (signalons que α et β sont dans $\mathbf{N}^n$ et k dans $\mathbf{N}$).
Maintenant pour $P \in \mathbf{A}_n$, on définit son homogénéisé $h(P)$ dans $\mathbf{A}_n\langle z\rangle$: écrivons $P = \sum_{\alpha,\beta} p_{\alpha,\beta} x^\alpha \partial_x^\beta$ et notons d le degré total de P en x et ∂_x, c'est le maximum des $|\alpha| + |\beta|$ pour lesquels $p_{\alpha,\beta}$ est non nul, on pose alors :

$$h(P) = \sum_{\alpha,\beta} p_{\alpha,\beta} x^\alpha \partial_x^\beta z^{d-(|\alpha|+|\beta|)}.$$

Par définition, $h(P)$ est homogène d'ordre d.
Réciproquement si $H \in \mathbf{A}_n\langle z\rangle$ s'écrit $\sum_{\alpha,\beta,k} h_{\alpha,\beta,k} x^\alpha \partial_x^\beta z^k$, on note $H_{|z=1} \in \mathbf{A}_n$ l'opérateur :

$$H_{|z=1} = \sum_{\alpha,\beta,k} h_{\alpha,\beta,k} x^\alpha \partial_x^\beta.$$

L'un des intérêts de l'anneau $\mathbf{A}_n\langle z\rangle$ et de la procédure d'homogénéisation réside dans le fait que l'homogénéité est préservée par le produit :

PROPRIETE 1.13. *Si H_1 et H_2, éléments de $\mathbf{A}_n\langle z\rangle$, sont homogènes d'ordre respectif d_1 et d_2 alors H_1H_2 est homogène d'ordre $d_1 + d_2$.*
De plus si P et Q sont $\mathbf{A}_n$ alors $h(PQ) = h(P)h(Q)$.

L'ordre homogénéisé

Maintenant donnons nous un ordre $<$ sur $\mathbf{N}^{2n}$ qui n'est pas bon. On définit l'ordre $<^h$ sur $\mathbf{N}^{2n+1}$ par :

$$(\alpha,\beta,k) <^h (\alpha',\beta',k') \iff \begin{cases} |\alpha|+|\beta|+k < |\alpha'|+|\beta'|+k' \\ \text{ou} \\ |\alpha|+|\beta|+k = |\alpha'|+|\beta'|+k' \text{ et } (\alpha,\beta) < (\alpha',\beta') \end{cases}$$

où $\alpha,\alpha',\beta,\beta'$ sont dans $\mathbf{N}^n$, k,k' dans $\mathbf{N}$, le premier signe $<$ désigne l'ordre usuel sur $\mathbf{R}$ et le deuxième l'ordre de départ sur $\mathbf{N}^{2n}$.
Le point important est que **ce nouvel ordre est bon** et compatible avec l'addition (pour cela il suffit de remarquer que 0 est le plus petit élément de $\mathbf{N}^{2n+1}$).
Maintenant pour un élément de $\mathbf{A}_n\langle z\rangle$, nous avons les notions d'exposant privilégié, de monôme privilégié et de coefficient privilégié par rapport à $<^h$ qui sont définies de la même manière. Nous avons aussi un analogue de la propriété 1.1 (sur l'exposant privilégié).

Nous allons, dans ce qui suit énoncer un théorème de division dans l'anneau $\mathbf{A}_n\langle z\rangle$.
Comme précédement, à un q-uplet $(e^1,\dots,e^q)$ d'éléments de $\mathbf{N}^{2n+1}$, nous associons une partition $\Delta_1,\dots,\Delta_q,\bar{\Delta}$ de $\mathbf{N}^{2n+1}$ dont on ne détaille pas la construction.

THEOREME 1.14. *Soient $H_1,\dots,H_q$ des éléments non nuls dans $\mathbf{A}_n\langle z\rangle$. Notons $\Delta_1,\dots,\Delta_q,\bar{\Delta}$ la partition de $\mathbf{N}^{2n+1}$ associée au q-uplet $(\exp_{<^h}(P_1),\dots,exp_{<^h}(P_q))$. Alors pour tout $H\in\mathbf{A}_n\langle z\rangle$, il existe un unique $(q+1)$-uplet $(Q_1,\dots,Q_q,R)$ dans $\mathbf{A}_n\langle z\rangle^{q+1}$ qui vérifie les propriétés suivantes :*

(1) $H = Q_1H_1+\cdots+Q_qH_q+R$.
(2) Pour $i=1,\dots,q$, $\exp_{<^h}(H_i)+\mathcal{N}(Q_i)\subseteq\Delta_i$ si $Q_i\neq 0$.
(3) Si $R\neq 0$, $\mathcal{N}(R)\subseteq\bar{\Delta}$.

De plus si H et les H_i sont homogènes d'ordres d et d_i respectivement alors Q_i est homogène d'ordre $d-d_i$ et R homogène d'ordre d.

Retour sur $\mathbf{A}_n$

Nous avons vu qu'une base standard d'un idéal I par rapport à un ordre $<$ qui n'est pas bon n'est pas nécessairement une base standard génératrice. Dans ce qui suit nous montrons l'existence d'une base standard génératrice et comment la construire explicitement si on part d'un système quelconque de générateurs.

Donnons nous $S_1,\dots,S_r$ une famille génératrice d'un idéal I de $\mathbf{A}_n$. Supposons que $<$ n'est pas un bon ordre sur $\mathbf{N}^{2n}$. Considérons l'idéal I^h de $\mathbf{A}_n\langle z\rangle$ engendré par les $h(S_i)$. Il ne s'agit pas de $h(I)$ l'homogénéisé usuel de I auquel nous aurons à faire par exemple dans la section suivante mais il est suffisant pour atteindre notre but.
Soit alors $H_1,\dots,H_q$ la base standard de I^h par rapport à l'ordre $<^h$ construite à partir des $h(Q_i)$ en suivant l'algorithme de Burchberger. Par construction on sait qu'elle est constituée d'éléments homogènes. Si nous notons $P_i = H_{i|z=1}$ alors nous affirmons que

PROPOSITION 1.15. *L'ensemble des P_i est une base standard génératrice de I par rapport à $<$.*

Avant de prouver ce résultat, énonçons un lemme élémentaire.

LEMME 1.16. *Si $P, P_1, \ldots, P_r$ sont dans $\mathbf{A}_n$ et si $P = P_1 + \cdots + P_r$ alors il existe des entiers positifs $l, l_1, \ldots, l_r$ tels que*

$$z^l h(P) = z^{l_1} h(P_1) + \cdots + z^{l_r} h(P_r).$$

Démonstration de la proposition. Tout d'abord, il est clair que pour tout $i = 1, \ldots, q$, $P_i = H_{i|z=1}$ est dans I.
Maintenant soit $P \in I$. Ecrivons $P = \sum_i q_i S_i$. Par suite, grâce au lemme précédent, il existe l tel que $z^l h(P)$ soit combinaison des $h(q_i S_i)$ et comme $h(q_i S_i) = h(q_i) h(S_i)$, $z^l h(P)$ appartient à I^h. On peut donc le diviser par les H_i ce qui donne :

$$z^l h(P) = \sum_{i=1}^{q} G_i H_i$$

avec $\exp_{<^h}(z^l h(P)) \geq^h \exp_{<^h}(G_i H_i)$. Notons que dans cette écriture, tout est homogène. Notons $e = \exp_<(P)$ et $e' = \exp_<(G_{i|z=1} H_{i|z=1})$ alors il n'est pas difficile de voir qu'en notant $\exp_{<^h}(z^l h(P)) = (e, k)$ et $\exp_{<^h}(G_i H_i) = (e', k')$, on a $|e| + k = |e'| + k'$. Par conséquent et par définition de l'ordre $<^h$, nous avons $e \geq e'$. Conclusion, nous obtenons

$$P = \sum_{i=1}^{q} G_{i|z=1} P_i$$

avec $\exp_<(P) \geq \exp_<(G_{i|z=1} P_i)$. □

Ce que nous pouvons conclure de ce paragraphe, c'est que dans $\mathbf{A}_n$, quelque soit l'ordre qu'on se donne, nous pouvons toujours calculer explicitement une base standard génératrice quitte à travailler dans $\mathbf{A}_n\langle z\rangle$. Avant de passer à l'étude des bases standard dans $\mathcal{D}_n$, nous allons introduire un certain nombre de notions et de notations attachées à une forme linéaire L sur $\mathbf{R}^{2n}$. Les notations introduites ici seront considérées comme canoniques dans les chapitres suivants et ne seront pas rappelées en détail à chaque fois.

Avec une forme linéaire L

Donnons nous une forme linéaire $L : \mathbf{R}^{2n} \to \mathbf{R}$ compatible avec la structure d'anneau de $\mathbf{A}_n$. C'est-à-dire qu'on suppose que L est de la forme suivante : $L(\alpha, \beta) = \sum e_i \alpha_i + \sum f_i \beta_i$ avec $e_i + f_i \geq 0$ (cette condition fait que l'ordre $<_L$ suivant est différentiel). A une telle forme, nous associons un ordre sur $\mathbf{N}^{2n}$ noté $<_L$ défini par :

$$\gamma <_L \gamma' \iff \begin{cases} L(\gamma) < L(\gamma') \\ \text{ou} \\ L(\gamma) = L(\gamma') \text{ et } \gamma <_0 \gamma' \end{cases}$$

où $<_0$ est bon ordre sur $\mathbf{N}^{2n}$ compatible avec l'addition fixé un fois pour toutes (par exemple l'ordre lexicographique).

DEFINITION 1.17. – *A un élément P de $\mathbf{A}_n$ on associe son L-ordre défini par $ord^L(P) = \max L(\mathcal{N}(P))$ (ici c'est le maximum d'un sous-ensemble fini de $\mathbf{R}$).*

– *Soit la filtration $F_k^L = F_k^L(\mathbf{A}_n)$ indexée par $L(\mathbf{N}^{2n})$ donnée par :*
$$F_k^L = \{P \in \mathbf{A}_n |\, ord^L(P) \leq k\}.$$
On note $F_{<k}^L$ les éléments d'ordre strictement inférieur à k.
– *On définit $gr^L(\mathbf{A}_n) = \bigoplus_{k\in L(\mathbf{N}^{2n})} gr_k^L(\mathbf{A}_n)$ où $gr_k^L(\mathbf{A}_n) = F_k^L(\mathbf{A}_n)/F_{<k}^L(\mathbf{A}_n)$ comme étant le gradué associé à la filtration F^L.*
– *Pour $P \in \mathbf{A}_n$ et pour $k \geq ord^L(P)$ nous notons $\sigma_k^L(P)$, que nous appelons symbole d'ordre k de P par rapport à L, la classe de P dans $F_k^L/F_{<k}^L$ (qui est nulle si $k > ord^L(P)$) et nous notons $\sigma^L(P) = \sigma^L_{ord^L(P)}(P)$ son symbole principal par rapport à L.*
– *Pour un idéal I de $\mathbf{A}_n$ nous avons la filtration induite $F^L(I) = (F_k^L(I)) = (I \cap F_k^L(\mathbf{A}_n))$ ainsi que l'idéal gradué associé $gr^L(I) = \bigoplus_{k\in L(\mathbf{N}^{2n})} gr_k^L(I)$ avec $gr_k^L(I) = F_k^L(I)/F_{<k}^L(I)$. Cet idéal est engendré par les $\sigma^L(P)$ avec $P \in I$.*
– *Si $H \in \mathbf{A}_n\langle z\rangle$ on définit $ord^L(H)$ comme le maximum des $L(\alpha,\beta)$ pour lesquels $(\alpha,\beta,k) \in \mathcal{N}(H)$. Ceci permet d'étendre la définition de $F^L(\mathbf{A}_n)$ en une filtration qu'on note $F^L(\mathbf{A}_n\langle z\rangle)$ sur $\mathbf{A}_n\langle z\rangle$. Il en découle les mêmes notions, à savoir le gradué associé à $\mathbf{A}_n\langle z\rangle$ noté $gr^L(\mathbf{A}_n\langle z\rangle)$, le symbole principal $\sigma^L(H) \in gr^L(\mathbf{A}_n\langle z\rangle)$ de H dans $\mathbf{A}_n\langle z\rangle$. Et pout un idéal J de $\mathbf{A}_n\langle z\rangle$, on a aussi le gradué $gr^L(J)$ qui est engendré par les symboles principaux des éléments de J.*

Terminons ce paragraphe en signalant que l'ordre $<_L$ est bon si et seulement si L est à coefficients positifs ou nuls.

Elimination

Soit I un idéal de $\mathbf{A}_n$. Soit $u_1, \dots, u_{2n}$ une permutation des variables $x_1, \dots, x_n, \partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_n}$. Etant donné un système fini de générateurs de I et $k \in \{1, \dots, 2n-1\}$, il est possible à l'aide d'un calcul de base standard d'obtenir des générateurs de $I \cap \mathbf{k}[u_{k+1}, \dots, u_{2n}]$. C'est ce qu'on appelle l'élimination des variables $u_1, \dots, u_k$. Un ordre sur $\mathbf{N}^{2n}$ qui donne un tel système de générateurs, on dit de lui que c'est un **ordre qui élimine les variables** $u_1, \dots, u_k$.
Comment fait-on ?
Il suffit pour cela qu'il privilégie les variables $t_1, \dots, t_k$, c'est le cas par exemple de l'ordre lexicographique en $t_1, \dots, t_{2n}$. Nous n'entrons pas dans les détails qui nous sont inutiles. Il faut simplement savoir que c'est possible. Pour plus de détails, le lecteur peut consulter [**C-G**] ou encore [**C-L-O**].

Dans ce qui suit, nous rappelons ce qui nous est nécessaire de savoir concernant $\mathcal{D}_n$ et les éventuelles divisions par rapport à une forme L. Nous introduisons l'anneau $\mathcal{D}_n\langle z\rangle$ qui est l'analogue de $\mathbf{A}_n\langle z\rangle$.

1.2. Sur l'anneau $\mathcal{D}_n$. Ici nous nous travaillerons sur le corps des complexes mais nous pourrions aussi bien travailler sur $\mathbf{R}$ ou sur tout autre corps valué complet.
Nous noterons $\mathbf{C}\{x\} = \mathbf{C}\{x_1, \dots, x_n\}$ l'anneau local des séries convergentes à l'origine et $\mathcal{D}_n$ l'anneau des opérateurs différentiels à coefficients analytiques i.e. dans

$\mathbf{C}\{x\}$.
Nous noterons $\mathcal{U}$ l'espace des formes linéaires $L : \mathbf{R}^{2n} \to \mathbf{R}$, $L(\alpha, \beta) = \sum_1^n e_i\alpha_i + \sum_1^n f_i\beta_i$ vérifiant $e_i + f_i \geq 0$ et $e_i \leq 0$ pour tout $i = 1, \ldots, n$.
Pour $P \in \mathcal{D}_n$ s'écrivant $P = \sum_{\alpha,\beta} x^\alpha \partial_x^\beta$, nous noterons comme précédement $\mathcal{N}(P)$ son nuage i.e. l'ensemble des $(\alpha, \beta) \in \mathbf{N}^{2n}$ pour lesquels $p_{\alpha,\beta}$ est non nul. Maintenant pour un tel P, nous noterons $\mathrm{ord}^L(P)$ son ordre par rapport à L (ou L-ordre) défini comme le maximum de $L(\mathcal{N}(P))$. Remarquons à titre d'exemple que si la restriction de L à $\mathbf{N}^n \times (0)$ envoie $(\alpha, 0)$ sur $|\alpha|$ alors pour tout $f(x) \in \mathbf{C}\{x\}$, $\mathrm{ord}^L(f(x))$ n'est rien d'autre que la valuation usuelle de $f(x)$. Nous avons aussi la filtration F_L indexée par $L(\mathbf{N}^{2n})$ définie par :

$$F_k^L = F_k^L(\mathcal{D}_n) = \{P \in \mathcal{D}_n | \mathrm{ord}^L(P) \leq k\}.$$

On note $\mathrm{gr}^L(\mathcal{D}_n)$ l'anneau gradué $\oplus_{k \in L(\mathbf{N}^{2n})} F_k^L / F_{<k}^L$. Nous verrons dans la section 2 qu'à isomorphisme près, l'ensemble des $\mathrm{gr}^L(\mathcal{D}_n)$, L parcourant $\mathcal{U}$, est fini.

Introduisons dès à présent l'anneau $\mathcal{D}_n\langle z\rangle$. Il s'agit de l'algèbre

$$\mathbf{C}\{x_1, \ldots, x_n\}[\partial_{x_1}, \ldots, \partial_{x_n}, z]$$

avec, pour $a, b \in \mathbf{C}\{x\}$ et $i, j = 1, \ldots, n$, les relations suivantes :

$$[z, a] = [z, \partial_{x_i}] = [a, b] = [\partial_{x_i}, \partial_{x_j}] = 0 \text{ et } [\partial_{x_i}, a] = \frac{\partial a}{\partial x_i} z.$$

L'anneau $\mathcal{D}_n\langle z\rangle$ est muni d'une graduation donnée par le degré total en ∂_x et z : $\mathcal{D}_n\langle z\rangle = \bigoplus_{d \geq 0} \mathcal{D}_n\langle z\rangle_d$ où

$$\mathcal{D}_n\langle z\rangle_d = \bigoplus_{k+|\beta|=d} \mathbf{C}\{x\}\partial_x^\beta z^k.$$

Un élément $H \in \mathcal{D}_n\langle z\rangle$ est dit homogène d'ordre (ou de degré) d si H appartient à $\mathcal{D}_n\langle z\rangle_d$, on note $\deg(P) = d$.

Pour $P = \sum_\beta p_\beta(x)\partial_x^\beta$ dans $\mathcal{D}_n$ ($p_\beta(x)$ étant dans $\mathbf{C}\{x\}$), on appelle degré le maximum des $|\beta|$ pour les β tels que $p_\beta(x)$ est non nul, on le note $\deg(P)$.
Pour un tel P, on définit $h(P) \in \mathcal{D}_n\langle z\rangle$ par

$$h(P) = \sum_\beta p_\beta(x)\partial_x^\beta z^{d-|\beta|}$$

où d désigne le degré de P. Ainsi $h(P)$ est homogène et de même degré que P. On dira que c'est **l'homogénéisé de** P.
Pour un idéal I, on appelle **homogénéisé de** I et on note $h(I)$ l'idéal de $\mathcal{D}_n\langle z\rangle$ engendré par $\{h(P) | P \in I\}$. Il s'agit d'un idéal homogène de $\mathcal{D}_n\langle z\rangle$ au sens précisé ci-après.
Pour $H \in \mathcal{D}_n\langle z\rangle$, il existe une écriture unique $H = \sum_{k\in\mathbf{Z}} H_k$ avec les H_k presque tous nuls et pour tout k, $H_k \in \mathcal{D}_n\langle z\rangle_k$. L'ensemble des H_k est appelé ensemble des **composantes homogènes de** H. Un idéal J de $\mathbf{A}_n\langle z\rangle$ est dit homogène s'il est engendré par des éléments homogènes ou de façon équivalente si pour tout H dans J, les composantes homogènes de H sont dans J.

Avant de passer à la suite, nous étendons la filtration F^L à $\mathcal{D}_n\langle z\rangle$ en considérant que $L(\alpha, \beta, k) = L(\alpha, \beta)$. Ainsi nous avons les notions de gradué $\mathrm{gr}^L(\mathcal{D}_n\langle z\rangle)$ associé à $\mathcal{D}_n\langle z\rangle$ ainsi que $\mathrm{gr}^L(J)$ associé à un idéal J de $\mathcal{D}_n\langle z\rangle$, nous avons aussi la notion d'ordre par rapport L d'un élément H que nous notons $\mathrm{ord}^L(H)$, les notions de symboles d'ordre d et de symbole principal.

Des ordres...
Fixons $<_0$ un bon ordre sur $\mathbf{N}^{2n}$ compatible avec l'addition (par exemple l'ordre lexicographique). Maintenant pour une forme L de $\mathcal{U}$, nous introduisons deux ordres $<_L$ et $<_L^h$, le premier sur $\mathbf{N}^{2n}$ et le second sur $\mathbf{N}^{2n+1}$.

$$(\alpha,\beta) <_L (\alpha',\beta') \iff \begin{cases} L(\alpha,\beta) < L(\alpha',\beta') \\ \text{ou } \big(= \text{ et } |\beta| < |\beta'|\big) \\ \text{ou } \big(= \text{ et } = \text{ et } (\alpha,\beta) >_0 (\alpha',\beta')\big) \end{cases}$$

$$(\alpha,\beta,k) <_L^h (\alpha',\beta',k') \iff \begin{cases} |\beta| + k < |\beta'| + k' \\ \text{ou } \big(= \text{ et } (\alpha,\beta) <_L (\alpha',\beta')\big) \end{cases}$$

Les ordres $<_L$ et $<_L^h$ sont des ordres compatibles avec l'addition, nous avons donc les notions d'exposant privilégié :
Pour $P \in \mathcal{D}_n$, on note $\exp_{<_L}(P)$ le maximum de $\mathcal{N}(P)$ par rapport à $<_L$ et pour $H \in \mathcal{D}_n\langle z\rangle$, on note $\exp_{<_L^h}(H)$ le maximum de $\mathcal{N}(H)$ par rapport à $<_L^h$. Pour un idéal I de $\mathcal{D}_n$ (resp. $J \subset \mathcal{D}_n\langle z\rangle$) on note et on appelle $\exp_{<_L}(I) = \{\exp_{<_L}(P) |\, P \in I\}$ l'exposant (ou escalier) de I (resp. $\exp_{<_L^h}(J)$ avec une définition similaire). L'escalier d'un idéal $I \subset \mathcal{D}_n$ (resp. $J \subset \mathcal{D}_n\langle z\rangle$) est stable par addition, on peut donc lui appliquer le lemme de Dickson ce qui nous donne la notion et l'existence de bases standards.

On dit qu'une famille $P_1,\ldots,P_q$ d'un idéal I de $\mathcal{D}_n$ est une **base standard** par rapport à $<_L$ si

$$\exp_{<_L}(I) = \bigcup_{i=1}^{q} \big(\exp_{<_L}(P_i) + \mathbf{N}^{2n}\big).$$

Il en est de même pour un idéal J de $\mathcal{D}_n\langle z\rangle$.

...aux divisions
Etant donnée une forme linéaire L, nous avons vu que dans le cas de $\mathbf{A}_n$ nous avons besoin d'homogénéiser et de travailler (ie diviser) dans $\mathbf{A}_n\langle z\rangle$ avec l'ordre $<_L^h$ dès que L n'est pas à coefficients positifs. Dans le cas présent (i.e. dans $\mathcal{D}_n$), l'ordre $<_L$ est un ordre qui permet de faire des divisions uniquement dans le cas où la restriction de L à $\mathbf{R}^n \times \{0\}^n$ est nulle. En effet dans le cas contraire, on peut imaginer une "division" dans laquelle les restes intermédiaires ont un exposant privilégié qui baisse alors que le degré en ∂_x augmente. Maintenant dans le cas où la restriction de L à $\mathbf{R}^n \times \{0\}^n$ est nulle, une base standard $\mathcal{G}$ d'un idéal $I \subset \mathcal{D}_n$ est telle que pour tout $P \in I$, on a $P = \sum_{P\in G} Q_P \cdot P$ avec $\mathrm{ord}^L(P) \geq \mathrm{ord}^L(Q_P P)$ (cela reste à préciser) ce qui revient à dire que le degré de P en ∂_x (par rapport à L) majore celui des $Q_P P$. Une telle base standard est intéressante par exemple si $L(\alpha,\beta) = |\beta|$ auquel cas le symbole principal (usuel) de P est combinaison linéaire des symboles principaux des éléments de $\mathcal{G}$ autrement dit ces derniers engendrent le gradué de I pour la filtration par l'ordre ce qui fournit des équations pour la variété caractéristique de $\mathcal{D}_n/I$ (ceci

a été étudié dans par F. Castro dans [**C**], voir aussi [**C-G**]). Ceci étant dit, si on veut aller plus loin et obtenir une base standard (génératrice) de I pour n'importe quelle forme L dans $\mathcal{U}$, on a besoin de travailler dans un autre anneau $\mathcal{D}_n\langle z\rangle$ et avec un autre ordre $<_L^h$.

Dans ce qui va suivre, nous allons donc rappeler le théorème de division dans $\mathcal{D}_n\langle z\rangle$ et ses conséquences. Nous rappellerons les définitions de base standard minimale et base standard réduite.

A une q-uplet $(e^1, \ldots, e^q)$ d'éléments de $\mathbf{N}^{2n+1}$ nous associons comme précédement une partition $\Delta_1, \ldots, \Delta_q, \bar{\Delta}$ de $\mathbf{N}^{2n+1}$.

THEOREME 1.18. *(*[**A-C-G 2**]*) Soient $H, H_1, \ldots, H_q$ dans $\mathcal{D}_n\langle z\rangle$ et L dans $\mathcal{U}$.*
Notons $\Delta_1, \ldots, \Delta_q, \bar{\Delta}$ la partition de $\mathbf{N}^{2n+1}$ associée à $(\exp_{<_L^h}(H_1), \ldots, \exp_{<_L^h}(H_q))$. Il existe un unique $(q+1)$-uplet $(Q_1, \ldots, Q_q, R)$ d'éléments de $\mathcal{D}_n\langle z\rangle$ vérifiant :

(1) $H = Q_1H_1 + \cdots, Q_qH_q + R$,

(2) Pour tout i, si $Q_i \neq 0$ alors $\mathcal{N}(Q_i) + \exp_{<_L^h}(H_i) \subset \Delta_i$,

(3) Si $R \neq 0$ alors $\mathcal{N}(R) \subset \bar{\Delta}$.

REMARQUE 1.19. *Si H et les H_i sont homogènes de degrés respectifs d et d_i alors R est homogène de degré d et pour tout i, Q_i est homogène de degré $d - d_i$.*

COROLLAIRE 1.20. *Nous avons*

$$\exp_{<_L^h}(H) = max_{<_L^h}\{\exp_{<_L^h}(Q_1H_1), \ldots, \exp_{<_L^h}(Q_qH_q), \exp_{<_L^h}(R)\}.$$

COROLLAIRE 1.21. *Pour tout i, $ord^L(H) \geq ord^L(Q_iH_i)$ et $ord^L(H) \geq ord^L(R)$.*

COROLLAIRE 1.22. *Soit J un idéal de $\mathcal{D}_n\langle z\rangle$ et $H_1, \ldots, H_q \in J$. Alors les H_i forment une $<_L^h$-base standard de J si et seulement si pour tout $H \in J$, le reste de la division de H par les H_i est nul. Dans ce cas, pour tout i, on a (avec les notations du théorème) :*

$$\exp_{<_L^h}(H) \geq_L^h \exp_{<_L^h}(Q_iH_i).$$

Soit I un idéal de $\mathcal{D}_n$. Soit $H_1, \ldots, H_q$ une $<_L^h$-base standard de $h(I)$. Quitte à garder pour chaque i la composante homogène qui a même exposant que H_i, on peut supposer que H_i est homogène. Maintenant prenons P dans I. En divisant $h(P)$ par les H_i, puis en spécialisant $z = 1$, on peut montrer que pour $i = 1, \ldots, q$, il existe $q_i \in \mathcal{D}_n$ tel que $P = \sum_i q_iH_{i|z=1}$ avec $\exp_{<_L}(P) \geq_L \exp_{<_L}(q_iH_{i|z=1})$.
Autrement dit :

COROLLAIRE 1.23. *Si $H_1, \ldots, H_q$ est une $<_L^h$-base standard homogène de $h(I)$ (il en existe toujours une) alors les $H_{i|z=1}$ forment une $<_L$-base standard génératrice de I.*

Bases standards réduites et minimales
Dans ce qui suit, nous rappelons les définitions de base standard réduite et base standard minimale. J'ai décidé d'adjoindre les démonstrations pour la commodité

du lecteur et dans un souci dêtre complet.

D'abord précisons un peu le lemme de Dickson. Soit E un sous-ensemble de $\mathbf{N}^r$ stable par addition. Nous avons vu qu'il existe un sous-ensemble fini F de E tel que

$$E = \bigcup_{e \in F} (e + \mathbf{N}^r).$$

On dit que F **engendre** E.
On dira que F est **minimal** si l'implication suivante est vraie pour tout $F' \subset E$:

$$(F' \text{ engendre } E) \Rightarrow F \subseteq F'.$$

LEMME 1.24. *Pour tout $E \subset \mathbf{N}^r$ stable par addition, il existe un unique sous-ensemble générateur minimal de E.*

DÉMONSTRATION. L'unicité vient de la définition même de la minimalité.
Existence :
Soit F_0 un ensemble générateur de E. On pose $F = \{e \in F_0 | \forall e' \in F_0, \text{ si } e \neq e' \text{ alors } e \notin e' + \mathbf{N}^r\}$. Montrons que F est générateur. Soit $e \in E$, il existe $e_0 \in F_0$ tel que $e \in e_0 + \mathbf{N}^r$. Si $e_0 \notin F$ alors il existe $e_1 \in F_0$ tel que $e_0 \in e_1 + (\mathbf{N}^r \smallsetminus 0)$. Si $e_1 \notin F$ alors il existe $e_2 \in F_0$ tel que $e_1 \in e_2 + (\mathbf{N}^r \smallsetminus 0)$, etc. On construit ainsi une suite $e_0, e_1, e_2, \ldots$ d'éléments distincts deux à deux dans F_0. Par finitude de F_0, ce processus s'arrête, c'est-à-dire qu'il existe j tel que e_j soit dans F et comme $e \in e_j + \mathbf{N}^r$, on en conclut que F engendre E. Montrons que F est minimal.
Soit donc F' générateur de E. Soit $e \in F$, il existe $e' \in F'$ tel que $e \in e' + \mathbf{N}^r$ et il existe $e_1 \in F$ tel que $e' \in e_1 + \mathbf{N}^r$. Ainsi $e \in e_1 + \mathbf{N}^r$ et par définition de F on a nécessairement $e = e_1$. Par suite, e égale e', c'est-à-dire que e appartient à F'. □

Soit J un idéal de $\mathcal{D}_n\langle z\rangle$ (la définition serait la même pour un idéal de $\mathcal{D}_n$ ou $\mathbf{A}_n$). On dit que $H_1, \ldots, H_q$ est une **$<_L^h$-base standard minimale** si l'ensemble des $\exp_{<_L^h}(H_i)$ est générateur minimal de $\exp_{<_L^h}(J)$.

Soit $H \in J$ (il en serait de même pour $H \in J \subset \mathbf{A}_n\langle z\rangle$ ou $P \in I \subset \mathbf{A}_n$ pourvu que l'ordre soit bon) on dit que H **est réduit** par rapport à $<_L^h$ si

$$(\mathcal{N}(H) \smallsetminus \exp_{<_L^h}(H)) \subset (\mathbf{N}^{2n+1} \smallsetminus \exp_{<_L^h}(J)).$$

Nous avons le résultat d'unicité suivant dont la preuve triviale est omise :

LEMME 1.25. *Si $H_1, H_2 \in J$ sont réduits et ont même exposant privilégié par rapport à $<_L^h$ alors ils sont égaux (à un multiple scalaire près).*

On dit qu'une **base standard** de J est **réduite** si elle est constituée d'éléments réduits.

LEMME 1.26. *Pour tout idéal J de $\mathcal{D}_n\langle z\rangle$ et pour tout $L \in \mathcal{U}$, il existe une unique $<_L^h$-base standard réduite minimale de J (à une multiplication par un scalaire près).*

DÉMONSTRATION. L'unicité est assurée par les deux lemmes précédents.
Maintenant soit $H_1, \ldots, H_q$ une base standard minimale de J (dont le lemme 1.24 assure l'existence). Pour chaque i, on écrit $H_i = \mathrm{tp}_{<_L^h}(H_i) + H_i'$. Soit alors R_i le reste de la division de H_i' par les H_k. En posant $G_i = \mathrm{mp}_{<_L^h}(H_i) + R_i$, on obtient

que $G_1, \dots, G_q$ est une base standard réduite (et minimale) de J ce qui démontre l'existence. $\square$

REMARQUE 1.27. *Si l'idéal $J \subset \mathcal{D}_n\langle z\rangle$ est homogène alors la base standard réduite minimale de J est homogène.*

Démonstration. En effet si on part d'un base standard $\mathcal{G}_0$ minimale de J, on a vu que pour chaque $H \in \mathcal{G}_0$, si on prend la partie homogène de H qui contient le monôme privilégié et si on note $\mathcal{G}_1$ ce nouvel ensemble alors $\mathcal{G}_1$ est une base standard minimale homogène de J. Maintenant appliquons à cette nouvelle base le procédé de réduction du lemme précédent et appelons $\mathcal{G}$ l'ensemble obtenu. Alors $\mathcal{G}$ est la base standard réduite minimale de J et par construction elle est homogène (puisque les divisions conservent l'homogénéité). $\square$

Pour finir, énonçons un résultat qui permet de voir l'utilité des bases standards réduites minimales. Nous l'utiliserons dans le prochain chapitre.

LEMME 1.28. *Soient $<_1$ et $<_2$ deux ordres sur $\mathbf{N}^{2n+1}$ qui permettent de faire des divisions dans $\mathcal{D}_n\langle z\rangle$ (par exemple $<_i=<_{L_i}^h$ avec L_1 et L_2 deux formes). Soit $\mathcal{G}$ la base standard réduite minimale d'un idéal $J \subset \mathcal{D}_n\langle z\rangle$ par rapport à l'ordre $<_1$. Supposons que pour tout $Q \in \mathcal{G}$, $\exp_{<_1}(Q)$ et $\exp_{<_2}(Q)$ soient égaux. Alors $\mathcal{G}$ est aussi la base standard réduite minimale de J par rapport à $<_2$.*

Démonstration. Notons E_1 (resp. E_2) l'escalier de J par rapport à $<_1$ (resp. $<_2$). Montrons d'abord que $E_1 = E_2$. Pour cela, il suffit de montrer l'inclusion suivante :

$$E_2 \subseteq \bigcup_{Q\in\mathcal{G}} (\exp_{<_2}(Q) + \mathbf{N}^r).$$

Soit P un élément de J. Effectuons la division de P par $\mathcal{G}$ par rapport à l'ordre $<_1$. Par hypothèse, cette division est aussi une division par rapport à l'ordre $<_2$. Par conséquent $\exp_{<_2}(P)$ appartient à $\exp_{<_2}(Q) + \mathbf{N}^r$ pour un certain Q de $\mathcal{G}$. On en tire donc l'égalité des escaliers E_1 et E_2. On en déduit alors facilement que $\mathcal{G}$ est une base standard de J par rapport à $<_2$, qu'elle est minimale et réduite. $\square$

2. Eventail de Gröbner

2.1. ...analytique. Suivant les notations de la section précédente, considérons l'ensemble $\mathcal{U}$ des formes linéaires qui permettent de diviser dans $\mathcal{D}_n\langle z\rangle$. Pour L parcourant $\mathcal{U}$, on a dit qu'à isomorphisme près il existe un nombre fini de gradués $\mathrm{gr}^L(\mathcal{D}_n)$ ce que nous rappelons un peu plus bas. Maintenant si on se donne un idéal I de $\mathcal{D}_n$, on peut se demander comment se comporte l'ensemble des $\mathrm{gr}^L(I)$ quand L sillonne $\mathcal{U}$. Comme nous le verrons, la réponse est qu'à isomorphisme près on a un nombre fini de gradués de I. On peut même répondre plus précisement à cette question en disant que l'espace $\mathcal{U}$ se partitionne en un nombre fini de σ pour lesquels $\mathrm{gr}^L(I) \simeq \mathrm{gr}^{L'}(I)$ dès que L et L' sont dans un même σ. On peut montrer en fait que de tels σ sont des unions finis de cônes rationnels convexes. En fait il faut donner un sens au signe $\simeq$ qui sépare les deux gradués ce qui sera précisé plus bas.

Pour mener à bien cette étude, il est nécessaire de travailler dans $\mathcal{D}_n\langle z\rangle$ avec l'idéal $h(I)$. On dit que L et L' sont dans la même classe si $\mathrm{gr}^L(h(I)) \simeq \mathrm{gr}^{L'}(h(I))$. On peut alors montrer que l'ensemble des classes d'équivalences dans $\mathcal{U}$ est une partition formée de cônes rationnels convexes. L'ensemble de ces cônes est appelé éventail de Gröbner (analytique) de $h(I)$ bien que ce ne soit pas au sens propre du terme un éventail. On parle aussi d'éventail de Gröbner étendu de $\mathcal{D}_n/I$.

L'intérêt de considérer les classes associées à $h(I)$ plutôt que celles associées à I vient du fait que ces dernières ne sont pas nécessairement convexes (voir par exemple [**A-C-G 1**]). De plus c'est dans $\mathcal{D}_n\langle z\rangle$ que l'on sait diviser en général.

Montrons que l'ensemble des $\mathrm{gr}^L(\mathcal{D}_n)$ est fini (à isomorphisme près) quand L décrit $\mathcal{U}$. Pour cela, écrivons $L(\alpha,\beta) = \sum_i e_i\alpha_i + \sum_i f_i\beta_i$ et quitte à réordonner les variables, supposons que :
– pour $i = 1,\dots,p_1$, $e_i < 0$ et $e_i + f_i = 0$,
– pour $i = p_1+1,\dots,p_2$, $e_i < 0$ et $e_i + f_i > 0$,
– pour $i = p_2+1,\dots,p_3$, $e_i = 0$ et $f_i > 0$,
– pour $i = p_3+1,\dots,n$, $e_i = f_i = 0$.
Dans ce cas $\mathrm{gr}^L(\mathcal{D}_n)$ est isomorphe à

$$\mathbf{C}\{x_{p_2+1},\dots,x_n\}[x_1,\dots,x_{p_2},\partial_{x_1},\dots,\partial_{x_{p_1}},\xi_{p_1+1},\dots,\xi_{p_3},\partial_{x_{p_3+1}},\dots,\partial_{x_n}].$$

On voit donc qu'à isomorphisme près, le nombre de gradués $\mathrm{gr}^L(\mathcal{D}_n)$ est majoré par le nombre de partitions de $\{1,\dots,n\}$ en quatre ensembles.

Soient maintenant L et L' dans $\mathcal{U}$. On dira qu'elles sont **équivalentes** si

$$(\sim)\qquad \mathrm{gr}^L(\mathcal{D}_n\langle z\rangle) \simeq \mathrm{gr}^{L'}(\mathcal{D}_n\langle z\rangle) \text{ et } \mathrm{gr}^L(h(I)) \simeq \mathrm{gr}^{L'}(h(I)).$$

En effet pour pouvoir comparer les gradués de $h(I)$, il faut que les gradués de $\mathcal{D}_n\langle z\rangle$ soient isomorphes. La relation que l'on vient de définir est une relation d'équivalence.

Maintenant nous sommes en mesure d'énoncer le théorème principal dû à A. Assi, F. Castro et M. Granger :

THEOREME 1.29. [**A-C-G 2**] *La partition sur $\mathcal{U}$ donnée par la relation d'équivalence précédente est constituée de cônes polyhèdraux rationnels convexes. Cette partition qu'on note $\mathcal{E}(h(I))$ est appelée éventail de Gröbner (analytique) de $h(I)$.*
De plus pour chaque cône $\sigma \in \mathcal{E}(h(I))$, il existe $Q_1,\dots,Q_r \in h(I)$ homogènes tels que :
– *pour toute $L, L' \in \sigma$, $\sigma^L(Q_j) = \sigma^{L'}(Q_j)$ et $\exp_{<^h_L}(Q_j) = \exp_{<^h_{L'}}(Q_j)$ pour tout j.*
– *pour tout $L \in \sigma$, l'ensemble $\{Q_1,\dots,Q_r\}$ est la base standard réduite minimale de $h(I)$ par rapport à $<^h_L$.*

Remarquons que la deuxième condition nous montre que sur un cône σ, l'escalier de $h(I)$ par rapport à $<^h_L$ est constant lorsque L parcourt σ.

Une conséquence de ce résultat est qu'en effectuant la spécialisation $z = 1$, on obtient un résultat similaire pour $I \subset \mathcal{D}_n$ sauf que les classes d'équivalence ne sont pas nécessairement convexes (un exemple est donné dans [**A-C-G 1**]) mais sont des unions de cônes polyhèdraux rationnels.

2.2. ...algébrique. Ici on se place sur $\mathbf{A}_n(\mathbf{k})$ dans lequel on se donne un idéal I. A la différence du cas analytique, on peut prendre dans $\mathcal{U}$ n'importe quelle forme linéaire sur $\mathbf{R}^{2n}$ à condition qu'elle respecte la structure de d'anneau de $\mathbf{A}_n(\mathbf{k})$. Ainsi $\mathcal{U}$ est constitué des formes linéaires $L : \mathbf{R}^{2n} \to \mathbf{R}$, $L(\alpha,\beta) = \sum_1^n e_i\alpha_i + \sum_1^n f_i\beta_i$

vérifiant $e_i + f_i \geq 0$ pour tout $i = 1, \ldots, n$ (mais la condition $e_i \leq 0$ est inutile ici). En effet, quelque soit une telle forme, l'ordre $<_L^h$ permet de diviser dans $\mathbf{A}_n(\mathbf{k})\langle z \rangle$. Mis à part cette modification pour $\mathcal{U}$, le théorème est le même.

3. V-multifiltration et éventail de Gröbner

Les filtrations V_j

Dans les chapitres suivant nous aurons affaire à un idéal I de $\mathcal{D}_{n+p}$ (dans le cas analytique) ou de $\mathbf{A}_{n+p}$ (dans le cas algébrique). D'abord, fixons les notations. Notons $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $t = (t_1, \ldots, t_p)$ deux sytèmes de variables alors $\mathcal{D}_{n+p}$ est l'anneau des opérateurs différentiels à coefficients dans $\mathbf{C}\{x, t\} = \mathbf{C}\{x_1, \ldots, x_n, t_1, \ldots, t_p\}$ et $\mathbf{A}_{n+p} = \mathbf{A}_{n+p}(k)$ désigne l'anneau des opérateurs différentiels à coefficients dans $\mathbf{k}[x, t] = \mathbf{k}[x_1, \ldots, x_n, t_1, \ldots, t_p]$.

Pour tout $j = 1, \ldots, p$, notons V_j la forme linéaire sur $\mathbf{R}^{2n+2p} = \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^p$ définie par $V_j(\alpha, \beta, \mu, \nu) = \nu_j - \mu_j$. On obtient ainsi p filtrations (indexées par $\mathbf{Z}$) que l'on note aussi $V_1, \ldots, V_p$ sur $\mathbf{A}_{n+p}$ et $\mathcal{D}_{n+p}$.
Par exemple un élément de $\{V_j\}_k(\mathcal{D}_n)$ sera de la forme

$$\sum_{\alpha,\beta,\mu,\nu} c_{\alpha,\beta,\mu,\nu} x^\alpha \partial_x^\beta t^\mu \partial_t^\nu$$

avec $\nu_j - \mu_j \leq k$ si $c_{\alpha,\beta,\mu,\nu}$ est non nul dans $\mathbf{C}$.
Nous noterons $\mathcal{U}_V \subset \mathcal{U}$ le sous-ensemble des formes linéaires de la forme

$$L = \sum_{j=1}^{p} w_1 V_1 + \cdots + w_p V_p$$

avec $w = (w_1, \ldots, w_p) \in (\mathbf{R}_{\geq 0})^p$. Ainsi nous prendrons l'habitude lorsque les notations ne prêteront pas à confusion d'identifier $\mathcal{U}_V$ et $(\mathbf{R}_{\geq 0})^p$. Notons que quelque soit L dans $\mathcal{U}_V$, le gradué $\mathrm{gr}^L(\mathcal{D}_{n+p})$ est isomorphe à $\mathcal{D}_n[t, \partial_t]$ ainsi pour un idéal I, tous les gradués $\mathrm{gr}^L(I)$ vivront dans le même espace (à isomorphisme près). Dans le cas de $\mathbf{A}_n$, on a $\mathrm{gr}^L(\mathbf{A}_{n+p})$ isomorphe à $\mathbf{A}_{n+p}$. Pour finir, nous noterons, suivant [**S1**], V^L au lieu de F^L la filtration (indexé par $L(\mathbf{N}^{2n+2p})$) sur $\mathcal{D}_{n+p}$ et $\mathbf{A}_{n+p}$ (pour bien signifier que $L \in \mathcal{U}_V$).

La multifiltration V

Il s'agit de la filtration $V = (V_1, \ldots, V_p)$ indexée par $\mathbf{Z}^p$ sur $\mathcal{D}_{n+p}$ et $\mathbf{A}_{n+p}$ définie pour tout $\tau \in \mathbf{Z}^p$ par

$$V_\tau(\mathcal{D}_{n+p}) = \bigcap_{j=1}^{p} \{V_j\}_{\tau_j}(\mathcal{D}_{n+p}),$$

la définition étant identique sur $\mathbf{A}_{n+p}$.
Etant donné $P \in \mathcal{D}_{n+p}$ ou $P \in \mathbf{A}_{n+p}$, nous définissons :

- Le V-ordre de P noté $\mathrm{ord}^V(P) \in \mathbf{Z}^p$, il s'agit du p-uplet dont la j-ième composante est $\mathrm{ord}^{V_j}(P)$.
- Le symbole principal de P noté $\sigma^V(P) \in \mathcal{D}_{n+p}$ (resp. $\mathbf{A}_{n+p}$) définit comme suit :

On écrit $P = \sum_{\mu,\nu} p_{\mu\nu}(x, \partial_x) t^\mu \partial_t^\nu$, on pose

$$\sigma^V(P) = \sum_{\mu-\nu=\mathrm{ord}^V(P)} p_{\mu\nu}(x, \partial_x) t^\mu \partial_t^\nu.$$

Remarquons qu'il est possible que $\sigma^V(P)$ soit nul sans que P le soit, par exemple pour $P = t_1 + t_2$. Nous reviendrons sur ce genre de choses dans le dernier chapitre.

Nous nous servirons de cette filtration essentiellement dans les deux prochains chapitres ainsi que dans le chapitre 7.

Eventail de Gröbner

Dans presque tout ce qui va suivre, nous nous intéresserons aux formes linéaires qui sont dans $\mathcal{U}_V$, ainsi pour un idéal I de $\mathcal{D}_{n+p}$ ou de $\mathbf{A}_{n+p}$, nous considérerons la restriction de l'eventail $\mathcal{E}(h(I))$ à l'espace $\mathcal{U}_V$, nous la noterons $\mathcal{E}_V(h(I))$. Bien entendu, le théorème 1.29 reste valable si on remplace $\mathcal{U}$ par $\mathcal{U}_V$ et $\mathcal{E}$ par $\mathcal{E}_V$:

THEOREME 1.30. *La partition sur $\mathcal{U}_V$ donnée par la relation d'équivalence précédente ($\sim$) est constituée de cônes polyhèdraux rationnels convexes. Cette partition qu'on note $\mathcal{E}_V(h(I))$ est appelée éventail de Gröbner (analytique) de $h(I)$ associé à (la filtration) $V(\mathcal{D}_{n+p})$.*

De plus pour chaque cône $\sigma \in \mathcal{E}(h(I))$, il existe $Q_1, \ldots, Q_r \in h(I)$ homogènes tels que :

- *pour toute $L, L' \in \sigma$, $\sigma^L(Q_j) = \sigma^{L'}(Q_j)$ et $\exp_{<_L^h}(Q_j) = \exp_{<_{L'}^h}(Q_j)$ pour tout j.*
- *pour tout $L \in \sigma$, l'ensemble $\{Q_1, \ldots, Q_r\}$ est la base standard réduite minimale de $h(I)$ par rapport à $<_L^h$.*

On voit que pour chaque cône σ, il existe des Q_j qui, pour tout L de σ, forment la base standard réduite minimale de $h(I)$ par rapport à $<_L^h$. S'il n'y pas de confusion possible, on l'appelle **la base standard de $h(I)$ associée à σ**.

Pour finir, nous allons définir **le 1-squelette de** $\mathcal{E}_V(h(I))$ et ses **éléments primitifs** $\mathcal{L}(\mathcal{E}_V(h(I)))$.

Etant donnée une forme linéaire $L \in \mathcal{U}_V$ rationnelle. On appelle élément primitif de L la forme (entière) proportionnelle à L dont les coordonnées sont des entiers premiers entre eux.

Si Σ est un éventail (au sens propre du terme), son 1-squelette est simplement l'ensemble de ses faces de dimension 1. En ce qui concerne $\mathcal{E}_V(h(I))$, son 1-squelette est l'union, sur chaque cône σ, des sommets de l'adhérence de σ. On note alors $\mathcal{L}(\mathcal{E}_V(h(I)))$ l'ensembles de éléments primitifs du 1-squelette de $\mathcal{E}_V(h(I))$.

Donnons un avant-goût de ce qui nous attend dans le chapitre suivant : si L est dans le 1-squelette d'un cône σ de $\mathcal{E}_V(h(I))$, on peut avoir $\sigma^L(Q_j) \neq \sigma^{L'}(Q_j)$ pour L' dans σ et pour un Q_j dans la base standard de $h(I)$ associé à σ (c'est le cas justement quand L n'appartient pas à σ). Par contre, nous verrons qu'il est possible de construire un ordre $\lhd_L^\sigma$ sur $\mathbf{N}^{2n+2p+1}$ (qui privilégie le L-ordre) tel que pour tout j :

$$\exp_{<_{L'}^h}(Q_j) = \exp_{\lhd_L^\sigma}(Q_j),$$

ce qui nous dira que les Q_j forment quand même une L-base standard de $h(I)$ en un sens que l'on précisera.

Première partie

Etude des polynômes de Bernstein-Sato

CHAPITRE 2

Preuve constructive de l'existence de polynômes de Bernstein-Sato pour plusieurs fonctions analytiques

Dans ce chapitre, nous nous consacrons à l'étude des idéaux de Bernstein-Sato. Dans un premier temps (sections 1 et 2), nous nous intéressons au cas analytique. Nous savons depuis un travail (non publié) de J.E. Björk et depuis l'article [**K**] de M. Kashiwara que dans le cas d'une fonction analytique, l'idéal de Bernstein-Sato est non nul. Dans le cas de plusieurs fonctions, c'est C. Sabbah dans [**S1**] et [**S2**] qui démontra la non nullité de l'idéal de Bernstein-Sato. La preuve se déroule essentiellement en deux étapes : la première consite à montrer qu'un certain module est holonome et la seconde à montrer deux assertions concernant la filtration $\overline{V}(M)$, la premiere assertion est une condition de finitude préalable à la deuxième qui a pour objet le caractère bon de cette filtration.

Dans la section 1 nous donnons une description de la preuve de C. Sabbah (reprise par A. Gyoja), description dans laquelle nous dégageons les points cruciaux de la preuve et où nous isolons sous forme du théorème 2.9 la seconde étape de la preuve. Ce résultat est le point de départ de ce chapitre car nous en donnons un énoncé différent que l'on peut qualifier d'élémentaire et constructif, il s'agit du théorème 2.10 qui est le résultat principal du présent chapitre. Dans ce théorème et en n'utilisant que la théorie des bases de Gröbner et des éventails de Gröbner, on montre que la filtration $\overline{V}(M)$ est décrite par un nombre fini de formes linéaires et on montre qu'elle est bonne dans le cas où $p = 2$. Néanmoins, grâce à la proposition 2.14 (appelée proposition clé), il est possible (en reprenant la preuve de la proposition 2.2.3 de [**S1**] en y remplaçant l'éventail adapté par l'éventail $\mathcal{E}_V(h(I))$) de montrer que la filtration $\overline{V}(M)$ est bonne pour tout p, ce qui permet d'éviter la notion délicate d'éventail de platitude.

Dans la section 3, nous donnons une preuve de la non nullité de l'idéal de Bernstein-Sato dans le cas algébrique (où les fonctions de départ sont polynomiales). Cette preuve est une généralisation facile de celle d'une fonction donnée par I.N. Bernstein [**Be**] (reprise par J.E. Björk dans [**Bj**]). Nous l'avons incluse dans cette thèse car il semble qu'elle ne soit écrite nulle part.

1. Un rappel de la preuve

Fixons deux entiers $p \geq 1$ et $n \geq 1$.
On se donne $f_1, \ldots, f_p$ des éléments de $\mathbf{C}\{x\} = \mathbf{C}\{x_1, \ldots, x_n\}$ autrement dit des germes de fonctions analytiques sur $\mathbf{C}^n$ en 0 tels que $f_j(0) = 0$ pour tout j. Soient $s_1, \ldots, s_p$ des indeterminées. On se donne un symbole qu'on note $f^s = f_1^{s_1} \cdots f_p^{s_p}$. On considère le module libre engendré par f^s :

$$\mathcal{L} = \mathbf{C}\{x\}[\frac{1}{f_1 \cdots f_p}, s_1, \ldots, s_p] \cdot f^s.$$

En notant $\mathcal{D}_n[s]$ l'anneau $\mathcal{D}_n \otimes_{\mathbf{C}} \mathbf{C}[s_1, \ldots, s_p]$, on peut voir que $\mathcal{L}$ a une structure naturelle de $\mathcal{D}_n[s]$-module. En effet, les éléments de $\mathbf{C}\{x\}[s]$ agissent par multiplication alors que ∂_{x_i} agit naturellement en dérivant formellement. Nous avons donc les inclusions naturelles :

$$\mathbf{C}[s]f^s \subset \mathcal{D}_n[s]f^s \subset \mathcal{L}.$$

Etant donné $v = (v_1, \ldots, v_p)$ dans $\mathbf{N}^p$, on considère la relation suivante :

$$b(s_1, \ldots, s_p)f^s = Pf^{s+v}. \tag{1}$$

Lorsque les f_j sont des polynômes (ne s'annulant pas nécessairement en 0), on note $\mathcal{B}^v(f)$ l'idéal des $b(s) \in \mathbf{C}[s]$ qui vérifient (1) avec $P \in \mathbf{A}_n[s]$. Et si les f_j sont analytiques, $\mathcal{B}^v(f)$ désigne l'idéal des $b(s) \in \mathbf{C}[s]$ tels qu'une égalité du type (1) ait lieu avec P dans $\mathcal{D}_n[s]$. L'idéal $\mathcal{B}^v(f)$ est appelé idéal de Bernstein-Sato. Lorsque $p = 1$, l'idéal $\mathcal{B}^v(f)$ est principal et on appelle polynôme de Bernstein son générateur unitaire.
Historiquement, c'est I.N. Bernstein qui a montré dans [**Be**] que dans le cas polynomial et pour $p = 1$ (et pour $v = 1$) l'idéal $\mathcal{B}^v(f)$ n'est pas nul. J. E. Björk donna une preuve dans le cas analytique toujours pour $p = 1$ dans un preprint non publié. M. Kashiwara publia la preuve (voir [**K**]) dans le cas analytique à une fonction en montrant en plus que le polynôme de Bernstein est à racines rationnelles. En ce qui concerne le cas de plusieurs fonctions analytiques, c'est C. Sabbah qui a montré dans [**S1**] et [**S2**] que l'idéal de Bernstein-Sato est non nul. Dans [**G**], A. Gyoja reprend la preuve de C. Sabbah en montrant un résultat supplémentaire de rationalité. Signalons que C. Sabbah avait démontré mais pas publié ce dernier résultat.

1.1. Les annulateurs de f^s. D'abord clarifions un peu les termes utilisés. Les fonctions $f_1, \ldots, f_p$ étant données. Nous dirons qu'on est dans le cas

- algébrique ou polynomial ou global si les f_j sont des polynômes de $\mathbf{C}[x]$. Nous verrons dans le chapitre suivant que nous travaillerons avec un corps quelconque qui n'est pas forcément $\mathbf{C}$.
- analytique ou local (sous-entendu en 0) si les f_j sont dans $\mathbf{C}\{x\}$. Il n'est pas indispensable a priori d'imposer que tous les f_j s'annulent en 0 mais pour les besoins de la preuve, c'est ce que nous ferons (voir la remarque suivante) donc à partir de maintenant et sauf mention contraire, lorsque nous nous placerons dans le cas analytique, nous supposerons que les f_j ne sont pas des unités.

REMARQUE 2.1. *Etant donnés $f_1, \ldots, f_p$ dans $\mathbf{C}\{x\}$, supposons que $f_1, \ldots, f_q$ soient inversibles dans $\mathbf{C}\{x\}$ et pas les $p - q$ suivants. Soit $v = (v^1, v^2)$ dans $\mathbf{N}^q \times \mathbf{N}^{p-q}$, alors l'idéal de Bernstein-Sato $\mathcal{B}^v(f)$ est égal à l'idéal engendré par $\mathcal{B}^{v^2}(f_{q+1}, \ldots, f_p)$.*

DÉMONSTRATION. Nous démontrons le résultat seulement pour $q = 1$, en effet par une induction facile sur q on peut prouver le résultat pour q quelconque.
Soit $b(s_1, \ldots, s_p)$ dans $\mathcal{B}^v(f)$. Alors il existe $P(s_1, \ldots, s_p) \in \mathcal{D}_n[s_1, \ldots, s_p]$ tel que $b(s)f^s = P(s)f^{s+v}$. Maintenant pour tout $s_1 = \lambda$ fixé dans $\mathbf{C}$, on a

$$b(\lambda, s_2, \ldots, s_p)f_2^{s_2} \cdots f_p^{s_p} = (f_1^{-\lambda}P(\lambda, s_2, \ldots, s_p)f_1^{\lambda+v_1}) \cdot f_2^{s_2+v_2} \cdots f_p^{s_p+v_p}.$$

Or l'opérateur du membre de droite entre parenthèses est dans $\mathcal{D}_n[s_2, \ldots, s_p]$. Ainsi, pour tout $\lambda \in \mathbf{C}$, $b(\lambda, s_2, \ldots, s_p)$ appartient à $\mathcal{B}^{v^2}(f_2, \ldots, f_p)$. Il n'est alors pas

difficile de voir que $b(s_1,\dots,s_p)$ est un polynôme de la variable s_1 dont les coefficents sont dans $\mathcal{B}^{v^2}(f_2,\dots,f_p)$, autrement dit, il est dans l'idéal engendré par $\mathcal{B}^{v^2}(f_2,\dots,f_p)$.
Réciproquement, soit $b(s_2,\dots,s_p)$ dans $\mathcal{B}^{v^2}(f_2,\dots,b_p)$. Il existe donc $P(s_2,\dots,s_p)\in\mathcal{D}_n[s_2,\dots,s_p]$ tel que $b(s_2,\dots,s_p)f_2^{s_2}\cdots f_p^{s_p}=P(s_2,\dots,s_p)f_2^{s_2+v_2}\cdots f_p^{s_p+v_p}$. En remarquant que $f_1^{s_1}P(s_2,\dots,s_p)f_1^{-s_1-v_1}$ est dans $\mathcal{D}_n[s_1,\dots,s_p]$ et en l'appliquant à f^{s+v}, on obtient $b(s_2,\dots,s_p)f^s$, ce qui montre la relation : $b(s_2,\dots,s_p)\in\mathcal{B}^v(f)$. $\square$

Nous avons vu que $\mathcal{D}_n[s]$ agit naturellement sur $\mathcal{L}$, nous définissons une action de $\mathcal{D}_{n+p}$ (anneau des opérateurs différentiels à coefficients dans $\mathbf{C}\{x,t\}=\mathbf{C}\{x_1,\dots,x_n,t_1,\dots,t_p\}$) sur $\mathcal{L}$. Il s'agit d'une généralisation à plusieurs fonctions de celle définie par B. Malgrange dans [**Mal**]. Pour $g(s)\in\mathbf{C}\{x\}[s,1/f_1\cdots f_p]$ et pour $j=1,\dots,p$, on pose :

$$t_j\cdot(g(s)f^s)=g(s_1,\dots,s_j+1,\dots,s_p)f_jf^s,$$

$$\partial_{t_j}\cdot(g(s)f^s)=-s_jg(s_1,\dots,s_j-1,\dots,s_p)f_j^{-1}f^s.$$

On voit que si on fait agir un élément de $\mathbf{C}\{t\}$ alors on obtient une série en $f_1,\dots,f_p$ qui converge puisque les f_j sont supposés s'annuler en 0. Cette action fait de $\mathcal{L}$ un $\mathcal{D}_{n+p}$-module.
Il est facile de voir que les relations suivantes sont satisfaites :

(1) $-\partial_{t_j}t_j\cdot(g(s)f^s)=s_jg(s)f^s$ pour tout j.

(2) $(t_j-f_j)\cdot f^s=0$ pour tout j.

(3) $(\partial_{x_i}+\displaystyle\sum_{j=1}^p\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\partial_{t_j})\cdot f^s=0$ pour tout i.

Grâce à la première relation, on peut écrire :

$$\mathcal{D}_n[s]f^s\subset\mathcal{D}_{n+p}f^s\subset\mathcal{L}.$$

LEMME 2.2. *Soit I l'idéal de $\mathcal{D}_{n+p}$ engendré par les t_j-f_j avec $j=1,\dots,p$ et les $\partial_{x_i}+\sum_{j=1}^p\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\partial_{t_j}$ avec $i=1,\dots,n$. Alors I est maximal.*

Démonstration. Par le changement de coordonnés suivant

$$(x_1,\dots,x_n,t_1,\dots,t_p)\mapsto(x_1,\dots,x_n,t_1-f_1(x),\dots,t_p-f_p(x)),$$

on est ramené à étudier la maximalité de l'idéal I_0 engendré par les t_j et les ∂_{x_i}. Soit $P\in\mathcal{D}_{n+p}\smallsetminus I_0$, nous allons montrer que $I'=I_0+\mathcal{D}_{n+p}P$ est égal à $\mathcal{D}_{n+p}$. D'abord, on voit qu'on peut supposer que P appartient à $\mathbf{C}\{x\}[\partial_t]$. Pour un j tel que le degré de P en ∂_{t_j} est non nul, on considère le commutateur $[\partial_{t_j},P]$ qui d'une part est dans I' et d'autre part a un degré en ∂_{t_j} strictement inférieur à celui de P, on voit donc qu'en un nombre fini de telles opérations on construit un élément $a(x)$ qui est dans $I'\cap\mathbf{C}\{x\}$. Maintenant prenons (s'il existe) un i pour lequel la valuation de $a(x)$ en x_i est non nulle, alors le commutateur $[\partial_{x_i},a]$ est dans I' et de valuation en x_i strictement inférieure. Ainsi, en un nombre fini d'opérations de ce type, on obtient dans I' une unité de $\mathbf{C}\{x\}$ et par suite 1 appartient à I'. $\square$

COROLLAIRE 2.3. *L'idéal I est l'annulateur de f^s dans $\mathcal{D}_{n+p}$.*

En effet par les relations 2 et 3 décrites plus haut, on voit que I est inclus dans l'annulateur de f^s (qui n'est pas $\mathcal{D}_{n+p}$ tout entier) et par maximalité de I, nous avons l'égalité.

COROLLAIRE 2.4. *Soit $P(s) \in \mathcal{D}_n[s]$. Alors :*

$$P(s) \cdot f^s = 0 \iff P(-\partial_{t_1} t_1, \ldots, -\partial_{t_p} t_p) \in I.$$

On prendra l'habitude d'écrire $P(-\partial_t t)$ au lieu de $P(-\partial_{t_1} t_1, \ldots, -\partial_{t_p} t_p)$.
La preuve de ce corollaire est triviale. Elle utilise directement la relation 1 et le corollaire précédent.

De ce qui précède on peut remarquer qu'on connait explicitement l'annulateur de f^s dans $\mathcal{D}_{n+p}$. Par contre l'annulateur de f^s dans $\mathcal{D}_n[s]$ (et finalement c'est celui qui nous intéresse le plus) est beaucoup plus difficile à attraper et on n'en connait pas de générateurs explicites bien qu'on puisse décrire un processus qui permette de le calculer (du moins dans le cas algébrique) : nous verrons comment par exemple dans les chapitres 5 et 7.

1.2. Description de la preuve. Comme nous l'avons dit, c'est C. Sabbah ([**S1**] et [**S2**]) qui a donné une preuve de l'existence de polynômes de Bernstein-Sato dans le cas analytique après quoi A. Gyoja ([**G**]) a repris la preuve donnée par C. Sabbah en démontrant un résultat supplémentaire de rationalité. Dans ce paragraphe, nous donnons les grandes lignes de la preuve décrite par A. Gyoja.

Dans cette preuve, nous adopterons des notations particulières. Soit X le germe en 0 de la variété analytique $\mathbf{C}^n$. Nous noterons donc D_X au lieu de $\mathcal{D}_n$. Soit $E = \mathbf{C}^p$, nous noterons $D_E = \mathbf{A}_p(\mathbf{C})$ l'algèbre de Weyl en les variables $t_1, \ldots, t_p$. Nous noterons donc $D_{X\times E} = D_X \otimes_{\mathbf{C}} D_E$ les opérateurs différentiels analytiques en $x_1, \ldots, x_n$ et polynomiaux en $t_1, \ldots, t_p$.

En contemplant la définition de l'idéal I donnée dans le lemme 2.2, on constate que I est en fait définit dans $D_{X\times E}$.

Reprenons les notations introduites dans la dernière section du chapitre précédent, nous y avons définit $\mathcal{U}_V \simeq (\mathbf{R}_{\geq 0})^p$ les formes linéaires obtenues comme combinaisons linéaires de $V_1, \ldots, V_p$ à coefficient dans $\mathbf{R}_{\geq 0}$. Fixons donc une forme linéaire non nulle L dans $\mathcal{U}_V$ entière, c'est-à-dire dans $\mathbf{N}^p_{\geq 0}$ (nous verrons pourquoi seules les formes entières sont intéressantes).

Puisque les filtrations V_j ne concernent que les variables t_j et ∂_{t_j}, on peut considérer l'algèbre de Rees de D_E qu'on note $\mathcal{R}^L(D_E)$ (au lieu de $\mathcal{R}^{V^L}(D_E)$) et qui est définie par :

$$\mathcal{R}^L(D_E) = \bigoplus_{k\in\mathbf{Z}} V_k^L(D_E) \cdot u^k.$$

Remarquons que puisque L est entière, la somme directe précédente est indexée par $\mathbf{Z}$ ce qui simplifie les notations. D'autre part il est clair que $\mathcal{R}^L(D_{X\times E}) = D_X \otimes_{\mathbf{C}} \mathcal{R}^L(D_E)$. Soit $\alpha \in \mathbf{N}^p$ tel que $L(\mu, \nu) = (\alpha|(\nu - \mu))$. Soit $E' \times \mathbf{C}$ une copie de $\mathbf{C}^p \times \mathbf{C}$ où les variables sont $(t'_1, \ldots, t'_p, v)$. Considérons le changement de coordonnées suivant :

$$\begin{array}{rccc} \phi : & E \times \mathbf{C} & \longrightarrow & E' \times \mathbf{C} \\ & (t_1, \ldots, t_p, u) & \longmapsto & (t'_1 = t_1 u^{-\alpha_1}, \ldots, t'_p = t_p u^{-\alpha_p}, v = u). \end{array}$$

Il induit un isomorphime ϕ^* entre $\mathcal{R}^L(D_E)$ et $D_{E'}[v] = D_{E'} \otimes_{\mathbf{C}} \mathbf{C}[v]$ donné par :

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{R}^L(D_E) & \longrightarrow & D_{E'}[v] \\ V_k^L(D_E) \ni t^\mu \partial_t^\nu u^k & \longmapsto & t'^\mu \partial_{t'}^\nu v^{k-L(\nu-\mu)} \end{array}$$

où rappelons que, par définition de $V_k^L(D_E)$, on a $L(\nu-\mu) \leq k$.
Maintenant, notons $M = D_{X\times E}/I$ (nous avons vu que I est bien dans $D_{X\times E}$). En notant $\mathcal{R}^L(I) = \oplus_k (V_k^L(D_{X\times E}) \cap I)u^k$ l'algèbre de Rees induite sur I et $\mathcal{R}^L(M) = \oplus_k V_k^L(M)u^k$ celle induite sur M, on constate que $\mathcal{R}^L(M) \simeq \mathcal{R}^L(D_{X\times E})/\mathcal{R}^L(I)$. Par l'isomorphisme ϕ^*, on voit que $\mathcal{R}^L(M)$ est un module sur $D_{X\times E'} \otimes \mathbf{C}[v]$. Soit u' une nouvelle variable et soit N donné par :

$$N = \mathcal{R}^L(M) \bigotimes_{\mathbf{C}[u]} (\mathbf{C}[u', \partial_{u'}][u]/\mathbf{C}[u', \partial_{u'}][u] \cdot (u-u')).$$

L'isomorphisme ϕ^* confère à N une structure de $D_{X\times E'\times\mathbf{C}}[v]$-module où ici le $\mathbf{C}$ qui est en indice fait référence à la variable u'. Cette structure donne en particulier à N une structure de $D_{X\times E'\times\mathbf{C}}$-module.

LEMME 2.5 ([**S1**] 3.1 et [**G**] Lemme 2.2)**.**
– *N est un $D_{X\times E'\times\mathbf{C}}$-module sous-holonome (c'est-à-dire dont la variété caractéristique a pour dimension $(n+p+1)+1$).*
– *N/uN est un $D_{X\times E'\times\mathbf{C}}$-module holonome (c'est-à-dire que sa variété caractéristique variété a pour dimension $(n+p+1)$).*

Maintenant considérons le D_X-endomorphisme C de $\mathcal{R}^L(M)$ donné par :

$$V_k^L(M)u^k \ni mu^k \longmapsto (L(-\partial_t t) - k)mu^k.$$

On peut alors montrer que C est $D_{X\times E'}$ linéaire sur $\mathcal{R}^L(M)$. Notons $\mathcal{P} = \mathbf{C}[u, \partial_{u'}]$ (les deux variables commutent entre elles) alors on peut identifier $\mathcal{P}$ avec $\mathbf{C}[u', \partial_{u'}][u]/\mathbf{C}[u', \partial_{u'}][u](u-u')$. On définit alors $C_{\mathcal{P}}(u^j \partial_{u'}^l) = -ju^j\partial_{u'}^l$ qu'on étend à $\mathcal{P}$ par linéarité. On pose alors $C_N = C \otimes 1 + 1 \otimes C_{\mathcal{P}}$. On peut alors montrer que C_N est un endomorphisme $D_{X\times E'\times\mathbf{C}}$-linéaire de N et induit sur N/Nu un endomorphisme $D_{X\times E'\times\mathbf{C}}$-linéaire.

THEOREME 2.6 ([**K**] 4.5)**.** *Les endomorphismes D-linéaires d'un D-module holonome forment un espace vectoriel de dimension finie.*

M. Kashiwara énonce ce résultat dans le cas où D est "complètement" analytique, ici $D_{X\times E\times\mathbf{C}}$ est analytique en $x_1, \ldots, x_n, u'$ et polynomial en $t'_1, \ldots, t'_p$ mais le résultat est encore vrai. Comme conséquence, l'endomorphisme C_N de N/Nu admet un polynôme annulateur minimal. On note b_L ce polynôme (ici L fait référence à la forme linéaire fixée au départ).

PROPOSITION 2.7 ([**G**] section 3)**.** *Le polynôme b_L est à racines dans $\mathbf{Q}_{<0}$.*

Pour la preuve, nous renvoyons le lecteur à l'article de A. Gyoja en question. Disons simplement que l'argument consiste comme dans le cas d'une fonction traité par M. Kashiwara, à désingulariser pour se ramener au cas monomial que l'on traite à part.

Notons δ la classe de 1 dans $M = D_{X\times E}/I$.

LEMME 2.8 ([**G**] Lemme 2.10 pour les trois premières équivalences)**.**
Soit $b(\lambda) \in \mathbf{C}[\lambda]$ un polynôme d'une variable. Alors les conditions suivantes sont équivalentes.

(1) $b(C_N) = 0$ en tant qu'endomorphisme de N/Nu.

(2) $b(C) = 0$ en tant qu'endomorphisme de $\mathcal{R}^L(M)/\mathcal{R}^L(M)u$.

(3) Pour tout $k \in \mathbf{Z}$, $b(L(-\partial_t t) - k)V_k^L(M) \subset V_{k-1}^L(M)$.

(4) $b(L(-\partial_t t))\delta \in V_{-1}^L(D_{X\times E})\delta\,(\subset V_{-1}^L(\mathcal{D}_{n+p})\delta)$.

(5) $b(L(s))f^s \in V_{-1}^L(\mathcal{D}_{n+p})f^s$.

Démonstration.
– (1) $\Rightarrow$ (2). Soit $m \in \mathcal{R}^L(M)$. Considérons $m\otimes 1$ dans N. Il est facile de voir que $b(C)\cdot(m\otimes 1) = (b(C)m)\otimes 1$ qui par hypothèse est dans Nu. Par conséquent $b(C)m$ est dans Mu.
– (2) $\Rightarrow$ (1). Soit $n \in N$. On peut l'écrire comme somme finie d'éléments de la forme $m \otimes \partial_{u'}^r$. Pour montrer $b(C)n \in Nu$, il suffit de le montrer pour $n = m\otimes \partial_{u'}^r$. Or l'action de C est telle que $b(C)n$ égale $(b(C)m)\otimes \partial_{u'}^r$. La conclusion est alors immédiate.
– (2) $\Rightarrow$ (3). Soit $m \in V_k^L(M)$. Alors $(b(L(-\partial_t t) - k)m)u^k = b(C)(mu^k)$ et ceci est dans $\mathcal{R}^L(M)u$ donc s'écrit comme $(\sum m_l u^l)u$ avec $m_l \in V_l^L(M)$ et par identification, seul m_{k-1} est non nul et égale m qui est donc dans $V_{k-1}^L(M)$.
– (3) $\Rightarrow$ (2). Soit $m \in \mathcal{R}^L(M)$ que l'on écrit $m = \sum_k m_k u^k$ avec $m_k \in V_k^L(M)$. Alors $b(C)m = \sum_k (b(C)m_k)u^k$, or pour tout k, $b(C)m_k$ est dans $V_{k-1}^L(M)$ donc on peut écrire $b(C)m = (\sum_k (b(C)m_k)u^{k-1})u$. L'assertion est démontrée.
– Les implications (3) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (5) sont triviales. Montrons (4) $\Rightarrow$ (3). Soit $P \in V_k^L(D_{X\times E})$, on doit montrer que $b(L(-\partial_t t) - k)P\delta$ appartient à $V_{k-1}^L(D_{X\times E})\delta$. Un calcul élémentaire montre qu'il existe $Q \in V_k^L(D_{X\times E})$ et $Q' \in V_{k-1}^L(D_{X\times E})$ tel que $b(L(-\partial_t t) - k)P = Qb(L(-\partial_t t)) + Q'$. On en tire immédiatement le résultat voulu.
– Pour finir, l'implication (5) $\Rightarrow$ (4) est une conséquence directe du lemme 3.5 (que nous démontrons indépendamment au chapitre suivant).

$\square$

A partir de maintenant et sauf mention contraire, nous noterons $M = \mathcal{D}_{n+p}/I$ au lieu de $D_{X\times E}/I$. Le symbole δ représente la classe de 1 dans M.

Maintenant pout $w \in \mathbf{N}^p$, considérons le polynôme de $\mathbf{C}[s_1,\ldots,s_p]$ (en fait de $\mathbf{Q}[s]$ puisque L est entière) :

$$c_{L,w}(s) = \prod_{-L(w)<k\leq 0} b_L(L(s) - k).$$

On constate pour tout $L \in \mathcal{U}_V$ que $c_{L,w}(-\partial_t t)\delta$ appartient à $V_{L(-w)}^L(M)$ en appliquant le lemme précédent, et pour un sous-ensemble fini F de $\mathcal{U}_V$:

$$\Big(\prod_{L\in F} c_{L,w}\Big)\delta \in \bigcap_{L\in F} V_{L(-w)}^L(M).$$

Introduisons la (multi)filtration $(\overline{V}_w(M))$ indexée par $\mathbf{Z}^p$:

$$\overline{V}_w(M) = \bigcap_{L \in \mathcal{U}_V} V^L_{L(w)}(M).$$

Remarquons que si $I = (0)$ i.e. si $M = \mathcal{D}_{n+p}$ alors $\overline{V}_\bullet(M) = V_\bullet(M)$.

Dans [**S1**], C. Sabbah démontre le résultat suivant (formulé d'une autre manière) :

THEOREME 2.9.

(1) Il existe un sous-ensemble fini F de $\mathcal{U}_V \cap \mathbf{N}^p$ tel que pour tout $w \in \mathbf{Z}^p$,

$$\overline{V}_w(M) = \bigcap_{L \in F} V^L_{L(w)}(M).$$

(2) Il existe $\kappa \in \mathbf{N}^p$ tel que pour tout $w \in \mathbf{Z}^p$,

$$V_w(M) \subset \overline{V}_w(M) \subset V_{w+\kappa}(M).$$

Ce résultat est le point de départ du présent chapitre, j'en ferai donc quelques commentaires.

D'abord, donnons quelques précisions au sujet de l'énoncé et de sa preuve donnés dans [**S1**]. Soit Σ un éventail subdivisant le premier quadrant de $(\mathbf{Q}^p)^*$. Pour tout cône σ de dimension maximale, soit ${}^\sigma V(M)$ la filtration sur M indexée par $\mathbf{Z}^p$ définie par :

$$m \in {}^\sigma V_w(M) \iff \exists P \in {}^\sigma V_w(\mathcal{D}_{n+p}) = \bigcap_{L \in \sigma} V^L_{L(w)}(\mathcal{D}_{n+p}) \quad m = [P],$$

où $[\cdot]$ désigne la classe dans $M = \mathcal{D}_{n+p}/I$. Notons $\mathcal{L}(\sigma)$ les éléments primitifs du 1-squelette de σ. C. Sabbah démontre en appendice et en collaboration avec F.J. Castro-Jiménez l'existence d'un éventail dit adapté à la filtration à $V(M)$. Dans la proposition 2.2.1, il montre que si Σ est un éventail adapté à $V(M)$ alors pour tout cône $\sigma \in \Sigma$ de dimension maximale, on a :

$$(\dagger) \qquad {}^\sigma V_w(M) = \bigcap_{L \in \mathcal{L}(\sigma)} V^L_{L(w)}(M).$$

En prenant pour F le 1-squelette de Σ, on obtient trivialement l'assertion 1 du théorème 2.9. En ce qui concerne l'assertion 2, C. Sabbah montre que la filtration $\overline{V}(M)$ est bonne ce qui par un lemme usuel de comparaison entre bonnes filtrations fournit l'assertion 2. Pour montrer que la filtration $\overline{V}(M)$ est bonne, il utilise des arguments du type modification torique associée à un éventail (adapté) Σ ou bien conservation de la cohérence d'un module par image directe mais le fait remarquable c'est qu'en observant la démonstration en question, on s'aperçoit qu'on peut utiliser n'importe quel éventail pourvu que tout cône σ vérifie la condition $(\dagger)$, nous y reviendrons.

Ce que je propose est une formulation constructive et (plus) élémentaire du théorème précédent : constructive en ce sens que l'on connait explicitement l'ensemble F de l'assertion 1 et le κ de l'assertion 2 (pour $p = 2$ uniquement), élémentaire car repose sur la théorie des éventails de Gröbner analytiques.

THEOREME 2.10.

(1) *Notons $\mathcal{E}_V(h(I))$ l'éventail de Gröbner de $h(I) \subset \mathcal{D}_{n+p}\langle z\rangle$ associé à la filtration $V(\mathcal{D}_{n+p})$. Si on note $\mathcal{L}(\mathcal{E}_V(h(I)))$ les éléments primitifs de son 1-squelette alors pour tout w de $\mathbf{Z}^p$,*
$$\overline{V}_w(M) = \bigcap_{L\in\mathcal{L}(\mathcal{E}_V(h(I)))} V^L_{L(w)}(M).$$
(2) *Pour $p = 2$, il existe $\kappa \in \mathbf{N}^p$ qui dépend de $\mathcal{E}_V(h(I))$ (nous serons plus précis dans la section suivante) tel que pour tout $w \in \mathbf{Z}^p$,*
$$V_w(M) \subset \overline{V}_w(M) \subset V_{w+\kappa}(M).$$

Nous verrons dans le chapitre suivant que dans le cas algébrique (où nous avons un résultat similaire) et dans le cas de deux fonctions, on est en mesure de "tout" calculer : c'est-à-dire l'éventail de Gröbner $\mathcal{E}_V(h(I))$, le vecteur κ, mais aussi les polynômes b_L pour $L \in \mathcal{E}_\mathcal{V}$ et finalement le polynôme de Bernstein-Sato que l'on va construire à partir de tous ces objets.
Disons encore un mot au sujet de l'assertion 2. Nous avons dit plus haut que la preuve donnée par C. Sabbah reste valable pourvu que l'éventail qu'on utilise ou plûtot ses cônes vérifient la condition (†). En fait les cônes de $\mathcal{E}_V(h(I))$, éventail de Gröbner associé à la filtration V, vérifient (†), c'est ce que nous verrons dans la section suivante dans ce qu'on appelle la "proposition clé".

Revenons maintenant à la preuve de l'existence de polynôme de Bernstein-Sato. Considérons le polynôme suivant :
$$b(s_1,\dots,s_p) = \prod_{L\in F} c_{L,v+\kappa}(s),$$
où F est l'ensemble des éléments primitifs du 1-squelette de l'éventail de Gröbner de $h(I)$ associé à la filtration $V(\mathcal{D}_{n+p})$ et κ est celui du théorème de C. Sabbah. Alors par définition, on a $F \subset \mathbf{N}^p \subset \mathbf{R}^p_{\geq 0} \simeq \mathcal{U}_V$ i.e. les formes L de F sont à coefficients entiers positifs. Alors en utilisant le point (2) du théorème 2.9 on a les inclusions :
$$b(-\partial_t t)\delta \in \overline{V}_{-v-\kappa}(M) \subset V_{-v}(M).$$
Autrement dit, il existe $P \in V_{-v}(\mathcal{D}_{n+p})$ tel que $b(-\partial_t t) - P$ soit dans I. En utilisant le fait que $t_j - f_j$ soit dans I, on peut dire que modulo I, P égale $Q(-\partial_t t)f^v$ où $Q(s) \in \mathcal{D}_n[s]$. Par conséquent $b(s)f^s = Q(s)f^{s+v}$. Comme conclusion, on peut dire qu'il existe dans $\mathcal{B}^v(f)$ un élément non nul de $\mathbf{Q}[s_1,\dots,s_p]$.

2. Preuve du théorème 2.10

Dans cette section, nous donnerons une première preuve de l'assertion 1 du théorème 2.10. Comme nous le verrons il s'agit d'une preuve essentiellement bidimensionnelle i.e. on se ramènera par projection au cas $p = 2$ ce qui est pratique pour faire des dessins et comprendre ce qui se passe.

Dans un deuxième temps, nous énoncerons et démontrerons une proposition clé. Elle est importante pour deux raisons. D'une part elle permet de donner une deuxième preuve de l'assertion 1 du théorème 2.10 et d'autre part elle permet une démonstration de l'assertion 2 du théorème 2.9 en utilisant l'éventail $\mathcal{E}_V(h(I))$ à la place d'un éventail adapté à $V(M)$.

Dans un dernier temps, nous démontrerons l'assertion 2 du théorème 2.10.

Dans cette section, nous noterons $\mathcal{E}_V$ au lieu de $\mathcal{E}_V(h(I))$.

2.1. L'assertion 1. Pour m dans M, L dans $\mathcal{U}_V$ et $w \in \mathbf{Z}^p$, on dit que L vérifie la condition (m, w) si $m \in V^L_{L(w)}(M)$. En d'autres termes, L vérifie (m, w) s'il existe $P \in \mathcal{D}_{n+p}$ tel que $m = P\delta$ et $\mathrm{ord}^L(P) \leq L(w)$. Pour un sous ensemble F de $\mathcal{U}_V$, F vérifie (m, w) si tout L de F vérifie (m, w).

On peut reformuler l'assertion 1 de la façon suivante :
Pour tout $w \in \mathbf{Z}^p$ et pour tout $m \in M$, si $\mathcal{L}(\mathcal{E}_V)$ vérifie (m, w) alors $\mathcal{U}_V$ vérifie (m, w).

Pour $L_1, \ldots, L_q \in \mathcal{U}_V$, on notera $\rangle L_1, \ldots, L_q\langle$ le cône ouvert engendré par les L_i :

$$\rangle L_1, \ldots, L_q\langle = \{r_1 L_1 + \cdots + r_q L_q \,; r_i > 0\}.$$

Rappelons que pour tout $L \in \mathcal{U}_V$, le gradué $\mathrm{gr}^L(\mathcal{D}_{n+p})$ est isomorphe à un sous-anneau de $\mathcal{D}_{n+p}$. En effet soit $L = r_1 V_1 + \ldots + r_p V_p$ avec les $r_i \geq 0$ non tous nuls. Quitte à réordonner les indices, on peut supposer que $L = a_1 V_1 + \ldots + a_q V_q$ avec $q \leq p$ et $a_i > 0$. Alors

$$\mathrm{gr}^L(\mathcal{D}_{n+p}) = \mathcal{D}_n \otimes_{\mathbf{C}} \mathbf{C}[t_1, \ldots, t_q]\langle \partial_{t_1}, \ldots, \partial_{t_q}\rangle \otimes_{\mathbf{C}} \mathbf{C}\{t_{q+1}, \ldots, t_q\}\langle \partial_{t_{q+1}}, \ldots, \partial_{t_p}\rangle.$$

Ainsi dans la suite nous considérerons que tous nos calculs se font dans $\mathcal{D}_{n+p}$.

Pour $P \in \mathcal{D}_{n+p}$ et $L_1, L_2 \in \mathcal{U}_V$, on dit que P est L_1-homogène (resp. (L_1, L_2)-homogène) si $P = \sigma^{L_1}(P)$ (resp. $P = \sigma^{L_1}(\sigma^{L_2}(P))$). Ces définitions s'appliquent à un élément de $\mathcal{D}_{n+p}\langle z\rangle$.

LEMME 2.11. *Soit $H \in h(I)$. Soit $L \in \rangle L_1, L_2\langle$ avec $\rangle L_1, L_2\langle$ inclus dans un cône de $\mathcal{E}_V$. Alors les composantes (L_1, L_2)-homogènes de $\sigma^L(H)$ (notons les U_k) sont en nombre fini et s'écrivent $U_k = \sigma^L(V_k)$ avec $V_k \in h(I)$.*

DÉMONSTRATION. La finitude des composantes (L_1, L_2)-homogènes de $\sigma^L(H)$ découle immédiatement du fait que $\sigma^L(H)$ appartient à $D_{X\times E}$.
Maintenant, considérons $L' \in \rangle L_1, L_2\langle$ différente de L. Soit $Q_1, \ldots, Q_r$ la base standard de $h(I)$ associée au cône de $\mathcal{E}_V$ qui contient le cône ouvert engendré par L_1 et L_2. Les Q_j forment une $<^h_L$-base standard de $h(I)$, on peut diviser H par les Q_j par rapport à l'ordre $<^h_L$ ce qui donne :

$$H = \sum_{j=1}^{r} u_j Q_j \text{ avec } \mathrm{ord}^L(H) \geq \mathrm{ord}^L(u_j Q_j) \text{ si } u_j \neq 0.$$

Si on note $J \subseteq \{1, \ldots, r\}$ les j pour lesquels l'inégalité précédente est une égalité, on obtient :

$$\sigma^L(H) = \sum_{j\in J} \sigma^L(u_j)\sigma^L(Q_j).$$

Considérons, pour chaque $j \in J$, la décomposition de $\sigma^L(u_j)$ en composantes L'-homogènes (qui sont en nombre fini) : $\sigma^L(u_j) = \sum_{k\in K_j} u_{j,k}$ et notons $K = \bigcup_{j\in J} K_j$.
Maintenant si on note $J_k = \{j \in J \,/\, u_{j,k} \neq 0\}$, on obtient :

$$\sigma^L(H) = \sum_{k\in K} \Big(\sum_{j\in J_k} u_{j,k}\sigma^L(Q_j)\Big).$$

Par 1.30, on a : $\sigma^{L'}(\sigma^L(Q_j)) = \sigma^L(Q_j)$, ainsi pour $k \in K$ fixé, les termes de la somme $\sum_{j\in J_k} u_{j,k}\sigma^L(Q_j)$ sont (L_1, L_2)-homogènes d'ordre constant par rapport à

L_1 et L_2, ces sommes sont donc les composantes (L_1, L_2)-homogènes de $\sigma^L(H)$. On note $U_k = \sum_{j \in J_k} u_{j,k} \sigma^L(Q_j)$. On constate alors que :

$$U_k = \sigma^L(\sum_{j \in J_k} u_{j,k} Q_j)$$

ce qui achève la preuve du lemme. $\square$

Le lemme suivant est trivial et ne sera pas démontré.

LEMME 2.12. *Soit $L_1 \neq L_2$ deux formes dans $\mathcal{U}_V$ et L appartenant au cône ouvert $\rangle L_1, L_2 \langle$. Soit $w \in \mathbf{Z}^p$.*
Alors, il n'existe pas R dans $\mathcal{D}_{n+p}$ tel que : $\begin{cases} ord^{L_i}(R) \leq L_i(w) & i = 1, 2 \\ ord^L(R) > L(w) \end{cases}$

Le lemme suivant est un cas particulier de notre assertion 1 dans le cas de la dimension $p = 2$:

LEMME 2.13. *Soit σ un cône de $\mathcal{E}_V$. Soient $L_1, L_2 \in \mathcal{U}_V$ tels que le cône ouvert $\rangle L_1, L_2 \langle$ soit inclus dans σ. Supposons que L_1 et L_2 vérifient (m, w) alors tout L de $\rangle L_1, L_2 \langle$ vérifie (m, w).*

DÉMONSTRATION. Pour $i = 1, 2$, soit $P_i \in \mathcal{D}_{n+p}$ tel que $\mathrm{ord}^{L_i}(P_i) \leq L_i(v)$ et $P_i \delta = m$ et $\mathrm{ord}^L(P_i) > L(v)$ (sinon le lemme est trivialement vrai). Il est facile de voir qu'il existe $k, l_1, l_2 \in \mathbf{N}$ tels que $z^k h(P_1 - P_2) = z^{l_1} h(P_1) - z^{l_2} h(P_2)$, notons alors $H_i = z^{l_i} h(P_i)$ et $H = H_1 - H_2$. Puisque $P_1 - P_2 \in I$, $H \in h(I)$.
Considérons $\sigma^L(H) = \sum_{k \in K} U_k$, les U_k étant les composantes (L_1, L_2)-homogènes de $\sigma^L(H)$. D'après 2.11, les U_k sont en nombre fini et chaque $U_k = \sigma^L(V_k)$ avec $V_k \in h(I)$.
Soient $Q_1, \ldots, Q_r \in h(I)$ la base standard de $h(I)$ correspondant au cône de $\mathcal{E}_V$ contenant $\rangle L_1, L_2 \langle$. Divisons chaque V_k par les Q_j relativement à $<^h_L$, on obtient :

$$V_k = \sum_{j=1,\ldots,r} v_{k,j} Q_j \text{ avec } \mathrm{ord}^L(V_k) \geq \mathrm{ord}^L(v_{k,j} Q_j) \text{ si } v_{k,j} \neq 0.$$

Notons $J_k \subseteq \{1, \ldots, r\}$ les j pour lesquels l'inégalité précédente est une égalité, alors :

$$\sigma^L(V_k) = \sum_{j \in J_k} \sigma^L(v_{k,j}) \sigma^L(Q_j).$$

Pour $k \in K$, notons $W_k = \sum_{j \in J_k} \sigma^L(v_{k,j}) Q_j$, $W_k \in h(I)$.
D'après 2.12, on peut écrire K en une union disjointe $K = K_1 \cup K_2$ telle que pour $i = 1, 2$:

$$\sigma^L(H_i) = \sum_{k \in K_i} (-1)^{i+1} U_k.$$

Considérons, pour $i = 1, 2$, $H'_i = H_i - \sum_{k \in K_i} W_k$ élément de $h(I)$.
On constate que $\mathrm{ord}^L(H'_i) < \mathrm{ord}^L(H_i)$.
De plus, par construction, les $\sigma^L(v_{k,j})$ sont (L_1, L_2)-homogènes et par 1.30,
$\mathrm{ord}^{L_i}(Q_j) = \mathrm{ord}^{L_i}(\sigma^L(Q_j))$ donc pour $k \in K_i$, $\mathrm{ord}^{L_i}(\sigma^L(v_{k,j}) Q_j) = \mathrm{ord}^{L_i}(U_k) \leq \mathrm{ord}^{L_i}(H_i)$, par conséquent, $\mathrm{ord}^{L_i}(H'_i) \leq \mathrm{ord}^{L_i}(H_i)$.
Enfin, notons $P'_i = H'_{i|z=1}$, on a $P_i - P'_i \in I$ (c'est-à-dire $P'_i \delta = m$), $\mathrm{ord}^L(P'_i) <$

$\mathrm{ord}^L(P_i)$ et $\mathrm{ord}^{L_i}(P'_i) \leq L_i(v)$.
Maintenant, on recommence ce processus avec P'_i à la place de P_i, et en un nombre fini d'étapes, on démontre le lemme. $\square$

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le résultat annoncé.

Demonstration de l'assertion 1. Soit $m \in M$ et $w \in \mathbf{Z}^p$.

Nous allons montrer par récurrence sur q que pour tout q de $\{1, \ldots, p\}$, on a :
Pour tout $L \in \mathcal{U}_V$, s'il existe $L'_1, \ldots, L'_q \in \mathcal{U}_V$ vérifiant (m, w) tels que L appartienne au cône ouvert $\rangle L'_1, \ldots, L'_q \langle$ et que ce cône soit inclus dans un élément de $\mathcal{E}_V$ alors L vérifie (m, w).
Il est clair que la propriété au rang 1 est vraie. Supposons acquise la propriété au rang $q-1$ et montrons la au rang q.
Considérons le cône ouvert $\rangle L_{q-1}, L_q \langle$. Il se peut qu'il ne soit inclus dans aucun cône de $\mathcal{E}_V$. C'est pour cela qu'on considère la trace $\mathcal{E}_V(L_{q-1}, L_q)$ de $\mathcal{E}_V$ sur le cône ouvert engendré par L_{q-1} et L_q. Cette trace est un éventail dont le 1-squelette est contenu dans celui de $\mathcal{E}_V$. Si on note L' le projeté de L sur $\rangle L_{q-1}, L_q \langle$ alors L' appartient à un cône de $\mathcal{E}_V(L_{q-1}, L_q)$ dont on note L'_{q-1} et L'_q le 1-squelette. Ce qu'on a obtenu, c'est la situation suivante :
$L = r_1 L_1 + \cdots + r_{q-2} L_{q-2} + r_{q-1} L'_{q-1} + r_q L'_q$ et les deux cônes ouverts l'un engendré par $L_1, \ldots, L_{q-2}, L'_{q-1}, L'_q$ et l'autre par L'_{q-1}, L'_q sont inclus chacun dans un cône de $\mathcal{E}_V$. On peut alors appliquer le lemme 2.13 à $L' \in \rangle L'_{q-1}, L'_q \langle$ et dire que L' vérifie (m, w). Ensuite, puisque $L = r_1 L_1 + \cdots + r_{q-2} L_{q-2} + (r_{q-1} + r_q) L'$, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence et dire que L vérifie (m, w). La propriété au rang q est donc démontrée. Une fois acquise cette propriété, le résultat devient trivial. En effet, soit $L \in \mathcal{U}_V$ alors il existe $L_1, \ldots, L_q$ dans $\mathcal{L}(\mathcal{E}_V)$ avec $1 \leq q \leq p$ tels que le cône ouvert engendré par les L_i contienne L et soit inclus dans un cône de $\mathcal{E}_V$. On applique alors la propriété précédente et on obtient que L vérifie (m, w). $\square$

2.2. Une proposition clé. Pour un cône quelconque de $\mathcal{U}_V$, on note $\mathcal{L}(\sigma)$ les éléments primitifs du 1-squelette de σ. C'est l'ensemble minimal des $L \in \mathcal{U}_V$ qui engendrent σ et tels que L soit à coefficients entiers sans facteurs communs. A priori nous ne savons pas si $\mathcal{L}(\sigma)$ est contenu dans σ. On appelle (de manière naturelle) adhérence (resp. intérieur) de σ les combinaisons linéaires des éléments de $\mathcal{L}(\sigma)$ à coefficients dans $\mathbf{R}_{\geq 0}$ (resp. dans $\mathbf{R}_{>0}$).

Soit σ un cône de $\mathcal{U}_V$. Définissons une nouvelle filtration sur $M = \mathcal{D}_{n+p}/I$ indexée par $\mathbf{Z}^p$:

$$^{\sigma}V_w(M) = \sum_{\{w' \in \mathbf{Z}^p\,;\, L(w') \leq L(w)\, \forall L \in \sigma\}} V_{w'}(M).$$

Par définition, m appartient à $^{\sigma}V_w(M)$ si et seulement il existe P dans

$$^{\sigma}V_w(\mathcal{D}_{n+p}) = \sum_{\{w' \in \mathbf{Z}^p\,;\, L(w') \leq L(w)\, \forall L \in \sigma\}} V_{w'}(\mathcal{D}_{n+p})$$

tel que $m = P\delta$. Pour voir à quoi ressemble un tel P, le lecteur est prié de se référer à la figure 1 (page suivante) où $p = 2$ et $\sigma = \langle L_1, L_2 \rangle$.

Pour tout cône $\sigma \subset \mathcal{U}_V$ et $w \in \mathbf{Z}^p$, nous avons des inclusions évidentes :

$$^{\sigma}V_w(M) \subseteq \bigcap_{L \in \sigma} V^L_{L(w)}(M) \subseteq \bigcap_{L \in \mathcal{L}(\sigma)} V^L_{L(w)}(M).$$

FIG. 1. ${}^{\sigma}V_w(M)$

Il est clair que si $M = \mathcal{D}_{n+p}$ (i.e. si I était nul) alors pour tout cône $\sigma \subset \mathcal{U}_V$, les inclusions précédentes seraient des égalités. On se propose ici de montrer :

PROPOSITION 2.14 (Proposition clé)**.** *Soit $\sigma \in \mathcal{E}_V$ alors pour tout $w \in \mathbf{Z}^p$,*

$$
{}^{\sigma}V_w(M) = \bigcap_{L \in \mathcal{L}(\sigma)} V^L_{L(w)}(M).
$$

Avant de prouver cette proposition, nous en tirons une

DEUXIÈME DÉMONSTRATION DE L'ASSERTION 1. D'abord remarquons que $\mathcal{L}(\mathcal{E}_V) = \bigcup_{\sigma \in \mathcal{E}_V} \mathcal{L}(\sigma)$. Soit $m \in M$ et $w \in \mathbf{Z}^p$. Alors, avec les notations du paragraphe précédent, nous devons montrer que si $\mathcal{L}(\mathcal{E}_V)$ vérifie (m, w) alors il en est de même de $\mathcal{U}_V$. Soit donc $L \in \mathcal{U}_V$ et soit $\sigma \in \mathcal{E}_V$ contenant L. Alors par la proposition clé, il existe $P \in {}^{\sigma}V_w(\mathcal{D}_{n+p})$ tel que $m = P\delta$. Pour un tel P, on a clairement $\mathrm{ord}^L(P) \leq L(w)$. Par conséquent L vérifie (m, w). □

Pour démontrer la proposition clé, nous avons besoin de revenir un peu sur l'éventail $\mathcal{E}_V(h(I))$. Soit σ un cône de $\mathcal{E}_V$. Nous avons vu dans le théorème 1.30 qu'il existe une famille $Q_1, \ldots, Q_r$ de $h(I)$ qui est la base standard réduite minimale de $h(I)$ par rapport à $<^h_L$ et ce pour tout L dans σ. Maintenant que se passe-t-il pour une forme linéaire L appartenant à l'adhérence de σ si, par exemple, on suppose σ ouvert (ce qui peut arriver pour un élément de $\mathcal{L}(\sigma)$) ? Bien entendu les Q_j ne forment pas une base standard de $h(I)$ pour l'ordre $<^h_L$ (car sinon le gradué de $h(I)$ par rapport à L serait égal à celui de $h(I)$ pour n'importe quelle forme de σ, autrement dit L appartiendrait à σ). Par contre il est possible, et c'est le but du

résultat suivant, de construire un ordre que nous noterons $\lhd_L^\sigma$ (car il dépend de L et de σ) pour lequel les Q_j forment une base standard de $h(I)$. L'ordre en question, voici comment on le définit :
D'abord on fixe une forme linéaire L_σ dans l'intérieur de σ et pour (a,μ,b,ν,k) et (a',μ',b',ν',k') dans $\mathbf{N}^{n+p+n+p+1}$ on pose :

$$(a,\mu,b,\nu,k) \lhd_L^\sigma (a',\mu',b',\nu',k) \iff$$

$$\begin{cases} k+|b+\nu| < k'+|b'+\nu'| \\ \text{ou } \big(= \ \text{ et } L(a,\mu,b,\nu) < L(a',\mu',b',\nu')\big) \\ \text{ou } \big(= \ \text{ et } \ = \ \text{ et } (a,\mu,b,\nu) <_{L_\sigma} (a',\mu',b',\nu')\big). \end{cases}$$

Rappelons pour mémoire que l'identification $\mathbf{R}^p_{\geq 0} \simeq \mathcal{U}_V \subset \mathcal{U}$ nous fait parfois noter $L(a,\mu,b,\nu) = L(\nu-\mu)$.

PROPOSITION 2.15. *Soit $L \in \mathcal{U}_V$ appartenant à l'adhérence de $\sigma \in \mathcal{E}_V$ et soit $Q_1,\ldots,Q_r$ la base standard de $h(I)$ associé au cône σ. Alors pour tout $j = 1,\ldots,r$ et pour tout L' dans $\rangle L, L_\sigma\rangle$:*

$$\exp_{<^h_{L'}}(Q_j) = \exp_{\lhd_L^\sigma}(Q_j).$$

Comme **conséquence** de cette proposition, nous obtenons que **les Q_j forment la base standard réduite minimale de $h(I)$ pour l'ordre $\lhd_L^\sigma$.** En effet il suffit pour cela d'appliquer le lemme 1.28.

Démonstration. Par le théorème 1.30,

$$\begin{aligned}
\exp_{\lhd_L^\sigma}(Q_j) &= \exp_{\lhd_L^\sigma}(\sigma^L(Q_j)) \\
&= \exp_{<^h_{L_\sigma}}(\sigma^L(Q_j)) \text{ par définition de } \lhd_L^\sigma \\
&= \exp_{<^h_{L_\sigma}}(\sigma^{L_\sigma}(\sigma^L(Q_j))) \\
&= \exp_{<^h_{L_\sigma}}(\sigma^{L'}(Q_j)) \text{ car } Q_j \text{ n'a pas de "pentes" entre } L_\sigma \text{ et } L \ : \\
& \text{ Voir figure 2 page suivante.} \\
&= \exp_{<^h_{L_\sigma}}(\sigma^{L_\sigma}(Q_j)) \\
&= \exp_{<^h_{L_\sigma}}(Q_j) \\
&= \exp_{<^h_{L'}}(Q_j).
\end{aligned}$$

□

Soit σ un cône de $\mathcal{E}_V$. Notons $L_1,\ldots,L_q$ les éléments de $\mathcal{L}(\sigma)$.

LEMME 2.16. *Soit $i_0 \in \{1,\ldots,q\}$, $m \in V^{L_{i_0}}_{\lambda_{i_0}}(M)$ avec $\lambda_{i_0} \in \mathbf{Q}$ et $P \in \mathcal{D}_{n+p}$ tel que $P\delta = m$ et $ord^{L_{i_0}}(P) > \lambda_{i_0}$ alors il existe $P' \in \mathcal{D}_{n+p}$ tel que :*
- *$P - P' \in I$ c'est-à-dire $P'\delta = m$*
- *$ord^{L_{i_0}}(P') < ord^{L_{i_0}}(P)$*
- *$ord^{L_i}(P') \leq ord^{L_i}(P)$ pour $i \in \{1,\ldots,q\} \setminus \{i_0\}$.*

En d'autres termes, il est possible de faire baisser l'ordre par rapport à l'un des L_i sans augmenter l'ordre par rapport aux autres L_i. Avec ce lemme, nous sommes en mesure de donner une

FIG. 2. Diagramme de Newton d'un Q_j associé à $\sigma = \rangle L_2, L_1\rangle$

DEMONSTRATION DE LA PROPOSITION CLÉ. Soit $m \in \bigcap_{L\in\mathcal{L}(\sigma)} V^L_{L(v)}(M)$ alors pour $i = 1,\dots,q$, il existe $P_i \in \mathcal{D}_{n+p}$ tel que $P_i\delta = m$ et $\mathrm{ord}^{L_i}(P_i) \leq L_i(v)$. On pose $\tilde{P}_1 = P_1$. En appliquant un nombre fini de fois le lemme avec $i_0 = 2$ (la première fois avec $P = \tilde{P}_1$ et $\lambda_{i_0} = \mathrm{ord}^{L_{i_0}}(\tilde{P}_1)$), on construit $\tilde{P}_2$ tel que $\tilde{P}_2\delta = m$ et $\mathrm{ord}^{L_i}(\tilde{P}_2) \leq L_i(v)$ pour $i = 1, 2$. On recommence le processus avec $i_0 = 3$ et $P = \tilde{P}_2$, etc. Après un nombre fini d'étapes on obtient $\tilde{P}_q \in \mathcal{D}_{n+p}$ tel que $\tilde{P}_q\delta = m$ et pour tout $i = 1,\dots,q$, $\mathrm{ord}^{L_i}(\tilde{P}_q) \leq L_i(v)$. Ceci montre bien que $m \in {}^{\sigma}V_v(M)$. □

Pour finir ce paragraphe, il ne reste plus qu'à démontrer le lemme précédent :

DÉMONSTRATION. Pour simplifier les notations, nous ferons la démonstration avec $i_0 = 1$, $\lambda = \lambda_{i_0}$ et $\lhd_{L_i} = \lhd^{\sigma}_{L_i}$. Notons $Q_1,\dots,Q_r$ la base standard de $h(I)$ associée au cône σ.

Par hypothèse, il existe $P_1 \in \mathcal{D}_{n+p}$ avec $P_1\delta = m$ et $\mathrm{ord}^{L_1}(P_1) \leq \lambda$. Il existe $l_0, l, l_1 \in \mathbf{N}$ tels que $z^{l_0}h(P - P_1) = z^l h(P) - z^{l_1}h(P_1)$. On pose alors $H = z^l h(P)$, $H_1 = z^{l_1}h(P_1)$ et $H_0 = H - H_1$ et comme $P - P_1 \in I$, on a $H_0 \in h(I)$.

Considérons la division de H_0 par les Q_j relativement à l'ordre $\lhd_{L_1}$:

$$H_0 = \sum_{j=1}^{r} q_j Q_j \text{ avec } \mathcal{N}(q_j) + \exp_{\lhd_{L_1}}(Q_j) \subset \Delta_j \text{ pour tout } j$$

où les $\Delta_j \subset \mathbf{N}^{2n+2p+1}$ forment la partition de $\mathbf{N}^{2n+2p+1}$ associée à aux exposants privilégiés des Q_j (voir les théorèmes de division du premier chapitre).

Comme pour tout i, j, les exposants $\exp_{\lhd_{L_1}}(Q_j)$ et $\exp_{\lhd_{L_i}}(Q_j)$ sont égaux, la division précédente est aussi une division par rapport aux ordres $\lhd_{L_2}, \ldots, \lhd_{L_q}$. Par conséquent, pour tout $i = 1, \ldots, q$ et $j = 1, \ldots, r$:

$$\mathrm{ord}^{L_i}(H_0) \geq \mathrm{ord}^{L_i}(q_j Q_j).$$

Notons J l'ensemble des $j \in \{1, \ldots, r\}$ pour lesquels $\mathrm{ord}^{L_1}(H_0) = \mathrm{ord}^{L_1}(q_j Q_j)$, nous avons alors :

$$\sigma^{L_1}(H_0) = \sigma^{L_1}(H) = \sum_{j \in J} \sigma^{L_1}(q_j)\sigma^{L_1}(Q_j).$$

On considère et on note $W = \sum_{j \in J} \sigma^{L_1}(q_j) Q_j$. C'est un élément de $h(I)$.

Posons $H' = H - W$. Nous allons montrer les deux assertions suivantes.

(1) $\mathrm{ord}^{L_1}(H') < \mathrm{ord}^{L_1}(H)$,

(2) $\mathrm{ord}^{L_i}(H') \leq \mathrm{ord}^{L_i}(H)$ pour $i = 2, \ldots, q$.

(1) On a clairement $\sigma^{L_1}(H) = \sigma^{L_1}(W)$. Par conséquent,

$$H' = (H - \sigma^{L_1}(H)) - (W - \sigma^{L_1}(W).$$

On voit alors facilement que les deux termes entre parenthèses ont un L_1-ordre strictement inférieur à celui de H.

(2) Fixons i entre 2 et q.
Par 1.30, pour tout j :

(2) $$\exp_{\lhd_{L_i}}(\sigma^{L_1}(Q_j)) = \exp_{\lhd_{L_i}}(Q_j).$$

On a $\sigma^{L_1}(W) = \sum_{j \in J} \sigma^{L_1}(q_j)\sigma^{L_1}(Q_j)$.

Comme $\exp_{\lhd_{L_i}}(\sigma^{L_1}(q_j)\sigma^{L_1}(Q_j)) \subset \Delta_j$ et que les Δ_j sont disjoints deux à deux , on a nécessairement

$$\exp_{\lhd_{L_i}}(\sigma^{L_1}(W)) = \max_{j \in J}\{\exp_{\lhd_{L_i}}(\sigma^{L_1}(q_j)\sigma^{L_1}(Q_j))\}.$$

De la même manière, on peut montrer que

$$\exp_{\lhd_{L_i}}(\sigma^{L_1}(W)) = \max_{j \in J}\{\exp_{\lhd_{L_i}}(\sigma^{L_1}(q_j)Q_j)\}.$$

Grâce à la relation (2), on obtient l'égalité $\exp_{\lhd_{L_i}}(\sigma^{L_1}(W)) = \exp_{\lhd_{L_i}}(W)$ donc en particulier $\mathrm{ord}^{L_i}(W) = \mathrm{ord}^{L_i}(\sigma^{L_1}(W)$. D'où les égalités et inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} \mathrm{ord}^{L_i}(W) &= \mathrm{ord}^{L_i}(\sigma^{L_1}(W)) \\ &= \mathrm{ord}^{L_i}(\sigma^{L_1}(H)) \text{ car } \sigma^{L_1}(W) = \sigma^{L_1}(H) \\ &\leq \mathrm{ord}^{L_i}(H). \end{aligned}$$

Par conséquent, $\mathrm{ord}^{L_i}(H') \leq \mathrm{ord}^{L_i}(H)$. Les deux assertions sont démontrées.

Maintenant, posons $P' = H'_{|z=1} = P - W_{|z=1}$. On a $W \in h(I)$ donc $W_{|z=1} \in I$ et $P'\delta = m$. En spécialisant $z = 1$, les assertions 1 et 2 deviennent : $\mathrm{ord}^{L_i}(P') \leq \mathrm{ord}^{L_i}(P)$ pour tout $i = 1, \ldots, q$ avec inégalité stricte pour $i = 1$. Le lemme est démontré. $\square$

2.3. L'assertion 2. Dans ce paragraphe nous allons démontrer l'assertion 2 du théorème 2.10. Nous allons dans un premier temps énoncer plus précisement l'assertion en question. Puis nous écrirons la preuve. Nous verrons qu'elle consiste essentiellement en une analyse raffinée du lemme précédent 2.16, en effet nous devrons faire ce qu'on pourrait appeler un "contrôle de la montée de l'ordre" par rapport à la forme V_1.

Nous rappelons que dans ce paragraphe, p égale 2.

NOTATION 2.17.
- *Soient L_1, L_2 deux formes de $\mathcal{U}_V$. Ecrivons $L_i = a_iV_1+b_iV_2$ avec $a_i, b_i \geq 0$. On dit que L_1 est inférieure (resp. strictement inférieure) à L_2 si $b_1/a_1 \leq b_2/a_2$ (resp. $b_1/a_1 < b_2/a_2$). On abrègera cette notion en notant $L_1 \leq L_2$ (resp. $L_1 < L_2$). Par convention $b/0 = +\infty$, toute forme L est inférieure à V_2.*
- *Soit L une forme dans $\mathcal{U}_V$. Nous noterons $\lhd_L$ l'ordre sur $\mathbf{N}^{2(n+2)+1}$ donné par :*
$$(a,\mu,b,\nu,k) \lhd_L (a',\mu',b',\nu',k) \iff$$
$$\begin{cases} k+|b+\nu| < k'+|b'+\nu'| \\ \textit{ou } \big(= \ \textit{ et } L(a,\mu,b,\nu) < L(a',\mu',b',\nu')\big) \\ \textit{ou } \big(= \ \textit{ et } \ = \ \textit{ et } (a,\mu,b,\nu) <_{V_1} (a',\mu',b',\nu')\big). \end{cases}$$
Nous remarquons qu'en adoptant les notations du paragraphe précédent et en posant $\sigma = \rangle V_1, L\langle$ (avec $L \neq V_1$) alors on a : $\lhd_L = \lhd_L^\sigma$. Si par contre $L = V_1$ alors $\lhd_L =<^h_{V_1}$.

Soit σ un cône de $\mathcal{E}_V$ de dimension 2 (maximale) et $\{L_1, L_2\} = \mathcal{L}(\sigma)$ avec $L_1 < L_2$. Notons $Q_1, \ldots, Q_r$ la base standard de $h(I)$ associée à σ. On définit $\kappa^1_\sigma \in \mathbf{N}$ par :
$$\kappa^1_\sigma = \max\{\mathrm{ord}^{V_1}(Q_j) - \mathrm{ord}^{V_1}(\sigma^{L_2}(Q_j)),\, j=1,\ldots,r\}.$$
Avec les notations précédentes, nous avons (voir figure 3 page suivante) :
$$\mathrm{ord}^{V_1}(\sigma^{L_2}(Q_j)) = \mathrm{ord}^{V_1}(\exp_{\lhd_{L_2}}(Q_j)).$$

Maintenant on définit $\kappa^1 \in \mathbf{N}$ comme le maximum des κ^1_σ pour les cônes $\sigma \in \mathcal{E}_V$ de dimension 2. Dans ce paragraphe, on se propose de montrer le résultat suivant :

PROPOSITION 2.18. *Pour tout $w \in \mathbf{Z}^2$:*
$$\overline{V}_w(M) \subset V_{w+(\kappa^1,0)}(M).$$

2.3.1. *Contrôle de la montée de l'ordre par rapport V_1.* Soit $\sigma \in \mathcal{E}_V$ un cône de dimension maximale et soient $L_1 < L_2$ ses générateurs primitifs. Soit $m \in \overline{V}_w(M)$ avec w dans $\mathbf{Z}^2$, en particulier $m \in (V^{L_1}_{L_1(w)}(\mathcal{D}_{n+2})\delta) \cap (V^{L_2}_{L_2(w)}(\mathcal{D}_{n+2})\delta)$. Supposons donné $P \in \mathcal{D}_n$ tel que $P\delta = m$ et $\mathrm{ord}^{L_1}(P) \leq L_1(w)$ et tel que $\mathrm{ord}^{L_2}(P) > L_2(w)$. Alors nous avons montré dans le lemme 2.16 comment construire, en un nombre fini d'étapes, un élément P_σ tel que $\mathrm{ord}^{L_1}(P_\sigma) \leq \mathrm{ord}^{L_1}(P)$ (i.e. l'ordre par rapport à L_1 n'a pas augmenté) et $\mathrm{ord}^{L_2}(P_\sigma) \leq L_2(w)$ (i.e. l'ordre par rapport à L_2 a baissé le plus possible). Le problème est de savoir ce qui se passe pour l'ordre V_1 de P_σ par rapport à celui de P. Nous pouvons montrer que cet ordre peut monter mais de manière contrôlée. C'est l'objet du lemme suivant :

FIG. 3. $\mathrm{ord}^{V_1}(Q_j) - \mathrm{ord}^{V_1}(\exp_{\lhd_{L_2}}(Q_j))$

LEMME 2.19. *Soit σ un cône de dimension maximale de $\mathcal{E}_V(h(I))$ et $L_1 \neq L_2$ ses générateurs primitifs (il est possible que $L_i \notin \sigma$). Supposons $V_1 \leq L_1 < L_2 \leq V_2$. Soient $w \in \mathbf{Z}^2$ et $m \in V^{L_2}_{L_2(w)}(M)$. Soit $P \in \mathcal{D}_{n+2}$ tel que $P\delta = m$ et $ord^{L_1}(P) \leq L_1(w)$ alors on peut construire $P_\sigma \in \mathcal{D}_{n+2}$ à partir de P tel que :*

(i): $P_\sigma - P \in I$

(ii): $P_\sigma \in {}^\sigma V_w(\mathcal{D}_{n+2})$, *en particulier :* $ord^{L_2}(P_\sigma) \leq L_2(w)$

(iii): $ord^{V_1}(P_\sigma) \leq \max\{ord^{V_1}(P)\,,\, w_1 + \kappa^1_\sigma\}$.

C'est (iii) qui justifie l'intitulé de ce sous paragraphe.

DÉMONSTRATION. Par hypothèse il existe $P_2 \in \mathcal{D}_{n+2}$ vérifiant $P_2\delta = m$ et $\mathrm{ord}^{L_2}(P_2) \leq L_2(w)$. On définit $H_0 = z^{l_0}h(P - P_2) = z^l h(P) - z^{l_2}h(P_2)$, $H = z^l h(P)$ et $H_2 = z^{l_2}h(P_2)$. On reprend le début de la preuve du lemme 2.16 à la différence qu'on travaille avec la forme L_2 au lieu de L_1. On considère donc la division de H_0 par la base standard $Q_1, \ldots, Q_r$ relativement à l'ordre $\lhd_{L_2}$ ce qui donne :
$H_0 = \sum_{j=1}^r q_j Q_j$ avec $\mathrm{ord}^{L_2}(H_0) \geq \mathrm{ord}^{L_2}(q_j Q_j)$. On note J l'ensemble des j dans $\{1, \ldots, r\}$ pour lesquels l'inégalité précédente est une égalité. On pose alors :
$W = \sum_{j \in J} \sigma^{L_2}(q_j) Q_j$ et $H' = H - W$.
Maintenant, ce qui nous intéresse, c'est la différence entre $\mathrm{ord}^{V_1}(H)$ et $\mathrm{ord}^{V_1}(H')$. C'est l'objet de ce qui suit :

AFFIRMATION.

(a): $ord^{V_1}(W) - ord^{V_1}(\exp_{\lhd_{L_2}}(W)) \leq \kappa^1_\sigma$

(b): $ord^{V_1}(W) \leq w_1 + \kappa_\sigma^1$

Démontrons ces affirmations :
(b) : Nous avons $\mathrm{ord}^{V_1}(\exp_{\lhd_{L_2}}(W)) = \mathrm{ord}^{V_1}(\sigma^{L_2}(W)) = \mathrm{ord}^{V_1}(\sigma^{L_2}(H))$ et ce dernier est majoré par w_1 donc si **(a)** est vrai il en est de même pour **(b)**.
(a) : Par l'égalité $\exp_{\lhd_{L_2}}(W) = \exp_{\lhd_{L_2}}(H_0)$, il existe $j_1 \in J$ tel que $\exp_{\lhd_{L_2}}(H_0) = \exp_{\lhd_{L_2}}(m_1 Q_{j_1})$ où m_1 est un monôme. De plus,

$$\mathrm{ord}^{V_1}(W) \leq \max\{\mathrm{ord}^{V_1}(\sigma^{L_2}(q_j)Q_j)\,;j \in J\}.$$

Soit alors $j_2 \in J$ tel que $\mathrm{ord}^{V_1}(\sigma^{L_2}(q_{j_2})Q_{j_2}) = \max\{\mathrm{ord}^{V_1}(\sigma^{L_2}(q_j)Q_j)\,;j \in J\}$. Il existe alors un monôme m_2 tel que $\mathrm{ord}^{V_1}(W) \leq \mathrm{ord}^{V_1}(m_2 Q_{j_2})$, en effet il suffit pour cela de prendre un monôme de $\sigma^{V_1}(\sigma^{L_2}(q_{j_2}))$.

FIG. 4. Illustration des affirmations

Remarquons qu'il est possible que $j_1 = j_2$ mais dans ce cas il est facile de montrer que l'affirmation **(a)** est vraie. Par contre on a toujours :

AFFIRMATION.

(c): $ord^{V_1}(\exp_{\lhd_{L_2}}(m_2 Q_{j_2})) \leq ord^{V_1}(\exp_{\lhd_{L_2}}(m_1 Q_{j_1}))$.

En utilisant cette affirmation, nous avons :

$$\begin{aligned}
\mathrm{ord}^{V_1}(W) &= \mathrm{ord}^{V_1}(W) - \mathrm{ord}^{V_1}(m_2Q_{j_2}) \\
&\quad + \mathrm{ord}^{V_1}(m_2Q_{j_2}) - \mathrm{ord}^{V_1}(\exp_{\lhd L_2}(m_2Q_{j_2})) \\
&\quad + \mathrm{ord}^{V_1}(\exp_{\lhd L_2}(m_2Q_{j_2})) - \mathrm{ord}^{V_1}(\exp_{\lhd L_2}(m_1Q_{j_1})) \\
&\quad + \mathrm{ord}^{V_1}(\exp_{\lhd L_2}(W)) \\
&\leq \mathrm{ord}^{V_1}(m_2Q_{j_2}) - \mathrm{ord}^{V_1}(\exp_{\lhd L_2}(m_2Q_{j_2})) + \mathrm{ord}^{V_1}(\exp_{\lhd L_2}(W)) \\
&\leq \kappa^1_\sigma + \mathrm{ord}^{V_1}(\exp_{\lhd L_2}(W))
\end{aligned}$$

Ceci démontre le point **(a)**. Il ne reste plus qu'à démontrer le point **(c)**.
Puisque $\exp_{\lhd L_2}(m_1Q_{j_1})$ et $\exp_{\lhd L_2}(m_2Q_{j_2})$ sont (L_1, L_2)-homogènes donc (V_1, V_2)-homogènes, il suffit de montrer la chose suivante avec ξ égal à $\exp_{\lhd L_2}(m_2Q_{j_2}) - \exp_{\lhd L_2}(m_1Q_{j_1})$:
Si $L_1(\xi) \leq 0$ et $L_2(\xi) = 0$ alors $V_1(\xi) \leq 0$.
Puisque $V_2 \geq L_2 > L_1 \geq V_1$, on peut (sans perte de généralité) écrire $L_1 = V_1 + bV_2$ et $L_2 = aV_1 + V_2$ avec $a, b \geq 0$. La condition $L_2 > L_1$ se traduit par $1 - ab > 0$. Par un calcul élémentaire on montre que nos conditions se traduisent par $(1 - ab)V_1(\xi) \leq 0$, par suite $V_1(\xi) \leq 0$. Le point **(c)** est démontré.
Voyons maintenant comment l'affirmation **(b)** permet de montrer le troisième point du lemme. Nous sommes partis de H et nous avons construit $H' = H - W$. Par **(b)**, nous avons $\mathrm{ord}^{V_1}(H') \leq \max(\mathrm{ord}^{V_1}(H), w_1 + \kappa^1_\sigma)$. La suite consiste à faire les mêmes opérations avec H' à la place de H. Le dernier élément H_σ ainsi construit vérifie : $H_\sigma - H \in h(I)$ et $\mathrm{ord}^{V_1}(H_\sigma) \leq \max(\mathrm{ord}^{V_1}(H), w_1 + \kappa^1_\sigma)$.
On pose alors $P_\sigma = H_{\sigma|z=1}$, on a bien $P_\sigma - P \in I$ et $\mathrm{ord}^{V_1}(P_\sigma) \leq \max(\mathrm{ord}^{V_1}(P), w_1 + \kappa^1_\sigma)$. Le lemme est démontré. □

2.3.2. *Fin de la preuve.*

DEMONSTRATION DE LA PROPOSITION 2.18. Notons $L_0 = V_1 < \cdots < L_q = V_2$ les éléments primitifs du 1-squelette de $\mathcal{E}_V$. Pour chaque $i = 1, \ldots, q$, notons $\sigma_i \in \mathcal{E}_V$ le cône contenant le cône ouvert engendré par L_{i-1} et L_i.
Soit $m \in \overline{V}_w(M)$.
Montrons par récurrence sur i que pour tout $i = 0, \ldots, q$, il existe $T_i \in \mathcal{D}_{n+2}$ vérifiant :

- $T_i\delta = m$
- $T_i \in V^{L_i}_{L_i(w)}(M)$
- $\mathrm{ord}^{V_1}(T_i) \leq w_1 + \kappa^1$

Pour $i = 0$: $m \in \overline{V}_w$ donc en particulier $m \in V^{V_1}_{V_1(w)}$ (notons que $V_1(w) = w_1$) donc il existe T_0 tel que $T_0\delta = m$ et $\mathrm{ord}^{V_1}(T_0) \leq w_1 \leq w_1 + \kappa^1$.
Supposons l'hypothèse vraie au rang $i - 1$.
On applique alors le lemme 2.19 avec $\sigma = \sigma_i$ et $P = T_{i-1}$. On pose alors $T_i = P_\sigma$ (notations du lemme). D'après ce même lemme, T_i vérifie :

- $T_i\delta = m$
- $T_i \in V^{L_i}_{L_i(w)}(M)$
- $\mathrm{ord}^{V_1}(T_i) \leq \max(\mathrm{ord}^{V_1}(T_{i-1}), w_1 + \kappa^1) = w_1 + \kappa^1$

L'hypothèse est donc vraie pour tout i. En particulier pour $i = q$, on a : $m = T_q\delta$, $\mathrm{ord}^{V_2}(T_q) \leq w_2$ et $\mathrm{ord}^{V_1}(T_q) \leq w_1 + \kappa^1$, c'est-à-dire $m \in V_{w+(\kappa^1,0)}(M)$. □

REMARQUE 2.20. *Le procédé de construction de* $(\kappa^1, 0)$ *montre qu'un tel* κ *n'est à priori pas unique, par exemple on aurait pu construire en inversant les rôles de* V_1 *et* V_2 *un* κ *de la forme* $(0, \kappa^2)$.

3. Existence de polynômes de Bernstein-Sato dans le cas algébrique

Dans cette dernière section, nous nous proposons, dans le souci d'être aussi complet que possible d'écrire la preuve de l'existence de polynômes de Bernstein-Sato associés à p polynômes. En effet et à ma connaissance, il ne semble pas qu'une telle démonstration aient été écrite. Nous avons décidé de mimer la preuve donnée par I.N. Bernstein (voir aussi [**Bj**]) qui est facilement généralisable. Nous ne donnerons pas tous les détails mais insisterons sur les points qui nous semblent importants. Cette section permet en même temps de faire une transition avec le chapitre suivant où l'on se penchera plus en détail sur des questions de rationalité du (d'un !) polynôme de Bernstein-Sato.

On se donne ici un corps $\mathbf{k}$ quelconque et $f_1, \ldots, f_p \in \mathbf{k}[x] = \mathbf{k}[x_1, \ldots, x_n]$. Soient $s_1, \ldots, s_p$ des variables. On note $\mathcal{L} = \mathbf{k}[x, 1/f_1 \cdots f_p, s] \cdot f^s$ le module libre engendré par le symbole f^s que l'on note aussi $f_1^{s_1} \cdots f_p^{s_p}$. L'anneau $\mathbf{A}_n(\mathbf{k})$ agit naturellement sur $\mathcal{L}$. Pour $v \in \mathbf{N}^p$, on considère l'équation :

$$b(s_1, \ldots, s_p) f^s = P(s) \cdot f^{s+v}.$$

Si on note $\mathcal{B}^v(f)$ l'idéal des $b(s) \in \mathbf{k}[s]$ tels qu'il existe $P(s) \in \mathbf{A}_n(\mathbf{k})[s]$ satisfaisant à l'équation précédente alors le but est de montrer que cet idéal, que l'on nomme idéal de Bernstein-Sato associé à $f = (f_1, \ldots, f_p)$, est non nul. Disons un mot de plus du chapitre suivant : nous y montrerons que non seulement cet idéal n'est pas nul mais contient un élément rationnel qui s'écrit comme produit de $b_L(L(s) - k)$ comme dans le cas analytique.

3.1. Bonne filtration et noethérianité. On note $F = (F_k(\mathbf{A}_n(\mathbf{k})))_{k \in \mathbf{N}}$ la filtration sur $\mathbf{A}_n(\mathbf{k})$ par l'ordre total en x et ∂_x. Le gradué associé $\mathrm{gr}^F(\mathbf{A}_n(\mathbf{k}))$ est alors isomorphe à $\mathbf{k}[x, \xi] = \mathbf{k}[x_1, \ldots, x_n, \xi_1, \ldots, \xi_n]$. Signalons que c'est en considérant $\mathrm{gr}^F(\mathbf{A}_n(\mathbf{k}))$ qui est noethérien qu'on montre la noethérianité de $\mathbf{A}_n(\mathbf{k})$. Soit M un module sur $\mathbf{A}_n(\mathbf{k})$. Une filtration de M est la donnée de $\mathbf{k}$-sous-espaces vectoriels de M de dimension finie $(M_k)_{k \in \mathbf{N}}$ tels que :
- $M_k \subset M_{k+1}$ pour tout k
- $M = \cup M_k$
- $F_l(\mathbf{A}_n(\mathbf{k}))M_k \subset M_{k+l}$ pour tout k, l

A une filtration Γ de M est associé un gradué $\mathrm{gr}^\Gamma(M) = \oplus_{k \in \mathbf{N}} M_k/M_{k-1}$ avec par convention $M_{-1} = 0$. Ce gradué est un module sur $\mathrm{gr}^F(\mathbf{A}_n(\mathbf{k}))$.
Etant donnée une filtration Γ sur M, on dit qu'elle est **bonne** si $\mathrm{gr}^\Gamma(M)$ est de type fini sur $\mathrm{gr}^F(\mathbf{A}_n(\mathbf{k}))$. Il existe une caractérisation combinatoire des bonnes filtrations :

PROPOSITION. *Soit* $\Gamma = (M_k)$ *une filtration sur un* $\mathbf{A}_n(\mathbf{k})$*-module* M*. La filtration* Γ *est bonne si et seulement si il existe* $k_0 \in \mathbf{N}$ *tel que pour tout* $k \in \mathbf{N}$ *on ait* $F_k(\mathbf{A}_n(\mathbf{k}))M_{k_0} = M_{k+k_0}$.

En ce qui concerne $\mathbf{A}_n(\mathbf{k})$, pour tout $k, l \in \mathbf{N}$,

$$F_k(\mathbf{A}_n(\mathbf{k}))F_l(\mathbf{A}_n(\mathbf{k})) = F_{k+l}(\mathbf{A}_n(\mathbf{k})).$$

Les bonnes filtrations permettent de caractériser les module de type fini (donc noethériens) sur $\mathbf{A}_n(\mathbf{k})$ comme le montre le résultat suivant :

PROPOSITION. *Soit M un $\mathbf{A}_n(\mathbf{k})$-module. Alors :*
M admet une bonne filtration si et seulement si M est de type fini sur $\mathbf{A}_n(\mathbf{k})$.

Nous avons un lemme de comparaison entre deux bonnes filtrations. Ce lemme est utile pour la suite.

LEMME (de comparaison)**.** *Soit M un module sur $\mathbf{A}_n(\mathbf{k})$ et soient Γ et Γ' deux bonnes filtrations sur M alors il existe k_1 et k_2 dans $\mathbf{N}$ tels que pour tout $k \in \mathbf{N}$, on ait :*

$$\Gamma'_{k-k_1} \subset \Gamma_k \subset \Gamma'_{k+k_2}.$$

3.2. Polynôme de Hilbert, dimension et multiplicité. Considérons les polynômes de $\mathbf{Q}[\lambda]$ (d'une variable) suivants :
$H_0 = 1$ et pour $r \geq 1$, $H_r(\lambda) = \frac{t(t-1)\cdots(t-r+1)}{r!}$.
Soit $H \in \mathbf{Q}[\lambda]$, H est dit **numérique** si pour $\lambda \in \mathbf{N}$ assez grand $H(\lambda)$ appartient à $\mathbf{Z}$.

LEMME. *Soit $H \in \mathbf{Q}[\lambda]$, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) H est numérique.

(2) $H(\mathbf{Z}) \subset \mathbf{Z}$.

(3) il existe $c_0, \ldots, c_d \in \mathbf{Z}$ tel que $H = c_0H_0 + \cdots + c_dH_d$.

Remarquons que dans la condition 3, les c_k sont uniques. Par conséquent, on peut dire que l'ensemble des polynômes numériques est le $\mathbf{Z}$-module libre engendré par les H_k.
Une autre conséquence de la condition 3 est qu'un polynôme numérique a son terme dominant de la forme $m\frac{\lambda^d}{d!}$ avec $m \in \mathbf{Z}$.

THEOREME (de Hilbert)**.** *Soit $M = \oplus_{k\in\mathbf{N}} M_k$ un $\mathbf{k}[x_1, \ldots, x_n]$ module gradué de type fini alors il existe $H \in \mathbf{Q}[\lambda]$ de degré inférieur ou égal à n et il existe $N \in \mathbf{N}$ tels que pour tout $k \geq N$,*

$$H(k) = \sum_{k'=0}^{k} \dim_{\mathbf{k}} M_{k'}.$$

Le polynôme H est dit polynôme de Hilbert de M. Son terme dominant est de la forme $m\frac{\lambda^d}{d!}$ avec $m \in \mathbf{N}$ et $d \leq n$. On dit que d et m sont respectivement la dimension et la multiplicité de M.

Soit maintenant M un $\mathbf{A}_n(\mathbf{k})$-module de type fini. Soit Γ une bonne filtration sur M. Alors $\mathrm{gr}^\Gamma(M)$ est un $\mathrm{gr}^F(\mathbf{A}_n(\mathbf{k})) \simeq \mathbf{k}[x_1, \ldots, x_n, \xi_1, \ldots, \xi_n]$-module gradué. On appelle alors **dimension et multiplicité de** M et on note $d(M)$ et $m(M)$ ceux de $\mathrm{gr}^\Gamma(M)$. Si Γ' est une autre bonne filtration de M alors par le lemme de comparaison, on voit que pour k assez grand les polynômes de Hilbert H et H' respectivement de $\mathrm{gr}^\Gamma(M)$ et $\mathrm{gr}^{\Gamma'}(M)$ vérifient $H'(k-k_1) \leq H(k) \leq H'(k+k_1)$. Il est alors facile de voir que les termes dominant de H et H' sont égaux. Autrement dit les définitions de dimension et multiplicité d'un $\mathbf{A}_n(\mathbf{k})$-module ne dépendent pas de la bonne filtration choisie.

Remarquons que par le théorème précédent, la dimension de M est majorée par $2n$.

3.3. Modules holonomes.

THEOREME. *(inégalité de Bernstein) Soit M un $\mathbf{A}_n(\mathbf{k})$-module de type fini. Alors $d(M) \geq n$.*

On dit d'un module M qu'il est **holonome** si $d(M) = n$.

PROPOSITION. *Un module holonome est artinien (i.e. toute suite décroissante de sous-modules stationne).*

THEOREME. *Soit $f \in \mathbf{k}[x_1, \ldots, x_n]$ non nul.*
Alors le $\mathbf{A}_n(\mathbf{k})$-module $\mathbf{k}[x_1, \ldots, x_n, 1/f]$ est holonome.

Ce théorème ainsi que la proposition qui le précède sont les points de départs du théorème d'existence d'un polynôme de Bernstein.
Tout ce qui a été dit jusqu'à présent se trouve dans [**Bj**].

3.4. Polynôme de Bernstein-Sato.

THEOREME 2.21. *Soient $f_1, \ldots, f_p \in \mathbf{k}[x_1, \ldots, x_n]$ et soit $v \in \mathbf{N}^p$ alors il existe $b(s_1, \ldots, s_p) \in \mathbf{k}[s_1, \ldots, s_p]$ non nul tel que :*

$$b(s_1, \ldots, s_p) f^s \in \mathbf{A}_n(\mathbf{k})[s_1, \ldots, s_p] f^{s+v}.$$

Démonstration. La preuve est une généralisation élémentaire de celle de J.E. Björk.
Si on note $\mathbf{k}(s)$ le corps des fractions rationnelles en $s_1, \ldots, s_p$ alors par le théorème précédent, le module $\mathbf{k}(s)[x_1, \ldots, x_n, \frac{1}{f_1 \cdots f_p}]$ est holonome sur $\mathbf{A}_n(\mathbf{k}(s))$ ce qui a pour conséquence l'holonomie de $\mathbf{k}(s)[x_1, \ldots, x_n, \frac{1}{f_1 \cdots f_p}] f^s$ qui est donc artinien. Par conséquent la suite suivante est stationnaire :

$$\mathbf{k}(s)[x, \frac{1}{f_1 \cdots f_p}] f^s \supseteq \mathbf{A}_n(\mathbf{k}(s)) f^s \supseteq \mathbf{A}_n(\mathbf{k}(s)) f^{s+v} \supseteq \mathbf{A}_n(\mathbf{k}(s)) f^{s+2v} \supseteq \cdots .$$

En particulier, il existe $k \in \mathbf{N}$ tel que f^{s+kv} appartienne à $\mathbf{A}_n(\mathbf{k}(s)) f^{s+(k+1)v}$. Donc il existe $Q(s) \in \mathbf{A}_n(\mathbf{k})[s]$ et $c(s) \in \mathbf{k}[s]$ tels que :

$$c(s) f^{s+kv} = Q(s) f^{s+(k+1)v}.$$

Nous avons vu que $\mathcal{L} = \mathbf{k}[x, \frac{1}{f_1 \cdots f_p}][s] f^s$ était muni d'une structure de $\mathbf{A}_{n+p}$-module.
Pour $j = 1, \ldots, p$, soit $u_j : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ définie par :

$$u_j \cdot g(s) f^{-w} f^s = g(s_1, \ldots, s_j - 1, \ldots, s_p) f^{-w} f_j^{-1} f^s,$$

avec $g(s) \in \mathbf{k}[x, s]$ et $w \in \mathbf{N}^p$. On constate alors que $u_j \circ t_j = t_j \circ u_j = id$. Or t_j est $\mathbf{A}_n(\mathbf{k})$-linéaire donc u_j l'est aussi. De plus pour tout $T \in \mathcal{L}$, pour tout i, j entre 1 et p :

- $t_j s_i T = s_i t_j T = u_j s_i T = s_i u_j T$ si $i \neq j$,
- $t_j s_j T = (s_j + 1) t_j T$ et $s_j t_j T = t_j (s_j - 1) T$,
- $u_j s_j T = (s_j - 1) u_j T$ et $s_j u_j T = u_j (s_j + 1) T$.

Une jolie façon de démontrer ces formules de commutations est de se rappeler que s_j agit comme $-\partial_{t_j} t_j$ sur T ce qui revient à travailler dans $\mathbf{A}_{n+p}(\mathbf{k})$. Ce qui nous intéresse dans ces formules, c'est que u_j appliqué à $Q(s) f^s$ est égal à $Q(s_1, \ldots, s_j - 1, \ldots, s_p) f_j^{-1} f^s$. Par conséquent, si nous appliquons $u_1^{kv_1} \cdots u_p^{kv_p}$ à $c(s) f^{s+kv}$, nous obtenons :

$$c(s_1 - kv_1, \ldots, s_p - kv_p) f^s = Q(s_1 - kv_1, \ldots, s_p - kv_p) f^{s+v}.$$

Autement dit le polynôme $c(s-kv)$ est un polynôme de Bernstein-Sato. $\square$

CHAPITRE 3

Polynômes de Bernstein-Sato algébriques rationnels et étude algorithmique

Si on se donne $f_1, \ldots, f_p$ des polynômes dans $\mathbf{C}[x_1, \ldots, x_n]$, il est possible de les voir aussi comme germes en un point quelconque x_0 de $\mathbf{C}^n$. Aussi cela donne lieu à deux visions des choses l'une locale en x_0 et l'autre globale. Le but de ce chapitre est de mieux connaitre les polynômes b_L dont nous avons parlés au chapitre précédent. Ce sont les briques à partir desquelles on construit un polynôme de Bernstein-Sato (rationnel !). Rationnel sera le maître mot de ce chapitre puisque le but est de montrer qu'il existe un polynôme de Bernstein-Sato algébrique rationnel non nul sur n'importe quel corps $\mathbf{k}$ (i.e. associé à $f_1, \ldots, f_p \in \mathbf{k}[x_1, \ldots, x_n]$). Nous avons déja vu une preuve de l'existence en généralisant la preuve de J.E. Björk. Pour ce qui est de la rationalité, nous pourrions nous baser sur le cas local traité par C. Sabbah (avec le résultat supplémentaire de A. Gyoja) et la montrer par des arguments relativement succincts en faisant un passage du local au global puis un passage de $\mathbf{C}$ à $\mathbf{k}$ (voir ci-dessous). Cependant, la voie que nous choisissons ici permet de mieux connaitre les objets avec lesquels on travaille, à savoir les polynômes b_L. Nous l'avons choisi aussi parce qu'elle est constructive comme nous le verrons.

Dans un premier temps, nous ferons un examen de passage du local au global en ce qui concerne les polynômes b_L en imitant [**Br-Mai2**]. C'est-à-dire que nous étudierons le lien entre polynômes b_L analytiques et algébriques.

Dans un deuxième temps, nous introduirons pour chaque L un idéal que l'on note $\mathcal{B}_L$ qui a deux propriétés algorithmiques remarquables : la première c'est qu'il est calculable (du moins dans le cas algébrique) et la deuxième est qu'il contient le polynôme $b_L(L(s_1, \ldots, s_p))$ ce qui permet aussi de calculer b_L.

Dans un troisième temps, nous nous placerons dans le cas où $f_1, \ldots, f_p$ sont dans $\mathbf{k}[x_1, \ldots, x_n]$. Nous utiliserons les algorithmes de calcul de $\mathcal{B}_L$ et b_L pour montrer que ce dernier n'est pas nul dans ce cas. Nous nous ramenerons au cas où $\mathbf{k} = \mathbf{C}$.

Pour finir, nous expliciterons l'existence d'un polynôme de Bernstein-Sato rationnel associé à des f_j de $\mathbf{k}[x_1, \ldots, x_n]$.

Tout d'abord, voici une première preuve non constructive de ce résultat :

- Première étape : les f_j sont dans $\mathbf{C}[x]$.
  Dans ce cas, on sait par [**Br-Mai**] que l'ensemble des idéaux de Bernstein-Sato locaux $\mathcal{B}^v_{an,x_0}$ sont en nombre fini lorsque x_0 parcourt $\mathbf{C}^n$ et que leur intersection est $\mathcal{B}^v = \mathcal{B}^v_{alg}$.
- Deuxième étape : les f_j sont dans $\mathbf{k}[x]$. Notons $\mathbf{K}$ le corps $\mathbf{Q}(c_1, \ldots, c_N)$ où les $c_i \in \mathbf{k}$ sont les coefficients intervenant dans l'écriture des f_j. Il existe alors $e_1, \ldots, e_N \in \mathbf{C}$ et un morphisme injectif de corps $\phi : \mathbf{K} \to \mathbf{C}$ tel que $\phi(c_i) = e_i$.

Notons $f'_1, \ldots, f'_p$ les polynômes de $\mathbf{C}[x]$ (en fait de $\phi(\mathbf{K})[x]$) obtenu en remplaçant c_i par e_i dans l'écriture des f_j.
D'après le point précédent, il existe $b(s) \in \mathbf{Q}[s]$ tel que $b(s)f'^s \in \mathbf{A}_n(\mathbf{C})[s]f'^{s+v}$.
Il est alors possible de montrer comme dans [**Br**] que $b(s)f'^s \in \mathbf{A}_n(\phi(\mathbf{K}))[s]f'^{s+v}$.
Par suite en utilisant ϕ^{-1}, on obtient $b(s)f^s \in \mathbf{A}_n(\mathbf{K})[s]f^s \subset \mathbf{A}_n(\mathbf{k})[s]f^s$.

1. Étude des polynômes b_L...

1.1. ...sur C : passage du local au global. Dans cette section nous allons travailler sur $\mathbf{C}$, i.e. les polynômes $f_1, \ldots, f_p$ sont supposés être dans $\mathbf{C}[x] = \mathbf{C}[x_1, \ldots, x_n]$. Nous fixons une forme linéaire $L \in \mathcal{U}_V$ entière. Soit $x_0 \in \mathbf{C}^n$, nous notons $\mathcal{D}_{n,x_0}$ (resp. $\mathcal{D}_{n+p,x_0}$) l'anneau des opérateurs différentiels à coefficients dans $\mathcal{O}_{x_0} = \mathbf{C}\{x_1 - x_{0,1}, \ldots, x_n - x_{0,n}\}$ (resp. dans $\mathcal{O}_{(x_0,0)} = \mathbf{C}\{x_1 - x_{0,1}, \ldots, x_n - x_{0,n}, t_1, \ldots, t_p\}$). On définit le polynôme $b_{L,alg}$ (resp. b_{L,an,x_0}) comme le générateur unitaire de l'idéal des polynômes $c(\lambda)$ d'une variable complexe λ qui vérifient

$$c(L(s_1, \ldots, s_p))f^s = Pf^s \tag{3}$$

avec $P \in V^L_{<0}(\mathbf{A}_{n+p})$ (resp. $P \in V^L_{<0}(\mathcal{D}_{n+p,x_0})$).
Remarquons qu'il n'y a aucune ambiguité à écrire $V^L_{<0}(\mathcal{D}_{n+p,x_0})$ car L appartient à $\mathcal{U}_V$ (i.e. ne concerne que les variables t_j et ∂_{t_j}).

THEOREME 3.1. *Le polynôme b_{L,an,x_0} est non nul et ses racines sont dans $\mathbf{Q}$ (en fait dans $\mathbf{Q}_{<0}$).*

Il s'agit simplement du théorème de C. Sabbah (avec le complément de A. Gyoja) en x_0. Nous nous proposons de montrer que :

PROPOSITION 3.2.
– *L'ensemble des b_{L,an,x_0} est fini quand x_0 parcourt $\mathbf{C}^n$.*
– *Leur p.p.c.m. est $b_{L,alg}$.*

Nous en tirons comme conséquence immédiate :

COROLLAIRE 3.3. *Le polynôme $b_{L,alg}$ est non nul et a ses racines dans $\mathbf{Q}_{<0}$.*

Nous allons mettre en place la preuve de la proposition 3.2. Pour $x_0 \in \mathbf{C}^n$ on définit b_{L,rat,x_0} comme le générateur unitaire des polynômes qui vérifient l'équation (3) avec $P = Q/q$ où Q appartient à $V^L_{<0}(\mathbf{A}_{n+p})$ et $q = q(x)$ est un polynôme qui ne s'annule pas en x_0. En fait P est dans l'anneau des opérateurs différentiels à coefficients dans le localisé $\mathbf{C}[x]_{(x_0)}$ de $\mathbf{C}[x]$ en (x_0).

On voit aisement que les différents polynômes b_L vérifient les relations de division suivantes :

$$b_{L,an,x_0} \,|\, b_{L,rat,x_0} \,|\, b_{L,alg}.$$

PROPOSITION 3.4. *Pour tout $x_0 \in \mathbf{C}^n$,*

$$b_{L,an,x_0} = b_{L,rat,x_0}.$$

Pour démontrer cette proposition, nous aurons besoin du lemme suivant :

LEMME 3.5. *Soit $L \in \mathcal{U}_V \cap \mathbf{N}^p$ et $P \in V^L_{<0}(\mathcal{D}_{n+p})$ alors il existe $Q \in V^L_{<0}(\mathcal{D}_n \otimes \mathbf{A}_p(\mathbf{C}))$ tel que $P - Q \in I$ c'est-à-dire $Pf^s = Qf^s$.*

Démonstration. Quitte à permuter les indices, on peut supposer que $L = \alpha_q V_q + \cdots + \alpha_p V_p$ avec $q \geq 1$ et les α_j tous dans $\mathbf{N}_{>0}$. On écrit $P = \sum_{\mu,\nu} p_{\mu\nu}(x, \partial_x) t^\mu \partial_t^\nu$.
Pour tout j, si $\mu_j > \nu_j$ alors

$$t_j^{\mu_j} \partial_{t_j}^{\nu_j} = (t_j \partial_{t_j} - \mu_j + 1)(t_j \partial_{t_j} - \mu_j + 2) \cdots (t_j \partial_{t_j} - \mu_j + \nu_j) t_j^{\mu_j - \nu_j}.$$

Soit P' construit en remplaçant, pour chaque j entre 1 et q, $t_j^{\mu_j} \partial_{t_j}^{\nu_j}$ par

$$(t_j \partial_{t_j} - \mu_j + 1)(t_j \partial_{t_j} - \mu_j + 2) \cdots (t_j \partial_{t_j} - \mu_j + \nu_j) f_j^{\mu_j - \nu_j}$$

dans l'écriture de P pour chaque couple (μ, ν) tel que $\mu_j > \nu_j$. Alors P' est égal à P modulo I et appartient à $\mathbf{C}[x, \partial_x][t_1, \ldots, t_{q-1}]\{t_q, \ldots, t_p\}[\partial_t]$. De plus les ordres $\mathrm{ord}^L(P)$ et $\mathrm{ord}^L(P')$ sont égaux. On est donc amené à étudier le cas où $q = 1$ c'est-à-dire que $L = \sum \alpha_j V_j$ avec tous les α_j non nuls, ce que nous faisons.
Ecrivons $P = \sum p'_{\mu\nu}(x, \partial_x) \partial_t^\nu t^\mu$ (il s'agit de l'écriture à droite) alors il est facile de voir que le maximum des $L(\nu - \mu) = (\alpha | (\nu - \mu))$ est strictement négatif (autrement dit l'ordre par rapport à L ne dépend pas de l'écriture de P).
Notons e le maximum des $(\alpha|\nu)$ pour les (μ, ν) tels que $p'_{\mu,\nu}(x, \partial_x) \neq 0$. Soit alors $Q = \sum p'_{\mu,\nu}(x, \partial_x) \partial_t^\nu T_1(\mu, \nu) \cdots T_p(\mu, \nu)$ où

$$T_j(\mu, \nu) = \begin{cases} t_j^{\mu_j} \text{ si } \mu_j \leq [\frac{e}{\alpha_j}] + 1 \\ t_j^{[\frac{e}{\alpha_j}]+1} f_j^{\mu_j - [\frac{e}{\alpha_j}] - 1} \quad \text{sinon,} \end{cases}$$

et où $[\cdot]$ désigne la partie entière. Alors Q égale P modulo I et appartient à $\mathcal{D}_n \otimes \mathbf{A}_p(\mathbf{C})$. Il reste à vérifier que $\mathrm{ord}^L(Q) < 0$. Nous avons :

$$\mathrm{ord}^L(Q) \leq \max\{\mathrm{ord}^L(\partial_t^\nu T_1(\mu, \nu) \cdots T_p(\mu, \nu))\,;\, p'_{\mu,\nu}(x, \partial_x) \neq 0\}.$$

Soit (μ, ν) tel que $p'_{\mu\nu}(x, \partial_x) \neq 0$ alors deux cas peuvent se présenter :
– Pour tout $j = 1, \ldots, p$, $\mu_j \leq [\frac{e}{\alpha_j}] + 1$. Dans ce cas,

$$\mathrm{ord}^L(\partial_t^\nu T_1(\mu, \nu) \cdots T_p(\mu, \nu)) = \mathrm{ord}^L(\partial_t^\nu t^\mu) \leq \mathrm{ord}^L(P) < 0.$$

– Il existe j tel que $\mu_j > [\frac{e}{\alpha_j}] + 1$. Alors,

$$\mathrm{ord}^L(\partial_t^\nu T_1(\mu, \nu) \cdots T_p(\mu, \nu)) \leq (\alpha|\nu) - \alpha_j([\frac{e}{\alpha_j}] + 1) < (\alpha|\nu) - e \leq 0.$$

$\square$

Pour les besoins de la preuve de la proposition 3.4, nous introduisons un certain nombre d'objets. Pour $j = 1, \ldots, p$ et pour $l \in \mathbf{N}$, on pose

$$\tau_{j,l} = s_j(s_j - 1) \cdots (s_j - l + 1) f_j^{s_j - l}$$

et pour $w \in \mathbf{N}^p$, on note $\tau_w = \tau_{1,w_1} \cdots \tau_{p,w_p}$. Considérons les $\mathcal{D}_{n+p,x_0}$-modules :

$$\mathcal{D}_{n+p,x_0} f^s \subset \bigoplus_{w \in \mathbf{N}^p} \mathcal{O}_{x_0} \tau_w \subset \mathcal{L}_{x_0} = \mathcal{O}_{x_0}[\frac{1}{f_1 \cdots f_p}, s_1, \ldots, s_p] f^s.$$

Pour $j = 1, \ldots, p$, notons $\mathbf{1}_j = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots) \in \mathbf{N}^p$ avec le 1 placé à la $j^{\text{ème}}$ place. Nous avons les relations suivantes :

– $\partial_{x_i} \tau_w = \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \tau_{w + \mathbf{1}_j}$.

– $\partial_{t_j}\tau_w = -\tau_{w+\mathbf{1}_j}$.
– $t_j\tau_w = w_j\tau_{w-\mathbf{1}_j} + f_j\tau_w$.
– $s_j\tau_w = w_j\tau_w + f_j\tau_{w+\mathbf{1}_j}$.

Démonstration de la proposition 3.4. La preuve s'inspire de celle de ([**Br-Mai2**], prop. 1).
Pour simplifier les notations, nous supposerons que $x_0 = 0$.
Nous allons démontrer un résultat un peu plus général :
Soit $c(s) \in \mathbf{C}[s_1, \dots, s_p]$ tel que $c(s)f^s = Pf^s$ avec $P \in V^L_{<0}(\mathcal{D}_{n+p})$ alors il existe $P' \in V^L_{<0}(\mathbf{C}[x]_{(0)}[\partial_x] \otimes \mathbf{A}_p)$ tel que $c(s)f^s = P'f^s$. La proposition en découle en prenant $c(s) = b_{L,an,0}$.
Soit $c(s)$ tel que $c(s)f^s = Pf^s$ avec $P \in V^L_{<0}(\mathcal{D}_{n+p})$ alors par le lemme précédent, on peut supposer que P soit dans $V^L_{<0}(\mathcal{D}_n \otimes \mathbf{A}_p)$.
Notons d le maximum entre le degré du polynôme $c(s)$ et le degré total en t, ∂_t et ∂_x de P. Alors par les relations explicitées plus haut $Pf^s = c(s)f^s$ appartient à $\oplus_{|w|\leq d}\mathcal{O}_0\tau_w$. Ecrivons $P = \sum_{\beta\mu\nu} V_{\beta\mu\nu}(x)\partial_x^\beta t^\mu \partial_t^\nu$ avec $V_{\beta\mu\nu}(x) \in \mathcal{O}_0$. Ecrivons aussi :

$$c(s)f^s = \sum_{|w|\leq d} W_w\tau_w \text{ et } \partial_x^\beta t^\mu \partial_t^\nu f^s = \sum \phi_{\beta\mu\nu w}\tau_w.$$

Notons N le nombre de w de longueur inférieure à d et K le nombre de (β, μ, ν) de longueur inférieure à d. On peut écrire $Pf^s = \sum_w(\sum \phi_{\beta\mu\nu w}V_{\beta\mu\nu})\tau_w$ si bien que l'égalité $c(s)f^s = Pf^s$ peut être traduite par la relation $\Phi(V) = W$ où Φ est la matrice $(\phi_{\beta\mu\nu w})$ appliquée au vecteur $V = (V_{\beta\mu\nu}) \in (\mathcal{O}_0)^K$ et W est le vecteur $W = (W_w) \in (\mathcal{O}_0)^N$. On note par le même symbole $\Phi : (\mathcal{O}_0)^K \to (\mathcal{O}_0)^N$ l'application linéaire induite. Le point important de la preuve est que Φ est à coefficients dans $\mathbf{C}[x]$ donc dans $\mathbf{C}[x]_{(0)}$. Considérons donc l'application linéaire $\Phi' : (\mathbf{C}[x]_{(0)})^K \to (\mathbf{C}[x]_{(0)})^N$ définie par la même matrice. Maintenant soit k un entier positif. Tronquons V à l'ordre k, c'est-à-dire, écrivons $V = V_0 + V_1$ avec V_0 polynomial de degré au plus k et V_0 dans $(m^k)^K$ où m^k est la k-ième puissance de l'idéal maximal m de $\mathcal{O}_0$. Appliquons Φ à $V = V_0 + V_1$. On obtient $W = \Phi(V_0) + \Phi(V_1)$. Puisque W et $\Phi(V_0)$ sont dans $(\mathbf{C}[x]_{(0)})^N$ il en est de même de $\Phi(V_1)$ qui est donc dans $(m^k)^N \cap (\mathbf{C}[x]_{(0)})^N$.

Par conséquent, si on note m' l'idéal maximal de $\mathcal{O}_0$, alors

$$W \in \mathrm{Im}\Phi' + ({m'}^k)^N$$

et ce pour tout $k \in \mathbf{N}$. Par le théorème de Krull, on en déduit que W appartient à l'image de Φ'. Autrement dit, il existe $Q \in \mathbf{C}[x]_{(0)}[\partial_x][t, \partial_t]$ tel que $c(s)f^s = Qf^s$. Pour finir, il est facile de voir que l'opérateur Q ainsi construit fait intervenir les même multi-indices (β, μ, ν) que P et donc $\mathrm{ord}^L(Q) < 0$. □

LEMME 3.6. *Soit A une partie non vide de $\mathbf{C}^n$ alors il existe U un ouvert de Zariski non vide de A tel que l'application $U \to \mathbf{C}[\lambda]$ qui à x_0 associe b_{L,an,x_0} est constante.*

Démonstration. En vertu de la proposition précédente, nous faisons la preuve avec b_{L,rat,x_0}.
Soit $x_0 \in A$ alors il existe $Q \in V^L_{<0}(\mathbf{A}_{n+p})$ et $q \in \mathbf{C}[x]$ ne s'annulant pas en x_0 tels que $b_{L,rat,x_0}f^s = (1/q)Qf^s$. Par conséquent pour tout $x \in A \cap (\mathbf{C}^n \smallsetminus V(q))$, le polynôme $b_{L,rat,x}$ divise b_{L,rat,x_0}. S'il existe x_1 dans $A \cap (\mathbf{C}^n \smallsetminus V(q))$ pour lequel b_{L,rat,x_1} n'est

pas égal à b_{L,rat,x_0} alors par les mêmes arguments, il existe q_1 ne s'annulant pas en x_1 tel que pour tout $x \in A \cap (\mathbf{C}^n \smallsetminus V(q_1))$, $b_{L,rat,x} \mid b_{L,rat,x_1}$. S'il existe x_2 pour lequel on n'a pas égalité, on recommence avec x_2. En continuant ainsi, on construit une suite de polynômes qui se divisent strictement ce qui force le processus à s'arréter, i.e. il existe $q' \in \mathbf{C}[x]$ tel que pour $x \in A \cap (\mathbf{C}^n \smallsetminus V(q')$, le polynôme $b_{L,rat,x}$ est constant, ce qui donne l'ouvert $U = A \cap (\mathbf{C}^n \smallsetminus V(q')$. □

De ce lemme, on déduit le résultat suivant qui est similaire aux résultats de ([**Br-May**] section 3).
On appelle ensemble localement fermé de $A \subset \mathbf{C}^n$ toute différence de deux fermés de Zariski de A. On dit que $A \subset \mathbf{C}^n$ est constructible si c'est une union (finie) d'ensembles localement fermés. Signalons que les sous-ensembles constructibles forment la plus petite classe contenant les fermés de Zariski de $\mathbf{C}^n$ et stables par union finie, intersection finie et complémentaire.

PROPOSITION 3.7. *Il existe une partition finie de $\mathbf{C}^n$ en ensembles localement fermés telle que sur chacun d'eux l'application $x \mapsto b_{L,an,x}$ est constante.*

Démonstration. Montrons par une double récurrence sur la dimension $\dim Y$ de Y et sur le nombre de composantes irréductibles de $\bar{Y}$ que pour tout $Y \subset \mathbf{C}^n$ constructible il existe une telle partition. Si $\dim Y = 0$, le résultat est trivial. Soit Y de dimension non nulle. Supposons acquis le résultat pour tout Y' de dimension strictement inférieur à celle de Y ou de même dimension mais dont l'adhérence a moins de composantes irréductibles que $\bar{Y}$. Par le lemme précédent, il existe un ouvert U de Zariski de Y sur lequel $b_{L,an,x}$ est constant. On applique alors l'hypothèse de récurrence au complémentaire de U dans Y qui est aussi constructible. □

Démonstration de la proposition 3.2. Le premier point découle immédiatement de la proposition précédente. Montrons la deuxième assertion. Soit $b(\lambda)$ le p.p.c.m. des $b_{L,an,x}(\lambda)$. Pour tout $x \in \mathbf{C}^n$, il existe $d_x(\lambda)$ tel que $b(\lambda) = d_x(\lambda) b_{L,an,x}(\lambda)$. D'aprés ce qui a été dit plus haut, pour tout $x \in \mathbf{C}^n$ il existe $Q_x \in V^L_{<0}(\mathbf{A}_{n+p})$ et $q_x \in \mathbf{C}[x]$ ne s'annulant pas en x tel que $b_{L,an,x}(L(s)) f^s = (1/q_x) Q_x f^s$. Par le théorème des zéros de Hilbert, on peut écrire $1 = \sum_{x \in F} u_x q_x$ où F est un ensemble fini de $\mathbf{C}^n$. Par conséquent :

$$\begin{aligned} b(L(s)) f^s &= \sum_{x \in F} u_x \, q_x \, d_x(L(s)) \, b_{L,an,x} \, f^s \\ &= \big(\sum_{x \in F} u_x \, d_x(L(s)) \, Q_x \big) f^s. \end{aligned}$$

Ainsi le polynôme $b(\lambda)$ vérifie une équation du type $b(L(s)) f^s = Q f^s$ avec $Q \in V^L_{<0}(\mathbf{A}_{n+p})$. Donc le polynôme $b_{L,alg}$ n'est pas nul et divise b. Il en est aussi multiple. La proposition est démontrée. □

1.2. ...par les idéaux $\mathcal{B}_L$: une étude algorithmique. Ici nous nous placerons dans le cas où les f_j sont dans $\mathbf{k}[x]$. Dans ce paragraphe nous allons introduire de façon assez naturelle, pour chaque forme linéaire $L \in \mathcal{U}_V$, un idéal de $\mathbf{k}[s_1, \ldots, s_p]$ que l'on note $\mathcal{B}_L$. Nous verrons que cet idéal possêde deux propriétés intéressantes :
– $b_{L,alg}(L(s)) \in \mathcal{B}_L$.
– L'idéal $\mathcal{B}_L$ est calculable.
En réunissant les deux points, cela nous permettra de donner un algorithme de calcul de $b_{L,alg}$.

b_L sur un corps $\mathbf{k}$

On se donne un corps $\mathbf{k}$ quelconque et on suppose que les f_j sont dans $\mathbf{k}[x]$. Considérons l'idéal de $\mathbf{A}_{n+p}(\mathbf{k})$ engendré par :

$$t_j - f_j,\ j = 1, \ldots, p \text{ et } \partial_{x_i} + \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \partial_{t_j},\ i = 1, \ldots, n.$$

Nous avons vu que si $\mathbf{k} = \mathbf{C}$ et si on considère l'idéal de $\mathcal{D}_{n+p}$ engendré par ces éléments alors il est maximal et est l'annulateur de f^s. Dans le cas qui nous intéresse ici, c'est également vrai (la preuve étant très semblable). On note donc I l'idéal de $\mathbf{A}_{n+p}(\mathbf{k})$ engendré par les éléments précédents. L'idéal I est alors l'annulateur de f^s dans $\mathbf{A}_{n+p}(\mathbf{k})$.

Soit $L \in \mathcal{U}_V$ entière donnée. Nous avons un premier lemme qui va nous permettre de (re)définir les polynômes b_L :

LEMME 3.8. *Soit $c(s)$ un polynôme de $\mathbf{k}[s_1, \ldots, s_p]$, alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes.*

(1) Il existe $P \in V^L_{<0}(\mathbf{A}_{n+p}(\mathbf{k}))$ tel que $c(s)f^s = Pf^s$.

(2) $c(-\partial_t t)$ appartient à $gr^L(I) \cap \mathbf{k}[-\partial_t t]$.

Démonstration. Supposons que $c(s)$ vérifie la première propriété. Notons $Q = c(-\partial_t t) - P$ qui est alors dans I. Il est facile de voir que $c(-\partial_t t) = \sigma^L(Q) \in \mathrm{gr}^L(I)$. Réciproquement supposons $c(-\partial_t t)$ dans $\mathrm{gr}^L(I)$. Puisque $c(-\partial_t t)$ est L-homogène d'ordre 0, il existe $Q \in I$ tel que $c(-\partial_t t) = \sigma^L(Q)$. Notons $P = c(-\partial_t t) - Q$. Alors $P = \sigma^L(Q) - Q$, par conséquent P appartient à $V^L_{<0}(\mathbf{A}_{n+p}(\mathbf{k}))$ et vérifie la relation $c(s)f^s = Pf^s$. $\square$

DEFINITION. *On note $\mathcal{B}_L \subset \mathbf{k}[s_1, \ldots, s_p]$ l'idéal des $c(s)$ qui vérifient l'une des deux propriétés précédentes.*

Dans le cas où $\mathbf{k} = \mathbf{C}$, voici un point important à voir (même s'il est évident) :

$$b_{L,alg}(L(s)) \in \mathcal{B}_L.$$

Maintenant dans le cas où $\mathbf{k}$ est quelconque on définit b_L (le terme *alg* est superflu) comme le générateur unitaire des $b(\lambda) \in \mathbf{k}[\lambda]$ qui vérifient $b(L(s)) \in \mathcal{B}_L$. Le but de ce paragraphe et du suivant est de montrer que b_L est non nul et à racines rationnelles.

REMARQUE. *Bien que cela ne nous sera pas utile, il est possible (sur $\mathbf{C}$) de définir l'idéal $\mathcal{B}_{L,an,x_0}$ pour lequel nous aurions $b_{L,an,x_0}(L(s)) \in \mathcal{B}_{L,an,x_0}$. Nous aurions des résultats très similaires à ceux connus au sujet des idéaux de Bernstein-Sato algébriques et analytiques. Par exemple, la preuve de la proposition 3.4 nous permettrait de montrer que l'intersection des idéaux $\mathcal{B}_{L,an,x_0}$ est $\mathcal{B}_{L,alg}$. Nous aurions aussi un résultat de constructibilité du type de la proposition 3.7.*

Nous avons un résultat de finitude concernant les idéaux $\mathcal{B}_L$:

LEMME 3.9. *Soit σ un cône de l'éventail de Gröbner associé à $h(I)$. Alors pour tout $L \in \sigma$, l'idéal $\mathcal{B}_L$ est constant.*

Ceci découle du fait que $\mathrm{gr}^L(I)$ est constant si $\mathrm{gr}^L(h(I))$ l'est et du point 2 du lemme précédent. Une conséquence de ceci est qu'il y a un nombre fini de $\mathcal{B}_L$ différents.

Voici un autre résultat qui répond à une question naturelle que voici : Soit b_{f_j} le polynôme de Bernstein de la fonction f_j. Que peut on dire de $\mathcal{B}_{V_j}$ et b_{f_j} ? Eh bien non seulement le polynôme $b_{f_j}(s_j)$ appartient à l'idéal $\mathcal{B}_{V_j}$ mais il est égal à $b_{V_j}(s_j)$.

PROPOSITION 3.10. *Les polynômes b_{f_j} et b_{V_j} sont égaux.*

DÉMONSTRATION. Etant donné un polynôme b d'une variable, il suffit de montrer l'équivalence suivante :

$$b(s_j) \in \mathcal{B}_{V_j} \iff b(s_j)f_j^{s_j} \in \mathbf{A}_n(\mathbf{k})[s_j]f_j^{s_j+1}.$$

Pour simplifier, on fait la preuve avec $j = 1$.
$\Leftarrow$:
Soit $P(s_1) \in \mathbf{A}_n(\mathbf{k})[s_1]$ tel que $b(s_1)f_1^{s_1} = P(s_1)f^{s_1+1}$. Nous savons que $P(s_1)f_1^{s_1+1} = P(-\partial_{t_1}t_1)t_1f_1^{s_1}$. Il est aussi facile de voir que $P(-\partial_{t_1}t_1)t_1 = t_1P(-\partial_{t_1}t_1 - 1)$. Notons $Q(s_1) = P(s_1 - 1)$. Ecrivons

$$Q(s_1) = \sum_{\beta k} s_1^k p_{\beta k}(x)\partial_x^\beta.$$

Nous allons montrer par récurrence sur la longueur $|\beta|$ de β que pour tout $\beta \in \mathbf{N}^n$, on a :

$$(\star) \qquad \partial_x^\beta \cdot f_1^{s_1} \cdots f_p^{s_p} \in (\partial_x^\beta \cdot f_1^{s_1})f_2^{s_2} \cdots f_p^{s_p} + V_{\leq 0}^{V_1}(\mathbf{A}_{n+p}(\mathbf{k})) \cdot f_1^{s_1} \cdots f_p^{s_p}.$$

Il est clair que si $\beta = (0, \ldots, 0)$ alors la relation $(\star)$ est vérifiée. Supposons que pour un β donné, $(\star)$ est vraie. Soit donc $R \in V_{\leq 0}^{V_1}(\mathbf{A}_{n+p}(\mathbf{k}))$ tel que $\partial_x^\beta \cdot f^s = (\partial_x^\beta \cdot f_1^{s_1})f_2^{s_2} \cdots f_p^{s_p} + R \cdot f^s$. Alors

$$\begin{aligned}
\partial_x^\beta \partial_{x_i} f^s &= \partial_{x_i} \cdot \Big((\partial_x^\beta \cdot f_1^{s_1})f_2^{s_2} \cdots f_p^{s_p}\Big) + \partial_{x_i}R \cdot f^s \\
&= \Big(\partial_{x_i} \cdot (\partial_x^\beta \cdot f_1^{s_1})\Big)f_2^{s_2} \cdots f_p^{s_p} \\
&\quad + \sum_{j=2}^p \big(\partial_x^\beta \cdot f_1^{s_1}\big)\frac{\partial f_j}{\partial x_i} s_j f_j^{-1} f_2^{s_2} \cdots f_p^{s_p} + \partial_{x_i}R \cdot f^s \\
&= \big(\partial_x^\beta \partial_{x_i} \cdot f_1^{s_1}\big)f_2^{s_2} \cdots f_p^{s_p} - \sum_{j=2}^p \big(\partial_x^\beta \cdot f_1^{s_1}\big)\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\partial_{t_j} \cdot f_2^{s_2} \cdots f_p^{s_p} + \partial_{x_i}R \cdot f^s \\
&= \big(\partial_x^\beta \partial_{x_i} \cdot f_1^{s_1}\big)f_2^{s_2} \cdots f_p^{s_p} - \big(\sum_{j=2}^p \frac{\partial f_j}{\partial x_i}\partial_{t_j}\big) \cdot \big((\partial_x^\beta \cdot f_1^{s_1})f_2^{s_2} \cdots f_p^{s_p}\big) \\
&\quad + \partial_{x_i}R \cdot f^s, \text{ car } \partial_{t_j} \text{ n'agit pas sur } \partial_x^\beta \cdot f_1^{s_1} \\
&= \big(\partial_x^\beta \partial_{x_i} \cdot f_1^{s_1}\big)f_2^{s_2} \cdots f_p^{s_p} - \Big((\sum_{j=2}^p \frac{\partial f_j}{\partial x_i}\partial_{t_j})(\partial_x^\beta - R)\Big) \cdot f^s + \partial_{x_i}R \cdot f^s \\
&= \big(\partial_x^\beta \partial_{x_i} \cdot f_1^{s_1}\big)f_2^{s_2} \cdots f_p^{s_p} - \big[(\sum_{j=2}^p \frac{\partial f_j}{\partial x_i}\partial_{t_j})(\partial_x^\beta - R) - \partial_{x_i}R\big] \cdot f^s.
\end{aligned}$$

On constate que l'opérateur entre crochets dans la dernière ligne est bien dans $V^{V_1}_{\leq 0}(\mathbf{A}_{n+p}(\mathbf{k}))$. Ce calcul montre que $Q(s_1)$ vérifie une relation du type $(\star)$, plus précisement on a :

$$Q(s_1)f^s = (Q(s_1)\cdot f_1^{s_1})f_2^{s_2}\cdots f_p^{s_p} + Rf^s,$$

avec $R \in V^{V_1}_{\leq 0}(\mathbf{A}_{n+p}(\mathbf{k}))$. Par conséquent, en multipliant par t_1 la relation précédente, on obtient : $b(s_1)f^s = Tf^s$ avec $T \in V^{V_1}_{<0}(\mathbf{A}_{n+p}(\mathbf{k}))$.
$\Rightarrow$:
Soit $P \in V^{V_1}_{-1}(\mathbf{A}_{n+p}(\mathbf{k}))$ tel que $b(s_1)f^s = Pf^s$. Ecrivons $P = Q_1 + Q_2\partial_{t_2} + \cdots + Q_p\partial_{t_p}$ avec $Q_1 \in \mathbf{A}_n(\mathbf{k}) \otimes V^{V_1}_{-1}(\mathbf{k}[t_1, t_2, \ldots, t_p]\langle\partial_{t_1}\rangle)$. Modulo I, on peut supposer que Q_1 ne dépend pas de $t_2, \ldots, t_p$. Autrement dit il est dans $V^{V_1}_{-1}(\mathbf{A}_{n+1})$. Utilisant l'action de ∂_{t_j} sur f^s, on obtient :

$$b(s_1)f_1^{s_1}\cdots f_p^{s_p} = (Q_1 - Q_2 f_2^{-1}s_2 - \cdots - Q_p f_p^{-1}s_p)f_1^{s_1}\cdots f_p^{s_p}.$$

Faisons $s_2 = \cdots = s_p = 0$ dans cette équation. Le résultat est que $b(s_1)f_1^{s_1}$ appartient à $(V_1)_{-1}(\mathbf{A}_{n+1})f^s$. En utilisant les relations $t_1 f_1^{s_1} = f_1^{s_1+1}$ et $-\partial_{t_1}t_1 f_1^{s_1} = s_1 f_1^{s_1}$, on montre que $b(s_1)f_1^{s_1}$ appartient à $\mathbf{A}_n[s_1]f_1^{s_1+1}$. $\square$

REMARQUE. *Cette proposition est encore vraie dans le cadre analytique (la preuve est la même).*

Calcul de $\mathcal{B}_L$ et b_L

Nous allons donner un algorithme de calcul du polynôme b_L. Dans un premier temps nous calculons $\mathrm{gr}^L(I)$. Puis nous donnons un algorithme qui permet de calculer l'intersection entre un idéal J (ici $J = \mathrm{gr}^L(I)$) de $\mathbf{A}_{n+p}$ et le sous anneau $\mathbf{k}[s] = \mathbf{k}[-\partial_t t]$ ce qui nous fournit un algorithme de calcul de $\mathcal{B}_L$. On verra ainsi que $\mathcal{B}_L$ se calcul par un simple processus d'élimination. Ensuite par le changement de coordonnées $(s'_1, \ldots, s'_p) = (s_1, \ldots, s_{i_0-1}, L(s), s_{i_0+1}, \ldots, s_p)$, le calcul de b_L revient à éliminer les variables autres que s'_{i_0}.

Soient $y_1, \ldots, y_p$ des indéterminées. On note $\mathbf{A}_{n+p}(\mathbf{k})[y] = \mathbf{A}_{n+p}(\mathbf{k})\otimes_{\mathbf{k}}\mathbf{k}[y_1, \ldots, y_p]$. Soit $P \in \mathbf{A}_{n+p}(\mathbf{k})$, on définit $h^V(P) \in \mathbf{A}_{n+p}(\mathbf{k})[y]$ de la façon suivante. On écrit $P = \sum_{\mu\nu} p_{\mu\nu}(x, \partial_x)t^\mu\partial_t^\nu$. On note $d_j = \mathrm{ord}^{V_j}(P)$ et $d = (d_1, \ldots, d_p) \in \mathbf{Z}^p$. On pose alors

$$h^V(P) = \sum_{\mu\nu} p_{\mu\nu}(x, \partial_x)t^\mu\partial_t^\nu y^{d-(\nu-\mu)}.$$

Soient $y' = (y'_1, \ldots, y'_p)$ un nouveau système de variables. On notera $\mathbf{A}_{n+p}(\mathbf{k})[y, y'] = \mathbf{A}_{n+p}(\mathbf{k})[y] \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}[y']$.

Soit $P \in \mathbf{A}_{n+p}(\mathbf{k})$, on définit $\psi(P)(s) \in \mathbf{A}_n(\mathbf{k})[s_1, \ldots, s_p]$ comme suit. Pour $j = 1, \ldots, p$, notons

$$S_j = \begin{cases} t_j^{\mathrm{ord}^{V_j}(P)} & \text{si } \mathrm{ord}^{V_j}(P) \geq 0 \\ \partial_{t_j}^{-\mathrm{ord}^{V_j}(P)} & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'élément $S_1 \cdots S_p P$ est alors d'ordre exactement $(0, \ldots, 0)$ par rapport à V. Soit alors $\psi(P)(s)$ définit par :

$$\psi(-\partial_t t) = \sigma^V(S_1 \cdots S_p P).$$

ALGORITHME 3.11 (calcul de $\mathcal{B}_L$ et b_L).

(1) *Soit $g_1, \dots, g_r$ une $<_L$-base standard de I alors l'ensemble $\{\sigma^L(g_1), \dots, \sigma^L(g_r)\}$ engendre $gr^L(I)$. (Notons qu'une telle base standard s'obtient algorithmiquement à partir des $n+p$ générateurs qui définissent I.)*

(2) *Soit J un idéal de $\mathbf{A}_{n+p}(\mathbf{k})$, on cherche $J \cap \mathbf{k}[s]$.*
Soient $q_1, \dots, q_r$ un système de générateurs de J.
Soit K l'idéal de $\mathbf{A}_{n+p}(\mathbf{k})[y, y']$ engendré par l'ensemble $\{h^V(q_i), i = 1, \dots, r\} \cup \{1 - y_j y'_j, j = 1, \dots, p\}$.
Soit alors $G_1, \dots, G_l$ une base standard de K par rapport à un ordre qui privilègie d'abord le degré total en y, y' puis le degré total en x, ∂_x. Quitte à renuméroter, soient $G_1, \dots, G_k$ les G_i indépendants de y, y', x, ∂_x.
L'idéal $J \cap \mathbf{k}[s]$ est alors engendré par $\{\psi(G_1), \dots, \psi(G_k)\}$.
(C'est ainsi qu'on peut calculer $\mathcal{B}_L$.)

(3) *Notons F un système fini de générateurs de $\mathcal{B}_L$.*
Ecrivons $L = d_1V_1 + \cdots + d_pV_p$ (rappelons que les d_i sont entiers). Puisque $L \neq 0$, il existe i_0 tel que d_{i_0} soit non nul. Pour chaque $b(s) \in F$, soit $b'(s'_1, \dots, s'_p) \in \mathbf{k}[s']$ défini par la relation

$$b'(s_1, \dots, \underbrace{L(s)}_{i_0\text{-ième}}, \dots, s_p) = b(s).$$

Notons alors $F' \subset \mathbf{k}[s']$ l'ensemble des b' pour $b \in F$ et $< F' >$ l'idéal qu'il engendre.
Le générateur unitaire de l'idéal $< F' > \cap \mathbf{k}[s'_{i_0}]$ est alors le polynôme b_L.
(Ce dernier idéal s'obtient par un calcul de base standard de l'idéal $< F' >$ par rapport à un ordre qui élimine les variables $s'_1, \dots, s'_{i_0-1}, s'_{i_0+1}, \dots, s'_p$.)

Signalons que le processus utilisé au point 2 de cet algorithme est dû à T. Oaku et N. Takayama (voir par exemple [**O-T**]).

Jusqu'ici nous ne savons pas si l'idéal $\mathcal{B}_L$ et le polynôme b_L sont non nuls (sauf si $\mathbf{k} = \mathbf{C}$). Dans le paragraphe suivant, nous répondons à cette question.

1.3. ...sur un corps quelconque.

Notation :
Pour $f_1, \dots, f_p \in \mathbf{k}[x]$, et pour $\mathbf{K} \supset \mathbf{k}$, nous noterons $b_{L,\mathbf{k}}$ (resp. $b_{L,\mathbf{K}}$) le polynôme b_L "algébrique" sur $\mathbf{k}$ (resp. sur $\mathbf{K}$ puisque les f_j peuvent être vus dans $\mathbf{K}[x]$).

PROPOSITION 3.12. *Pour tout corps $\mathbf{k}$, le polynôme $b_{L,\mathbf{k}}$ est non nul et ses racines sont dans $\mathbf{Q}_{<0}$.*

Démonstration. Notons $\mathbf{K} = \mathbf{Q}(c_1, \dots, c_q)$ où les $c_i \in \mathbf{k}$ forment l'ensemble des coefficients des f_j. Il est clair que $b_{L,\mathbf{k}}$ divise $b_{L,\mathbf{K}}$ donc

(a): Si $b_{L,\mathbf{K}}$ est non nul alors $b_{L,\mathbf{k}}$ est non nul.

En examinant point par point l'algorithme qui permet de calculer $b_{L,\mathbf{k}}$, on constate que tous les calculs se font avec des coefficients dans $\mathbf{K}$, ainsi

(b): $b_{L,\mathbf{K}}$ et $b_{L,\mathbf{k}}$ égaux.

On peut inclure $\mathbf{K}$ dans $\mathbf{C}$, c'est-à-dire qu'il existe $e_1, \ldots, e_q \in \mathbf{C}$ et un monomorphisme de corps $\varphi : \mathbf{K} \to \mathbf{C}$ qui envoie c_i sur e_i.
Pour $j = 1, \ldots, p$, notons $f'_j \in \mathbf{C}[x]$ le polynôme obtenu en remplaçant c_i par e_i. Considérons alors les polynômes $b_{L,\mathbf{C}}$ et $b_{L,\varphi(\mathbf{K})}$ associés à l'application polynomiale $f' = (f'_1, \ldots, f'_p)$. Nous savons par le premier paragraphe que $b_{L,\mathbf{C}}$ est non nul et que ses racines sont dans $\mathbf{Q}_{<0}$. L'analyse qui a été faite ci-dessus pour $\mathbf{k}$ et $\mathbf{K}$ s'applique encore à $\mathbf{C}$ et $\varphi(\mathbf{K})$ donc

(c): $b_{L,\varphi(\mathbf{K})}$ est non nul et ses racines sont dans $\mathbf{Q}_{<0}$.

On peut étendre de manière naturelle φ de $\mathbf{A}_{n+p}(\mathbf{K})$ à $\mathbf{A}_{n+p}(\mathbf{C})$ et de $\mathbf{K}[x, s, \frac{1}{f_1 \cdots f_p}]f^s$ à $\mathbf{C}[x, s, \frac{1}{f'_1 \cdots f'_p}]f'^s$ en isomorphisme d'anneau pour la première flèche et de module pour la deuxième. On voit alors que $b_{L,\mathbf{K}}$ s'obtient en remplaçant e_i par c_i dans l'ecriture de $b_{L,\varphi(\mathbf{K})}$ ainsi $b_{L,\mathbf{K}}$ est non nul et puisque, d'après (c), $b_{L,\varphi(\mathbf{K})}$ est à coefficient dans $\mathbf{Q}$, nous pouvons conclure que $b_{L,\varphi(\mathbf{K})} = b_{L,\mathbf{K}}$. Il ne reste plus qu'à invoquer (a) et (b) pour conclure. □

2. Polynôme de Bernstein-Sato algébrique rationnel sur un corps quelconque

Dans cette section, on se propose de montrer le

THEOREME 3.13. *Soit $v \in \mathbf{N}^p$ Soient $f_1, \ldots, f_p \in \mathbf{k}[x]$ alors il existe $b(s) \in \mathbf{Q}[s_1, \ldots, s_p] \smallsetminus (0)$ et il existe $P(s) \in \mathbf{A}_n(k)[s]$ tels que :*

$$b(s)f^s = P(s)f^{s+v}.$$

Pour ce faire, nous aurons besoin de deux résultats.
On note comme précédement I l'annulateur de f^s dans $\mathbf{A}_{n+p}(\mathbf{k})$ et $M = \mathbf{A}_{n+p}(\mathbf{k})/I$.

PROPOSITION 3.14.

(1) Notons $\mathcal{E}_V(h(I))$ l'éventail de Gröbner algébrique de $h(I) \subset \mathbf{A}_{n+p}(\mathbf{k})\langle z\rangle$ associé à la filtration $V(\mathbf{A}_{n+p}(\mathbf{k}))$. Si on note $\mathcal{L}(\mathcal{E}_V(h(I)))$ les éléments primitifs de son 1-squelette alors pour tout w de $\mathbf{Z}^p$,

$$\overline{V}_w(M) = \bigcap_{L \in \mathcal{L}(\mathcal{E}_V(h(I)))} V^L_{L(w)}(M).$$

(2) Il existe $\kappa \in \mathbf{N}^p$ tel que pour tout $w \in \mathbf{Z}^p$,

$$V_w(M) \subset \overline{V}_w(M) \subset V_{w+\kappa}(M).$$

Pour le premier point, la preuve se fait presque mot à mot comme dans le cas analytique traité dans le chapitre précédent. Pour le deuxième point et pour $p = 2$, la preuve analytique du chapitre précédent s'adapte sans difficultés au cas algébrique. Pour le cas $p \geq 3$, nous nous référons au résultat de C. Sabbah dont la preuve dans le cas algébrique ne semble pas poser de difficultés supplémentaires.

LEMME 3.15. *Pour L entière dans $\mathcal{U}_V$, le polynôme b_L vérifie : pour tout $k \in \mathbf{Z}$, $b_L(L(-\partial_t t) - k)V^L_k(M) \subset V^L_{k-1}(M)$.*

La preuve de ce lemme a été faite dans le chapitre précédent, il s'agit d'un calcul facile.

Maintenant considérons le polynôme suivant :

$$b(s_1,\dots,s_p) = \prod_{L\in\mathcal{L}(\mathcal{E}_V(h(I)))} \prod_{-L(v+\kappa)<k\leq 0} b_L(L(s)-k).$$

D'après ce qui a été montré plus haut, ce polynôme est non nul et appartient à $\mathbf{Q}[s]$. Par la proposition et le lemme précédents,

$$b(s)f^s = Qf^s,$$

avec $Q = Q't_1^{v_1}\cdots t_p^{v_p}$ et $Q' \in \mathbf{A}_n(\mathbf{k})[-\partial_t t][t]$. En utilisant le fait que $t_j - f_j$ annule f^s, on obtient $Qf^s = P(s)f^{s+v}$ avec $P(s) \in \mathbf{A}_n(\mathbf{k})[s]$. Le théorème précédent est démontré.

Pour finir, disons quelques mots de conclusion. La raison pour laquelle ce théorème est intéressant (outre le résultat lui-même) est que l'on s'en servira dans la suite pour fabriquer un polynôme de Bernstein générique rationnel sur n'importe quel corps $\mathbf{k}$.

Nous tenons aussi à faire remarquer que dans le cas où $p = 2$, il est possible de tout calculer. C'est-à-dire qu'il est possible de construire en un nombre fini d'étapes l'éventail de Gröbner de $h(I)$, de trouver un κ qui réponde au point 2 de la proposition ci-dessus et comme nous l'avons vu de calculer pour chaque L de $\mathcal{L}(\mathcal{E}_V(h(I)))$ le polynôme b_L.

Il est intéressant de demander si l'idéal $\mathcal{B}^v(f)$ possède des générateurs de la forme du b construit plus haut. Autrement dit :

QUESTION (voir A.1 dans l'annexe)**.** *Etant donné v, l'idéal $\mathcal{B}^v$ est-il engendré par des polynômes s'écrivant $\prod_L \prod_{k\geq 0} b_L(L(s)+k)$?*

La réponse est non en général comme nous le verrons dans l'annexe. Néanmoins on peut se demander si tout idéal $\mathcal{B}^v$ admet des générateurs rationnels : la question reste ouverte.

Deuxième partie

Etude générique des polynômes de Bernstein-Sato et des éventails de Gröbner

CHAPITRE 4

Spécialisation des bases de Gröbner

Dans ce court chapitre, nous allons présenter les outils nécessaires aux deux chapitres suivants. Voici le problème que nous allons aborder. On se donne un idéal J de $\mathbf{A}_n(\mathbf{k})[a]$ (resp. de $\mathbf{A}_n(\mathbf{C})\{a\} = \mathbf{A}_n(\mathbf{C})\otimes\mathbf{C}\{a\}$) k étant un corps et $a = (a^1, \ldots, a^m)$ un système de variables mais vues comme des paramètres. Ces paramètres seront dit algébriques ou analytiques selon que J dépendant analytiquement ou polynomialement de a. Soit $V = V(Q)$ une variété algébrique de $\mathbf{k}^m$ (resp. un germe de variétés analytiques en 0 de $\mathbf{C}^m$) donnée par les zéros d'un idéal Q que nous supposerons premier dans $\mathbf{k}[a]$ (resp. dans $\mathbf{C}\{a\}$). Pour tout $a_0 \in \mathbf{k}^m$ et pour $f \in \mathbf{A}_n(\mathbf{k})[a]$, on notera $f_{|a_0} \in \mathbf{A}_n(\mathbf{k})$ le spécialisé de f en a. Voici une définitions plus précise : on écrit $f = \sum_{\alpha\beta} c_{\alpha\beta}(a)x^\alpha\partial_x^\beta$, on pose alors $f_{|a_0} = \sum_{\alpha\beta} c_{\alpha\beta}(a_0)x^\alpha\partial_x^\beta$. Pour un idéal $J \subset \mathbf{A}_n(\mathbf{k})[a]$, on note $J_{|a}$ le spécialisé de J en $a \in \mathbf{k}^m$ qui n'est rien d'autre que l'ensemble des spécialisés des éléments de J (ils forment un idéal). En ce qui concerne la spécialisation d'un idéal à coefficients dans $\mathbf{C}\{a\}$, nous verrons dans un paragraphe qui lui est consacré comment on peut se contenter de spécialiser un représentant de J en tout point d'un petit voisinage de 0 dans $\mathbf{C}^m$.

Pour des raisons techniques (que nous comprendrons plus facilement dans la suite), nous supposerons que J contient Q. Soit maintenant G une base de Gröbner de J par rapport à un certain ordre $\prec$ sur $\mathbf{N}^{2n+m}$ dont on note $<$ la restriction à $\mathbf{N}^{2n}$ (tous les ordres sont supposés bons dans le cas algébrique et seront des ordres avec lesquels on peut diviser dans le cas analyique).

Il est naturel de se demander comment se comportent les spécialisés $G_{|a}$ de G lorsque a parcourt V. Forment-ils une base de Gröbner de $J_{|a}$ par rapport à $<$? C'est la question à laquelle nous allons répondre. Décrivons le déroulement de ce chapitre.

Dans un premier temps, nous allons introduire un certain nombre de notations qui malgrès leur relative lourdeur seront nécessaires pour ce chapitre et pour les deux suivants.

Dans un deuxième temps, nous répondrons à la question de départ dans ce que l'on va appeler le lemme de spécialisation faible.

Pourquoi faible ? Car nous donnons dans un troisième temps une version qualifiée de forte de ce lemme. J'ai décidé de séparer les deux versions car la première est me semble-t-il plus facile à appréhender et finalement même si elle ne constitue qu'un cas particulier de son homologue "forte" elle est en soi un résultat intéressant.

Pour être plus précis, nous verrons que la spécialisation faible consiste en une spécialisation aux points fermés alors que la version forte est une spécialisation en tout point d'un sous-schéma de $\mathbf{k}^m$ (resp. $(\mathbf{C}^m, 0)$) et nous verrons que la version forte de la spécialisation d'un idéal dépendant de $\mathbf{C}\{a\}$ se définit de façon plus naturelle que son homologue faible.

Nous finirons ce chapitre par des résultats auxiliares (lemme de réduction et application aux polynômes de Hilbert) qui nous seront utiles dans la suite.

A ma connaissance, une des premières références concernant et contenant les lemmes de spécialisations fortes et faibles (dans le cas algébrique) est [**Lej-P**] (citons aussi [**Lej-P2**] qui est la version publiée de la précédente).

1. Notations génériques

Dans le souci d'être aussi général que possible, donnons nous un anneau $\mathcal{C}$ qui soit commutatif, unitaire et intègre (il faudra penser à $\mathcal{C}$ comme l'anneau des coefficients, pour nous ce sera $\mathbf{k}[a]$ dans le cas algébrique et $\mathbf{C}\{a\}$ dans le cas analytique). On écrira $\mathbf{A}_n(\mathcal{C})$ pour désigner l'anneau des opérateurs différentiels à coefficients dans $\mathcal{C}$.

On se donne un bon ordre $<$ compatible avec l'addition sur $\mathbf{N}^{2n}$, on se donne aussi $f \in \mathbf{A}_n(\mathcal{C})$ qu'on écrit :

$$f = \sum_{\alpha\beta} c_{\alpha\beta} x^\alpha \partial_x^\beta,$$

avec $c_{\alpha\beta} \in \mathcal{C}$.
On note $\mathcal{N}^{gen}(f)$ et on appelle **nuage générique** de f l'ensemble des $(\alpha, \beta) \in \mathbf{N}^{2n}$ tels que $c_{\alpha\beta}$ est non nul. Si aucune confusion n'est possible, on notera $c_{\alpha\beta}(f)$ l'élément $c_{\alpha\beta}(a)$ de l'écriture précédente, ce sera le coefficient de f indexé par (α, β).
On notera aussi $coef(f) \subset \mathcal{C}$ **l'ensemble des coefficients de** f.
On note $\exp_<(f)$ le maximum pour $<$ de $\mathcal{N}^{gen}(f)$. S'il n'y a pas de confusion on dit que c'est **l'exposant privilégié générique** de f. Le coefficient $c_{\exp_<(f)}(f)$ jouera un rôle suffisement important dans la suite nous l'appelons le **coefficient privilégié générique** de f et on le note $\mathrm{cp}_<(f)$. Rappelons qu'il vit dans $\mathcal{C}$. On notera aussi $\mathrm{mp}_<(f) = (x, \partial_x)^{\exp_<(f)}$ le **monôme privilégié générique** de f. Enfin on note $\mathrm{tp}_<(f) = \mathrm{cp}_<(f)\mathrm{mp}_<(f)$ le **terme privilégié générique** de f.

Maintenant, soit Q un idéal premier de $\mathcal{C}$. Soit J un idéal de $\mathbf{A}_n(\mathcal{C})$ contenant Q. Nous allons définir les notions d'escalier générique et de base standard générique (sur $V(Q)$) de J par rapport à $<$.

On définit **l'escalier générique** de J (sur $V(Q)$) par rapport à $<$ par :

$$\exp_<(J) = \{\exp_<(f)\,;\, f \in J \text{ et } \mathrm{cp}_<(f) \notin Q\}.$$

Il est clair que cet ensemble est un escalier, en ce sens qu'il est stable par translation dans $\mathbf{N}^{2n}$. Ainsi par le lemme de Dickson, cet escalier admet un système fini de générateurs.

Soit G un sous-ensemble (fini) de J, on dit que G **est une base standard générique** (sur $V(Q)$) de J par rapport à $<$ si :

$$\forall g \in G,\ \mathrm{cp}_<(g) \notin Q \text{ et } \exp_<(J) = \bigcup_{g\in G} (\exp_<(g) + \mathbf{N}^{2n}).$$

Dans ce qui suit, nous allons énoncer le premier lemme de spécialisation, mais avant cela nous apportons une petite précision sur la notion de spécialisation dans le cas analytique (où $\mathcal{C} = \mathbf{C}\{a\}$).

2. Lemmes de spécialisation

2.1. Spécialisation analytique. Dans le cas algébrique (évoqué plus haut) il n'y a aucun problème à définir le spécialisé d'un idéal $J \subset \mathbf{A}_n(\mathbf{k})[a]$ en un point $a \in \mathbf{k}^m$. C'est simplement l'ensemble des spécialisés $f_{|a}$ de f en a avec f qui parcourt J. Mais lorsque J est un idéal de $\mathbf{A}_n(\mathbf{C})\{a\}$, il faut être plus précis. C'est le but de ce paragraphe.

Dans le souci d'être général soit A un anneau (il faut penser à $A = \mathbf{A}_n(\mathbf{C})$ ou bien $A = \mathbf{C}[x_1, \ldots, x_n]$, en tout cas A est une $\mathbf{C}$-algèbre de type fini). Soit J un idéal (à gauche) de $A\{a\} = A \otimes_{\mathbf{C}} \mathbf{C}\{a\}$. Dans ce qui suit, nous allons définir, non pas le spécialisé de J en a mais une application nommée spécialisation. Ce sera un germe d'application sp_J de $(C^m, 0)$ dans l'ensemble des idéaux de A.

Pour un ouvert U de $\mathbf{C}^m$, on note $\mathcal{O}(U)$ les fonctions analytiques de U vers $\mathbf{C}$.

Soit $\mathcal{R}$ (sous-entendu l'ensemble des représentants d'un idéal de $A\{a\}$) défini comme l'ensemble des couples (F, U) où U est un voisinage ouvert de 0 dans $\mathbf{C}^m$ et F est un sous-ensemble fini de $A \otimes \mathcal{O}(U)$.
Soit $\sim$ la relation définie sur $\mathcal{R}$ par :
$(F_1, U_1) \sim (F_2, U_2)$ si et seulement si il existe un ouvert U tel que $0 \in U \subset U_1 \cap U_2$ et tel que les idéaux $< F_{1|U} >$ et $< F_{2|U} >$ de $A \otimes \mathcal{O}(U)$ soient égaux (la notation $F_{|U}$ désigne l'ensemble des restrictions $f_{|U}$ de f à U lorsque f parcourt F).
Clairement, la relation $\sim$ est une relation d'équivalence dont l'ensemble des classes s'identifie naturellement à l'ensemble des idéaux de $A\{a\}$.

Si E est un ensemble, on note $\mathcal{F}((\mathbf{C}^m, 0), E)$ l'ensemble des germes d'applications de $(\mathbf{C}^m, 0)$ dans E.

Etant donné un idéal J de $A\{a\}$. On définit $sp_J \in \mathcal{F}((\mathbf{C}^m, 0), \{\text{idéaux de } A\})$ comme le germe dont un représentant est :

$$\begin{array}{rcl} U_1 & \rightarrow & \{\text{idéaux de } A\} \\ a & \mapsto & < F_{1|a} >, \end{array}$$

où (F_1, U_1) est un représentant de J.

Montrons qu'une telle application est bien définie. Pour cela, soit (F_1, U_1) et (F_2, U_2) deux représentants de J. Soit alors (pour $i = 1, 2$) $\phi_i : U_i \rightarrow \{\text{idéaux de } A\}$ donnée par $\phi_i(a) =< F_{i|a} >$. Notons $F_1 = \{f_1, \ldots, f_{r_1}\}$ et $F_2 = \{g_1, \ldots, g_{r_2}\}$. Il n'est alors pas difficile de voir qu'il existe un voisinage $U \subset U_1 \cap U_2$ de $0 \in \mathbf{C}^m$ et il existe s_k^j et t_j^k dans $A \otimes \mathcal{O}(U)$ avec $j = 1, \ldots, r_1$ et $k = 1, \ldots, r_2$ tels que pour tout j et pour tout k :

$$f_{j\,|U} = \sum_{k=1}^{r_2} s_k^j g_{k|U} \text{ et } g_{k|U} = \sum_{j=1}^{r_1} t_j^k f_{j\,|U}.$$

Par conséquent, pour tout $a \in U$, les idéaux $< F_{1|a} >$ et $< F_{2|a} >$ sont égaux, i.e. $\phi_{1|U} = \phi_{2|U}$. Autrement dit ϕ_1 et ϕ_2 représentent le même germe. L'application sp_J est bien définie.
Maintenant que la spécilisation analytique est définie avec plus de rigueur, nous sommes en mesure d'énoncer le premier lemme de spécialisation.

2.2. Les énoncés.

2.2.1. *La version faible.* Nous allons énoncer le lemme de spécialisation faible dans le cas algébrique en faisant des remarques concernant le cas analytique mais les différentes assertions sont encore valables en écrivant respectivement $\mathbf{C}\{a\}$, $\mathbf{A}_n(\mathbf{C})\{a\}$ et $\mathbf{A}_n(\mathbf{C})$ à la place de $\mathbf{k}[a]$, $\mathbf{A}_n(\mathbf{k})[a]$ et $\mathbf{A}_n(\mathbf{k})$.
On se donne un idéal Q premier dans $\mathbf{k}[a]$. Soit J un idéal de $\mathbf{A}_n(\mathbf{k})[a]$ contenant Q. Soit G une base standard générique de J par rapport à $<$. Posons

$$h = \prod_{g \in G} \mathrm{cp}_<(g),$$

il s'agit d'un élément de $\mathbf{k}[a] \smallsetminus Q$.

LEMME 4.1 (de spécialisation faible)**.** *Pour tout* $a \in V(Q) \smallsetminus V(h)$*,*

$$\exp_<(J_{|a}) = \bigcup_{g \in G} (\exp_<(g_{|a}) + \mathbf{N}^{2n}).$$

REMARQUE 4.2 (Cas analytique)**.** *Au vu de ce qui a été dit dans le paragraphe précédent, il suffit de travailler avec des représentants et de prendre a dans un petit voisinage de* $0 \in \mathbf{C}^m$*.*

REMARQUE. – *Nous voyons que* $J =< Q >$ *si et seulement si* $G = \emptyset$ *auquel cas* $h = 1$ *(la notation* $< Q >$ *désigne l'idéal engendré par* Q*).*
– *Pour tout* $a \in V(Q) \smallsetminus V(h)$*, le spécialisé* $G_{|a}$ *de* G *en* a *est une base standard de* $J_{|a}$ *dont l'escalier* $\exp_<(J_{|a})$ *est constant égal à* $\exp_<(J)$*. Ceci justifie l'appellation de base standard générique et d'escalier générique sur* $V(Q)$*.*

Construction effective d'une base standard générique

En effet, nous avons vu l'existence théorique d'une $<$-base standard générique de J sur $V(Q)$ (par le lemme de Dickson) mais on peut se demander comment en construire une algorithmiquement. Dans ce paragraphe, nous allons répondre à cette question.

On se donne donc J un idéal de $\mathbf{A}_n(\mathbf{k})[a]$ (resp. $\mathbf{A}_n(\mathbf{C})\{a\}$) contenant un idéal premier Q de $\mathbf{k}[a]$ (resp. $\mathbf{C}\{a\}$) et $<$ un bon ordre sur $\mathbf{N}^{2n}$ compatible avec l'addition.
– Dans le cas algébrique, soit $<^{alg}$ un bon ordre sur $\mathbf{N}^m$ compatible avec l'addition (rappelons que a est un système de m variables).
– Dans le cas analytique, soit $<^{an}$ un ordre qui permette de faire des divisions dans $\mathbf{C}\{a\}$, par exemple :

$$\eta <^{an} \eta' \iff \begin{cases} |\eta| > |\eta'| \\ \text{ou}(|\eta| = |\eta'| \text{ et } \eta <^{alg} \eta'. \end{cases}$$

On définit un nouvel ordre $\prec$ sur $\mathbf{N}^{2n+m}$ par :

$$(\alpha, \beta, \eta) \prec (\alpha', \beta', \eta') \iff \begin{cases} (\alpha, \beta) < (\alpha', \beta') \\ \text{ou} \\ (\alpha, \beta) = (\alpha', \beta') \text{ et } \eta <_0 \eta', \end{cases}$$

où $<_0$ est égal à $<^{alg}$ dans le cas algébrique et $<^{an}$ dans le cas analytique.
Clairement, $\prec$ est un ordre compatible avec l'addition dans $\mathbf{N}^{2n+m}$; il est bon dans le cas algébrique et permet de faire des divisions dans le cas analytique. Maintenant soit $\tilde{G}$ une $\prec$-base standard minimal de J. Un tel ensemble peut se construire (du moins

dans le cas algébrique) effectivement si on connait un système fini de générateurs de l'idéal J (ceci se fait par l'algorithme de B. Buchberger). Avant d'aller plus loin, montrons que les trois assertions suivantes sont équivalentes pour tout $g \in \tilde{G}$ (on fait la preuve uniquement dans le cas algébrique).

(1) $g \in Q$.
(2) $g \in < Q >$.
(3) $\mathrm{cp}_<(g) \in Q$.

– Montrons $2 \Rightarrow 3$. Par hypothèse $g = \sum_i q_i(a) P_i$ où $q_i(a) \in Q$ et $P_i \in \mathbf{A}_n(\mathbf{k})[a]$. Ainsi
$$g = \sum_{\alpha\beta} \Big(\sum_i q_i(a) c_{\alpha\beta}(P_i) \Big) x^\alpha \partial_x^\beta.$$
Par identification, tous les coefficients de g sont dans Q, c'est le cas en particulier de $\mathrm{cp}_<(g)$.

– Montrons $3 \Rightarrow 1$. Ecrivons $g = \mathrm{cp}_<(g) x^\alpha \partial_x^\beta + \cdots$ où $(\alpha, \beta) = \exp_<(f)$. Ainsi, puisque $\mathrm{cp}_<(g) \in Q \subset J$:
$$\exp_\prec(g) = \exp_\prec(\mathrm{cp}_<(g)) + (\alpha, \beta, 0)$$
et
$$\exp_\prec(\mathrm{cp}_<(g)) = \exp_\prec(g') + (\alpha_1, \beta_1, \eta_1),$$
avec $g' \in \tilde{G}$. Par minimalité de $\tilde{G}$, on a $(\alpha, \beta, 0) = (\alpha_1, \beta_1, \eta_1) = (0, 0, 0)$. Par conséquent $g = \mathrm{cp}_<(g) \in Q$. L'implication $1 \Rightarrow 2$ étant triviale, la preuve est terminée.

AFFIRMATION 4.3. *Considérons $G = \tilde{G} \setminus Q$. Alors G est une $<$-base standard générique de G sur $V(Q)$.*

Avant d'écrire la preuve, remarquons qu'il est possible (toujours dans le cas algébrique) d'obtenir effectivement G à partir de $\tilde{G}$, il suffit pour cela d'avoir une base standard de Q par rapport à $<_0$ et de diviser chaque élément de $\tilde{G} \cap \mathbf{k}[a]$ par cette base pour savoir s'il appartient à Q.

Démonstration. On écrit la preuve dans le cas algébrique, en effet la seule chose dont nous aurons besoin est une division dans $\mathbf{k}[a]$ (resp. $\mathbf{C}\{a\}$).
Par les trois équivalences décrites plus haut, pour tout $g \in G$, le coefficient $\mathrm{cp}_<(g)$ n'appartient pas à Q. Il ne reste donc plus qu'à montrer que pour tout $f \in J$ tel que $\mathrm{cp}_<(f) \notin Q$, il existe $g \in G$ tel que $\exp_<(f) \in \exp_<(g) + \mathbf{N}^{2n}$. Par élimination, l'ensemble $G \cap \mathbf{k}[a]$ est une $<^{alg}$-base standard de $J \cap \mathbf{k}[a]$. Nous allons traiter deux cas :

(1) Cas où Q est inclus strictement dans $J \cap \mathbf{k}[a]$: dans ce cas, il existe $g \in \tilde{G}$ qui soit dans $\mathbf{k}[a] \setminus Q$. Il est alors facile de voir que G est une $<$-base standard générique de J sur $V(Q)$.
(2) Cas où $Q = J \cap \mathbf{k}[a]$.
Dans ce cas, $\tilde{G} \cap Q = \tilde{G} \cap \mathbf{k}[a]$ et cet ensemble est une $<^{alg}$-base standard de Q. Soit $f \in J$ tel que $\mathrm{cp}_<(f) \notin Q$. Ecrivons $f = \mathrm{cp}_<(f)\mathrm{mp}_<(f) + f'$ et divisons $\mathrm{cp}_<(f)$ par $\tilde{G} \cap Q$ par rapport à $<^{alg}$. Notons r le reste (qui est non nul). Posons
$$f_1 = r \cdot \mathrm{mp}_<(f) + f'.$$

On a alors : $\exp_<(f) = \exp_<(f_1)$, $f_1 \in J$ et $\mathrm{cp}_<(f_1) = r \notin Q$. Maintenant, par définition de $\tilde{G}$, il existe $g \in \tilde{G}$ tel que $\exp_\prec(f_1) \in \exp_\prec(g) + \mathbf{N}^{2n+m}$ donc aussi $\exp_<(f_1) \in \exp_<(g) + \mathbf{N}^{2n}$. Par l'absurde, si $\mathrm{cp}_<(g) \in Q$ ou encore (par la série d'équivalences précédente) si $g \in Q$ alors $\exp_{<^{alg}}(r) \in \exp_{<^{alg}}(g) + \mathbf{N}^m$ ce qui est impossible par construction de r. Bilan :

$$\exp_<(f) = \exp_<(f_1) \in \exp_<(g) + \mathbf{N}^{2n},$$

avec $g \in \tilde{G} \smallsetminus Q = G$.

□

Nous n'écrirons pas de preuve directe du lemme de spécialisation faible car comme nous le verrons, ce lemme est un cas particulier du lemme de spécialisation forte qui suit.

2.2.2. *La version forte.* Afin d'énoncer le lemme suivant, nous avons besoin d'introduire quelques notations supplémentaires.
Soit P un idéal premier de $\mathbf{k}[a]$ (resp. $\mathbf{C}\{a\}$). On note $[\cdot]_P$ la classe d'un élément de $\mathbf{k}[a]$ (resp. $\mathbf{C}\{a\}$) dans le quotient $\mathbf{k}[a]/P$ (resp. $\mathbf{C}\{a\}/P$). On note $\mathbf{k}(P)$ (resp. $\mathbf{C}(P)$) le corps des fractions de $\mathbf{k}[a]/P$ (resp. $\mathbf{C}\{a\}/P$). Ce corps peut être vu comme le corps des fractions rationnelles (resp. des fonctions méromorphes) à pôle ne contenant pas $V(P)$. Pour $c \in \mathbf{k}[a]$, on notera $\sigma_P(c) = \frac{[c]_P}{1} \in \mathbf{k}(P)$ (la définition étant identique dans $\mathbf{C}\{a\}$). On prolonge cette définition aux éléments de $\mathbf{A}_n(\mathbf{k})[a]$ (resp. $\mathbf{A}_n(\mathbf{C})\{a\}$) de la façon suivante : on écrit $g = \sum_{\alpha\beta} c_{\alpha\beta}(g) x^\alpha \partial_x^\beta$ et on définit $\sigma_P(g) \in \mathbf{A}_n(\mathbf{k}(P))$ (resp. $\mathbf{A}_n(\mathbf{C}(P))$) par :

$$\sigma_P(g) = \sum_{\alpha\beta} \frac{[c_{\alpha\beta}(g)]_P}{1} x^\alpha \partial_x^\beta.$$

Maintenant si J est un idéal de $\mathbf{A}_n(\mathbf{k})[a]$ (resp. $\mathbf{A}_n(\mathbf{C})\{a\}$), on définit l'idéal $\sigma_P(J)$ comme l'idéal de $\mathbf{A}_n(\mathbf{k}(P))$ (resp. $\mathbf{A}_n(\mathbf{C}(P))$) engendré par les $\sigma_P(g)$ pour $g \in J$. C'est le spécialisé de J en P. Ceci nous montre que de ce point de vue, la spécialisation forte est plus facile à définir dans le cas analytique.

Enonçons le lemme de spécialisation forte dans $\mathbf{A}_n(\mathbf{k})[a]$ (les choses étant identiques dans $\mathbf{A}_n(\mathbf{C})\{a\}$). Les hypothèses de départ sont les mêmes que dans la version faible, à savoir la donnée d'un idéal J de $\mathbf{A}_n(\mathbf{k})[a]$ contenant un idéal premier Q de $\mathbf{k}[a]$, une $<$-base standard générique G de J et $h \in \mathbf{k}[a]$ défini comme précédement.

LEMME 4.4. *(de spécialisation forte) Pour tout idéal $P \subset \mathbf{k}[a]$ premier tel que $h \notin P \supseteq Q$,*

$$\exp_<(\sigma_P(J)) = \bigcup_{g \in G} (\exp_<(\sigma_P(g)) + \mathbf{N}^{2n}).$$

DÉMONSTRATION. Afin d'être aussi général que possible, nous allons travailler avec J dans $\mathbf{A}_n(\mathcal{C})$ où $\mathcal{C}$ est un anneau commutatif, intègre et unitaire (non nécessairement noethérien) ; on voit $\mathbf{A}_n(\mathcal{C})$ comme la $\mathcal{C}$ algèbre engendrée par les x_i et les ∂_{x_i} avec des relations de commutations identiques à celles de $\mathbf{A}_n(\mathbf{k})$ et où $\mathcal{C}$ est dans le centre de $\mathbf{A}_n(\mathcal{C})$. Pour nous $\mathcal{C}$ est égal à $\mathbf{k}[a]$ ou $\mathbf{C}\{a\}$ mais nous appliquerons aussi le lemme avec $\mathcal{C} = \mathcal{O}(U)$ où U est un petit voisinage ouvert connexe de 0 dans $\mathbf{C}^m$.
Comme au dessus, pour $P \subset \mathcal{C}$ premier, nous noterons $[\cdot]_P$ la classe dans $\mathcal{C}/P$ et

$\sigma_P(\cdot) = \frac{[\cdot]_P}{1}$ vu dans le corps des fractions de $\mathcal{C}/P$. Nous étendons ces définitions à un élément de $\mathbf{A}_n(\mathcal{C})$.

Avant d'entamer la preuve proprement dite, faisons une remarque. Pour tout $f \in \mathbf{A}_n(\mathcal{C})$, on a :

$$\exp_<(\sigma_P(f)) = \exp_<(f) \iff \mathrm{cp}_<(f) \notin P.$$

Ainsi pour tout P tel que $h \notin P$ et pour tout $g \in G$, on a :

$$\exp_<(\sigma_P(g)) = \exp_<(g).$$

Soit maintenant $f' \in \sigma_P(J) \smallsetminus 0$. Le but est de montrer l'existence d'un $g \in G$ tel que $\exp_<(f') \in \exp_<(g) + \mathbf{N}^{2n}$. Par définition, on peut écrire :

$$f' = \sum_i \frac{[\Gamma_i]_P}{[\gamma_i]_P} \frac{[f_i]_P}{1},$$

avec $\Gamma_i \in \mathbf{A}_n(\mathcal{C})$, $\gamma_i \in \mathcal{C} \smallsetminus Q$ et $f_i \in J$, par suite il est facile d'obtenir :

$$f' = \frac{[f]_P}{[\gamma]_P},$$

où $f \in J$ et $\gamma \in \mathcal{C} \smallsetminus Q$.
Puisque J contient Q, on peut supposer que $\mathrm{cp}_<(f)$ n'appartient pas à Q. Ainsi par définition de G, il existe $g \in G$ tel que $\exp_<(f) \in \exp_<(g) + \mathbf{N}^{2n}$. En utilisant le caractère bon de $<$, nous allons montré qu'il existe $\tilde{f} \in J$ tel que :

(1) il existe $c \in \mathcal{C} \smallsetminus Q$ tel que $f' = \sigma_P(c)\sigma_P(\tilde{f})$,

(2) $\mathrm{cp}_<(\tilde{f}) \notin P$.

Supposons que $\mathrm{cp}_<(f) \in P$.
Soit $\lambda = \mathrm{cp}_<(f) m_0$ avec $m_0 = (x, \partial_x)^{\exp_<(f) - \exp_<(g)}$. Nous avons :

$$\mathrm{mp}_<(f) = m_0 \mathrm{mp}_<(g) + \lambda' \text{ avec } \exp_<(\lambda') < \exp_<(f).$$

Ecrivons : $f = \mathrm{cp}_<(f)\mathrm{mp}_<(f) + v$ et $g = \mathrm{cp}_<(g)\mathrm{mp}_<(g) + w$ (par définition, on a $\exp_<(v) < \exp_<(f)$ et de même pour g et w). Posons :

$$f_1 = \mathrm{cp}_<(g) f - \mathrm{cp}_<(f) m_0 g.$$

On a : $f_1 \in J$ et $\sigma_P(f_1) = \sigma_P(\mathrm{cp}_<(g))\sigma_P(f)$ ainsi $f' = \sigma_P(c_1)\sigma_P(f_1)$ avec $c_1 \notin P$. De plus nous avons :

$$f_1 = \mathrm{cp}_<(f)\mathrm{cp}_<(g)(v + \lambda') - \mathrm{cp}_<(f) m_0 w,$$

ce qui implique que $\exp_<(f_1) < \exp_<(f)$. Comme $Q \subset J$, on peut supposer $\mathrm{cp}_<(f_1) \notin Q$. Si le coefficient privilégié $\mathrm{cp}_<(f_1)$ de f_1 est dans P, on applique à f_1 le même procédé qu'à f. Comme $<$ est un bon ordre, un tel processus doit s'arrêter. Ainsi il existe $\tilde{f} \in J$ qui satisfait au deux conditions écrites plus haut. Soit donc $\tilde{g} \in G$ tel que $\exp_<(\tilde{f}) \in \exp_<(\tilde{g}) + \mathbf{N}^{2n}$.

Pusique $\mathrm{cp}_<(\tilde{f}) \notin P$, on a : $\exp_<(\tilde{f}) = \exp_<(\sigma_P(\tilde{f}))$. De plus comme $h \notin P$, on a $\exp_<(\tilde{g}) = \exp_<(\sigma_P(\tilde{g}))$. Comme $\sigma_P(c)\sigma_P(\tilde{f}) = f'$, on peut conclure :

$$\exp_<(f') \in \exp_<(\sigma_P(\tilde{g})) + \mathbf{N}^{2n}.$$

Le lemme est démontré. □

Nous avons dit que le lemme de spécialisation faible est un cas particulier de son homologue forte, en effet :

REMARQUE 4.5. *(Comment retrouver le lemme de spécialisation faible)*

- *Cas algébrique. Pour* $a_0 \in \mathbf{k}^m$ *on considère* m_{a_0} *l'idéal maximal de* $\mathbf{k}[a]$ *centré en* a_0 *(i.e. engendré par les* $a^i - a_0^i$ *pour* $i = 1, \dots, m$*). On a* $a_0 \in V(Q) \setminus V(h)$ *si et seulement si* $h \notin m_{a_0} \supseteq Q$*. De plus* $\mathbf{k}(m_{a_0}) = \mathbf{k}$*. On voit donc qu'en appliquant le lemme fort à des* P *de la forme* m_{a_0}*, on retrouve le lemme faible.*
- *Cas analytique. Soit* G' *une famille de représentants des éléments de* G *et soit* U *un ouvert (connexe) de* $\mathbf{C}^m$ *contenant* 0 *tel que* (G', U) *représente l'idéal* J*. Notons* $J' \subset \mathcal{O}(U)$ *l'idéal engendré par* G'*. Soient* Q' *et* h' *des représentants respectifs de* Q *et* h*. Par le lemme de spécialisation forte (nous avons vu dans sa preuve que nous pouvons l'appliquer ici), on a : pour tout idéal premier* P' *de* $\mathcal{O}(U)$ *tel que* $h' \notin P' \supseteq Q'$*,*

$$\exp_<(\sigma_{P'}(J')) = \bigcup_{i=1}^{q} (\exp_<(\sigma_{P'}(g_i')) + \mathbf{N}^{2n}).$$

En prenant pour chaque $a \in U$*,* P' *égal à l'idéal maximal de* $\mathcal{O}(U)$ *centré en* a*, on obtient l'énoncé du lemme de spécialisation faible analytique (en effet l'énoncé consiste à travailler avec un représentant et nous avons vu dans le paragraphe 2.1 que le resultat ne dépend pas du choix du représentant).*

REMARQUE 4.6. *Nous avons décidé d'exposer cette section avec un idéal de* $\mathbf{A}_n(\mathbf{k})[a]$ *(dans le cas algébrique pour fixer les idées) mais il faut néanmoins dire que tous les résultats sont encore valables dans le cas d'un idéal de* $\mathbf{A}_n(\mathbf{k})\langle z \rangle[a]$ *ou de* $\mathbf{k}[x][a]$ *pourvu que l'ordre de départ soit bon.*

3. Résultats complémentaires

Dans cette section, nous incluons une application facile du lemme de spécialisation (faible), à savoir la constance générique du polynôme de Hilbert (introduit dans le chapitre 2) associé à un idéal de $\mathbf{k}[y_1, \dots, y_n][a]$ dépendant du système de paramètres a, il en résulte la constance générique de la dimension et du degré de la variété algébrique définie par l'idéal en question dans le cas où $\mathbf{k}$ est algébriquement clos. Nous y ajoutons un autre joli résultat que nous avons baptisé "lemme de réduction". Il s'agit d'un résultat crucial dans la preuve de la constructibilité de l'éventail de Gröbner. Mais avant cela, voyons un lemme dit de constructibilité qui bien que trivial introduit l'esprit dans lequel vont se dérouler les deux chapitres suivants.

3.1. Lemme de constructibilité. Dans ce court paragraphe, nous montrons un lemme que nous utiliserons assez fréquement. Les hypothèses du lemme sont assez générales pour englober la majorité des cas que nous traiterons.

Rappelons qu'étant donné $A \subset \mathbf{k}^m$, un ensemble localement fermé de A est la différence de deux fermés de Zariski de A. De même, soit A inclus dans un voisinage de $0 \in \mathbf{C}^m$, un ensemble localement fermé de A est une différence de deux fermés de Zariski de A. Si $A \subset \mathbf{k}^m$, un constructible de A est une union finie d'ensembles localement fermés de A et de même dans le cas analytique. Signalons que les constructibles forment la plus petite classe des parties de A stables par union finie, intersection finie et complémentaire et contenant les fermés de Zariski de A.

Soit $a = (a^1, \dots, a^m)$ un système de paramètres algébriques (resp. analytiques). Supposons donnée une application O qui à a de $\mathbf{k}^m$ (resp. d'un voisinage de 0 dans

$\mathbf{C}^m$) associe un objet O_a de la catégorie des ensembles (éventuellement un singleton, par exemple un polynôme). Et supposons que pour tout idéal Q premier de $\mathbf{k}[a]$ (resp. de $\mathbf{C}\{a\}$), il existe $h \in \mathbf{k}[a] \setminus Q$ (resp. $h \in \mathbf{C}\{a\} \setminus Q$) tel que l'application O soit constante sur $V(Q) \setminus V(h)$, voici l'énoncé du lemme dans le cas algébrique.

LEMME 4.7. *Il existe une partition finie* $\mathbf{k}^m = \sqcup W$ *en ensembles localement fermés telle que sur chaque* W *la restriction de* O *est constante.*

REMARQUE. *Dans la version analytique du lemme il faut remplacer* $\mathbf{k}^m$ *par un voisinage de* $0 \in \mathbf{C}^m$ *et "localement fermés" par "localement fermés analytiques"*

Nous écrivons la preuve dans le cas algébrique mais elle se fait à l'identique dans le cas analytique.

DÉMONSTRATION. Démontrons le résultat (à priori) plus général suivant :
Tout fermé de Zariski $Y \subset \mathbf{k}^m$ s'écrit comme union de localement fermés sur lesquels la restriction de O est constante.
La preuve de ceci se fait par récurrence sur la dimension de Y $\dim Y$. Si $\dim Y = 0$, le résultat est trivial. Supposons donc $\dim Y \geq 1$. Ecrivons $Y = V(Q_1) \cup \cdots \cup V(Q_r)$ où chaque Q_i est un idéal premier de $\mathbf{k}[a]$. Pour chaque i, soit $h_i \in \mathbf{k}[a] \setminus Q_i$ tel que la restriction de O à $V(Q_i) \setminus V(h_i)$ soit constante. L'ensemble Y s'écrit de la façon suivante :

$$Y = \Big(\bigsqcup_{i=1}^{r} V(Q_i) \setminus V(h_i) \Big) \bigsqcup Y'$$

avec $Y' = \bigsqcup_{i=1}^{r} \big(V(Q_i) \cap V(h_i) \big)$ pour lequel $\dim Y' < \dim Y$ car, rappelons le, pour chaque i, $h_i \notin Q_i$. En appliquant l'hypothèse de récurrence à Y', on obtient le résultat cherché.
Appliquons ce résultat à $Y = \mathbf{k}^m$, on obtient une écriture de $\mathbf{k}^m$ en une union finie de localement fermés W' telle que sur chaque W', la restriction de O est constante. Pour obtenir la partition recherchée, il suffit de réorganiser l'écriture précédente sachant que les ensembles constructibles sont stables par intersection et réunion finie. $\square$

3.2. Polynôme de Hilbert générique. Voici les donnés qui comme précédement se divisent en deux cas : algébriques et analytiques. On se donne un système de paramètres $a = (a^1, \ldots, a^m)$, des coordonnées $y = (y_1, \ldots, y_n)$ et un idéal J de $\mathbf{k}[y][a]$ (resp. de $\mathbf{C}[y]\{a\}$). Voici les résultats auxquels on veut arriver.

PROPOSITION 4.8. *Soit* Q *un idéal premier de* $\mathbf{k}[a]$ *(resp.* $\mathbf{C}\{a\}$*) contenu dans* J*. Il existe* $h \in \mathbf{k}[a] \setminus Q$ *(resp.* $h \in \mathbf{C}\{a\} \setminus Q$*) tel que pour tout* $a \in V(Q) \setminus V(h)$*, le polynôme de Hilbert de* $\mathbf{k}[y]/J_{|a}$ *est constant.*

COROLLAIRE 4.9. *Dans le cas où* $\mathbf{k}$ *algébriquement clos (dans le cas analytique,* $\mathbf{k} = \mathbf{C}$*) , la dimension et le degré de la variété définie par* $J_{|a}$ *sont constants sur* $V(Q) \setminus V(h)$*.*

COROLLAIRE 4.10. *Il existe une partition finie de* $\mathbf{k}^m$ *(resp. d'un voisinage de* $0 \in \mathbf{C}^m$*) en ensembles localement fermés (resp. localement fermés analytiques) telle que sur chaque strate de cette partition, le polynôme de Hilbert soit constant.*

Pour ce dernier corollaire, il suffit pour chaque Q de poser $J_Q = J+ < Q >$ de lui appliquer la proposition 4.8 et de remarquer que pour tout $a \in V(Q)$, les spécialisés $J_{|a}$ et $J_{Q|a}$ sont égaux. On est alors dans les conditions du lemme de constructibilité. Pour le corollaire précédent, le lecteur est prié de se reporter à la proposition suivante.

DEFINITION. *Soit I un idéal de $\mathbf{k}[y]$ et $E \subset \mathbf{N}^n$ un escalier (i.e. $E = E + \mathbf{N}^n$).*

– *On définit la fonction de Hilbert de I, $HF_I : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ par*

$$HF_I(r) = \dim_{\mathbf{k}} \left(\mathbf{k}[y]_{\leq r}/I_{\leq r}\right)$$

où $\mathbf{k}[y]_{\leq r} = \{P \in \mathbf{k}[y] \,/\, \deg_y(P) \leq r\}$ et $I_{\leq r} = I \cap \mathbf{k}[y]_{\leq r}$.

– *On définit la fonction de Hilbert de E, HF_E de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{N}$ par $HF_E(r) = card\{\alpha \in \mathbf{N}^n \,/\, |\alpha| \leq r \text{ et } \alpha \in \mathbf{N}^n \setminus E\}$.*

PROPOSITION 4.11. *(cf* **[C-L-O]***)*

– *Il existe un polynôme $HP_I \in \mathbf{Q}[r]$ tel que pour tout entier r assez grand $HF_I(r) = HP_I(r)$. De plus le terme dominant de HP_I est de la forme suivante $\frac{e}{d!}r^d$ où e et d sont des entiers positifs. On appelle HP_I le polynôme de Hilbert de I.*

– *Supposons $\mathbf{k}$ algébriquement clos. Dans ce cas la dimension et le degré de $V(I)$ sont respectivement d et e.*

Sur $\mathbf{N}^n$, introduisons l'ordre $<^T$ suivant qu'on appelle l'ordre total :

$$\alpha <^T \alpha' \iff \begin{cases} |\alpha| < |\alpha'| \\ \text{ou} \\ |\alpha| = |\alpha'| \text{ et } \alpha <_0 \alpha' \end{cases}$$

où $<_0$ est un bon ordre quelconque compatible avec $+$ sur $\mathbf{N}^n$.

LEMME 4.12. *Soit I un idéal de $\mathbf{k}[y]$ et $E = \exp_{<^T}(I)$ alors $HF_I = HF_E$.*

DÉMONSTRATION. Fixons un entier r positif. Notons $\bar{\Delta}_r = \{\alpha \in \mathbf{N}^n \setminus \exp_{<^T}(I) \,/\, |\alpha| \leq r\}$ et $A(r) = \{[y^\alpha] \in \mathbf{k}[y]_{\leq r}/I_{\leq r} \,/\, \alpha \in \bar{\Delta}_r\}$ où $[\cdot]$ désigne la classe dans le quotient $\mathbf{k}[y]_{\leq r}/I_{\leq r}$. Par définition, nous avons $HF_E(r) = \mathrm{card}(\bar{\Delta}_r)$. Montrons que $A(r)$ est une base de $\mathbf{k}[y]_{\leq r}/I_{\leq r}$.

Libre : soit $\displaystyle\sum_{\alpha \in \bar{\Delta}_r} \lambda_\alpha [y^\alpha] = 0$ alors $P = \sum_\alpha \lambda_\alpha y^\alpha$ est dans I. Si un des λ_α est non nul alors l'exposant de P par rapport $<^T$ est dans $\bar{\Delta}_r$ ce qui est impossible.

Générateur : soit $P \in \mathbf{k}[y]_{\leq r}$. Divisons P par une $<^T$-base standard de I et notons R le reste, on a $[P] = [R]$. Par division, on a $\exp_{<^T}(R) \leq_T \exp(P)_{<^T}$ donc en particulier $\deg_y(R) \leq r$, on a aussi $\mathcal{N}(R) \subset \mathbf{N}^n \setminus \exp_{<^T}(I)$. Par conséquent $[R]$ s'écrit comme combinaison linéaire des éléments de $A(r)$.

Bilan : $HF_I(r) = \mathrm{card}\, A(r) = \mathrm{card}\, \bar{\Delta}_r = HF_{\exp_{<^T}(I)}(r)$. □

COROLLAIRE 4.13. *Si deux idéaux I_1 et I_2 de $\mathbf{k}[y]$ ont même escalier par rapport à $<^T$ alors ils ont le même polynôme de Hilbert.*

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer la proposition 4.8.

DÉMONSTRATION DE 4.8. Nous faisons la preuve dans le cas algébrique mais le cas analytique ne présente aucune difficulté supplémentaire. D'après le lemme de spécialisation faible, il existe $h \in \mathbf{k}[a] \smallsetminus Q$ tel que sur $V(Q) \smallsetminus V(h)$ l'escalier de $J_{|a}$ par rapport à $<^T$ est constant ce qui donne la constance du polynôme de Hilbert. □

3.3. Lemme de réduction. Il s'agit d'un résultat dont on se servira dans le chapitre consacré à la constructibilité des éventails de Gröbner algébriques. L'idée de ce lemme est qu'étant donné un idéal J de $\mathbf{A}_n(\mathbf{k})[a]$ (on se place par exemple dans le cadre algébrique) contenant un idéal premier Q de $\mathbf{k}[a]$, un élément $g \in \mathbf{A}_n(\mathbf{k})[a]$ et un ordre $<$ sur $\mathbf{N}^{2n}$, on aimerait réduire g par rapport à l'escalier générique de J, c'est-à-dire que pour tout a tel que $\mathrm{cp}_<(g)(a) \neq 0$, le spécialisé de g en a est réduit par rapport à l'escalier de générique de J. Ce procédé de réduction sert par exemple à fabriquer des éléments de J qui pour un a générique se spécialisent en la base standard réduite minimale de $J_{|a}$ (c'est ce que nous verrons dans le chapitre 6). Voici les hypothèses du lemme.

– J est un idéal de $\mathbf{A}_n(\mathbf{k})[a]$ (resp. $\mathbf{A}_n(\mathbf{C})\{a\}$) contenant un idéal premier Q de $\mathbf{k}[a]$ (resp. $\mathbf{C}\{a\}$).
– $<$ est un bon ordre compatible avec l'addition sur $\mathbf{N}^{2n}$.
– $E = \exp_<(J)$ l'escalier générique de J.
– g est un élément de $\mathbf{A}_n(\mathbf{k})[a]$ (resp. $\mathbf{A}_n(\mathbf{C})\{a\}$).

LEMME 4.14 (de réduction)**.** *Il existe $\tilde{g} \in \mathbf{A}_n(\mathbf{k})[a]$ (resp. $\mathbf{A}_n(\mathbf{C})\{a\}$) et $c(a) \notin Q$ tels que :*

(i): $c(a) \cdot g - \tilde{g} \in J$

(ii): $tp_<(\tilde{g}) = c(a) \cdot tp_<(g)$

(iii): $\mathcal{N}^{gen}(\tilde{g}) \smallsetminus \{\exp_<(\tilde{g})\} \subset \mathbf{N}^{2n} \smallsetminus E$

(iv): $\forall (\alpha, \beta) \in \mathcal{N}^{gen}(\tilde{g}) \smallsetminus \{\exp_<(\tilde{g})\},\ c_{\alpha\beta}(\tilde{g}) \notin Q$

DÉMONSTRATION. On écrit la preuve dans le cas algébrique.
Soit $\{g_1, \ldots, g_r\}$ une $<$-base standard générique minimale de J (i.e. l'ensemble $\{\exp_<(g_k),\ k = 1, \ldots, r\}$ engendre de façon minimale l'escalier E).
Nous allons construire une suite $(\tilde{g}_i)$ finie par récurrence sur i. Posons $\tilde{g}_0 = g$ et pour un $i \in \mathbf{N}$ supposons contruit $\tilde{g}_i$.
Considérons l'ensemble suivant :

$$A_i = \big(\mathcal{N}^{gen}(\tilde{g}_i) \smallsetminus \exp_<(\tilde{g}_i)\big) \cap E.$$

Si A_i est vide, la construction s'arrête sinon soit (α, β) le maximum de A_i pour l'ordre $<$. Il existe alors k tel que $(\alpha, \beta) = \exp_<(g_k) + (\alpha', \beta')$ avec $(\alpha', \beta') \in \mathbf{N}^{2n}$.
On pose alors :

$$\tilde{g}_{i+1} = \mathrm{cp}_<(g_k) \cdot \tilde{g}_i - c_{\alpha\beta}(\tilde{g}_i) \cdot x^{\alpha'} \partial_x^{\beta'} \cdot g_k.$$

On obtient :

(a): $\mathrm{tp}_<(\tilde{g}_i)/\mathrm{tp}_<(\tilde{g}_{i+1}) \in \mathbf{k}[a] \smallsetminus Q$

(b): $\max_< A_{i+1} < (\alpha, \beta)$ si $A_{i+1} \neq \emptyset$

Par (b), la suite des $\tilde{g}_i$ s'arrête, on note $\tilde{g}$ son dernier terme. Il est clair que $\tilde{g}$ vérifie (i) et (ii) grâce à (a) et (iii) parce que A_i est vide. Pour avoir (iv), il suffit d'enlever à $\tilde{g}$ tous les termes $c_{\alpha\beta} x^\alpha \partial_x^\beta$ pour lesquels $c_{\alpha\beta}$ est dans Q. □

CHAPITRE 5

Polynôme de Bernstein-Sato générique

Dans ce chapitre nous allons considérer la situation suivante. On se donne $f_1, \ldots, f_p$ dépendant de $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $a = (a^1, \ldots, a^m)$. Les a^i seront considérés comme des paramètres et les f_j dépendront polynomialement ou analytiquement de a. Il est naturel de se demander comment se comporte l'idéal de Bernstein-Sato $\mathcal{B}^v$ du spécialisé en a dans $\mathbf{k}^m$ ($\mathbf{k}$ étant un corps qui est $\mathbf{C}$ dans le cas où le paramètre a est analytique) lorsque a parcourt $\mathbf{k}^m$ (ou un petit voisinage de $0 \in \mathbf{C}^m$ quand a est analytique). Il se trouve que cette question est très proche de celle de l'existence d'un polynôme de Bernstein-Sato générique ou relatif. Mais la voie que nous empruntons qui est celle de l'utilisation des bases de Gröbner et plus précisement de la spécialisation des bases de Gröbner conduit naturellement à celle de l'existence d'un (ou "du" dans le cas $p = 1$) polynôme de Bernstein-Sato générique. En effet les lemmes de spécialisation se résument en disant qu'une base de Gröbner global se spécialise génériquement en une base de Gröbner dans la fibre.
Dans l'étude de l'existence de polynôme de Bernstein-Sato générique, il faut distinguer plusieurs cas selon que les f_j sont analytiques ou polynomiaux en x ou en a. Rappelons les faits connus :

- Si la variable x est analytique, alors dans le cas d'une fonction (i.e. $p = 1$), le polynôme de Bernstein générique existe si $f(x, 0)$ est à singularité isolée (voir [**Br-Ge-M**]). Dans le cas de plusieurs fonctions, H. Biosca [**Bi**] a montré sous l'hypothèse d'intersection complète à singularité isolé de toutes les familles $(f_{j_1}(x, 0), \ldots, f_{j_r}(x, 0))$, qu'il existe un polynôme de Bernstein-Sato générique. Signalons encore l'exemple suivant dû à H. Biosca [**Bi**] :

  $$f(x_1, x_2, a^1, a^2, a^3) = x_1^2 \sin(x_2) - a^1 x_1 - a^2 x_2 - a^3,$$

  pour lequel il n'y a pas de polynôme de Bernstein-Sato générique. Cet exemple montre que quand x est analytique, il n'y a pas nécessairement de polynôme de Bernstein-Sato générique.
- Si la variable x est polynomiale. Alors il existe toujours un polynôme de Bernstein-Sato générique. Ce résultat est démontré par H. Biosca dans [**Bi**]. C'est ce cas qui est l'objet de la section 2 du présent chapitre dans laquelle nous précisons et généralisons le résultat de H. Biosca (voir plus bas).

Comme il vient d'être dit, dans ce chapitre nous étudirons la question dans le cas où les f_j dépendent polynomialement de x. En fait dans le cas où x est analytique, notre approche de la question ne nous permet pas d'aboutir (voir la remarque 5.7 pour plus d'explications) et c'est normal puisque l'on sait que le polynôme de Bernstein-Sato générique n'existe pas en général.
Nous avons scindé le chapitre en deux sections. Dans la première, nous traitons le cas d'une fonction à part car nous pouvons répondre de manière complète à la question de départ (sur l'etude du comportment de $\mathcal{B}^v$). Dans la seconde partie, nous obtenons

des résultats partiels comme par exemple que l'idéal de Bernstein-Sato générique se spécialise génériquement en l'idéal de Bernstein-Sato "en bas" (voir la proposition 5.11) et nous obtenons aussi l'existence d'un polynôme de Bernstein-Sato générique rationnel sur un germe de variété analytique irréductible dans le cas analytique (i.e. où le système de paramètres a est analytique) et sur une variété algébrique irréductible dans le cas algébrique sur n'importe quel corps $\mathbf{k}$ et ceci grâce aux chapitres précédents.

1. Cas d'une fonction

Nous allons nous intéresser au problème suivant. On se donne un polynôme f que l'on écrit :

$$(\dagger) \qquad f = \sum_{|\alpha| \leq d} g_\alpha(a) x^\alpha.$$

Comme dans le chapitre précédent, on va traiter deux cas (algébrique et analytique). Ainsi f est vu respectivement dans $\mathbf{k}[x][a]$ ou dans $\mathbf{C}[x]\{a\}$ où $x = (x_1, \ldots, x_n)$, d est un entier positif et $a = (a^1, \ldots, a^m)$ est un système de paramètres. Pour chaque $a \in \mathbf{k}^m$ (resp. a dans un voisinage de $0 \in \mathbf{C}^m$), on note $f_{|a} \in \mathbf{k}[x]$ le spécialisé de f en a et $b_{f_{|a}}$ le polynôme de Bernstein global de $f_{|a}$.

On se propose d'étudier le comportement du polynôme $b_{f_{|a}}$ lorsque a parcourt $\mathbf{k}^m$ (resp. un petit voisinage de 0 dans $\mathbf{C}^m$).

Il est facile de voir que dans le cas algébrique, on peut supposer que f soit de la forme suivante :

$$(\ddagger) \qquad f = \sum_{|\alpha| \leq d} a_\alpha x^\alpha,$$

où $a = (a_\alpha)_{\alpha \in \mathbf{N}^n / |\alpha| \leq d}$ et m est le nombre de a_α présents dans l'écriture de f. Dans le reste de la section, dire que nous sommes dans "le cas algébrique" signifiera que f aura sera de la forme ($\ddagger$). Nous dirons qu'on est dans le cas analytique si f est de la forme ($\dagger$) avec des g_α qui sont dans $\mathbf{C}\{a\}$ où a est un système de m variables.

On se propose de montrer la chose suivante.

THEOREME 5.1 (dans le cas algébrique)**.** *Soit Y un fermé de Zariski de $\mathbf{k}^m$ défini par des polynômes de $\mathbf{Q}[a]$. Il existe une partition finie $Y = \cup(V \setminus V')$ telle que :*
- *Chaque V et V' est un fermé de Zariski défini par des polynômes de $\mathbf{Q}[a]$.*
- *Sur chaque ensemble $V \setminus V'$, le polynôme de Bernstein $b_{f_{|a}}$ est constant.*

REMARQUE 5.2. *Si on prend $Y = \mathbf{k}^m$, on retrouve le résultat démontré par A. Leykin dans [**L**] par des méthodes similaires à celles que nous adoptons ici. Signalons aussi le papier de J. Briançon et P. Maisonobe [**Br-Mai**] dans lequel les auteurs démontrent ce même résultat par des méthodes différentes.*

Comme conséquence, on obtient l'enoncé dans le cas analytique :

COROLLAIRE 5.3 (dans le cas analytique)**.** *Soit Y un germe de variétés analytiques en $0 \in \mathbf{C}^m$. Il existe alors une partition finie $Y = \cup(V \setminus V')$ telle que :*
- *Chaque V et V' est un germe de variétés analytiques.*
- *Sur chaque ensemble $V \setminus V'$, le polynôme de Bernstein $b_{f_{|a}}$ est constant.*

Voyons comment obtenir ce corollaire à partir du théorème précédent.

Démonstration de 5.3. Soit $f' = \sum_{|\alpha|\leq d} b_\alpha$ vu dans $\mathbf{C}[b]$ où $b = (b^1, \ldots, b^m)$ et m est le nombre de $\alpha \in \mathbf{N}^n$ de longueur majorée par d. Considérons le changement de coordonnées suivant :

$$a \in (\mathbf{C}^m, 0) \mapsto b = (b_\alpha = g_\alpha(a))_{|\alpha|\leq d} \in \mathbf{C}^m.$$

Par le théorème précédent , il existe une partition de $\mathbf{C}^m = \cup W$ en localement fermés algébriques $W = V \smallsetminus V'$. Par image réciproque, cela donne une partition de $(\mathbf{C}^m, 0) = \cup \phi^{-1}(W)$ en localement fermés analytiques $\phi^{-1}(W) = \phi^{-1}(V) \smallsetminus \phi^{-1}(V')$. De plus, pour chaque W, le polynôme de Bernstein de $f'_{|b}$ est constant lorsque b parcourt W ce qui entraine que le polynôme de Bernstein de $f_{|a}$ est constant sur $\phi^{-1}(W)$ (rappelons qu'on travaille avec un représentant de $\phi^{-1}(W)$ et que le résultat est indépendant du choix de ce dernier). Cela démontre le corollaire lorsque $Y = (\mathbf{C}^m, 0)$. Pour un germe de varieté quelconque Y, il suffit de prendre la trace sur Y de la partition obtenue sur $(\mathbf{C}^m, 0)$. □

Pour démontrer le théorème 5.1, nous allons nous baser sur un algorithme de calcul du polynôme de Bernstein, l'algorithme de T. Oaku (voir [**O**]). Nous allons donner la version de T. Oaku qui calcule le polynôme de Bernstein "absolu" c'est-à-dire pour un polynôme $f \in \mathbf{k}[x]$ puis nous donnerons une version qualifiée de générique.

1.1. L'algorithme de T. Oaku absolu. Ici nous supposons donc que f appartient à $\mathbf{k}[x]$.

(1) Soit $I = < t - f,\, \partial_{x_i} + \frac{\partial f}{\partial x_i}\partial_t, i = 1, \ldots, n > \subset \mathbf{A}_{n+1}(\mathbf{k})$,

(2) Soit $I_1 = < 1 - y_1 y_2,\, y_1 t - f,\, y_1 \partial_{x_i} + \frac{\partial f}{\partial x_i}\partial_t, i = 1, \ldots, n > \subset \mathbf{A}_{n+1}(\mathbf{k})[y_1, y_2]$,

(3) Soit $I_2 = I \cap \mathbf{A}_n(\mathbf{k})[-\partial_t t] \subset \mathbf{A}_n(\mathbf{k})[s]$ où $s = -\partial_t t$.
On calcule I_2 à partir de I_1 de la façon suivante :
   – Soit G_1 une base standard de I_1 par rapport à un ordre qui élimine les variables y_1 et y_2.
   – Soit $G_2 = G_1 \cap \mathbf{A}_{n+1}(\mathbf{k})$.
   Affirmation : G_2 est V-homogène i.e. tous ses éléments le sont.
   – Pour chaque $P \in G_2$, notons $\psi(P)(s) \in \mathbf{A}_n(\mathbf{k})[s]$ l'élément obtenu de la manière suivante :
   Notons $P' = S.P$ où $S = t^{\mathrm{ord}^V(P)}$ si $\mathrm{ord}^V(P) \geq 0$ et $S = \partial_t^{-\mathrm{ord}^V(P)}$ sinon.
   P' est alors V-homogène d'ordre 0 et peut donc s'écrire dans $\mathbf{A}_n(\mathbf{k})[-\partial_t t]$.
   $\psi(P)(s) \in \mathbf{A}_n(\mathbf{k})[s]$ est alors défini par $\psi(P)(-\partial_t t) = P'$.
   – L'idéal I_2 est engendré par l'ensemble $\psi(G_2)$ des $\psi(P)$ pour $P \in G_2$.

(4) Soit $I_3 = I_2 + \mathbf{A}_n(\mathbf{k})[s] \cdot f \subset \mathbf{A}_n(\mathbf{k})[s]$.

(5) Soit $I_4 = I_3 \cap \mathbf{k}[s]$.

(6) b_f est le générateur unitaire de I_4.

Cet algorithme est un moyen parmi d'autres (voir [**Br-Mai2**] pour une autre approche) de déduire du résultat fondamental de M. Kashiwara et B. Malgrange que le polynôme de Bernstein est à racines dans $\mathbf{Q}$ donc en particulier appartient à $\mathbf{Q}[s]$.

PROPOSITION 5.4. *Soit $f \in \mathbf{k}[x]$. Les racines de b_f sont dans $\mathbf{Q}$.*

Remarquons qu'on a vu un résultat similaire dans le cas de p polynômes dans le chapitre 3 (en utilisant les $\mathcal{B}_L$ et les b_L). En fait la preuve écrite ci-dessous fait appel aux mêmes arguments.

DÉMONSTRATION. Notons $c_1, \ldots, c_p \in \mathbf{k}$ les coefficients de f, et soit $\mathbf{K}$ le corps $\mathbf{Q}(c_1, \ldots, c_p)$. Puisque $\mathbf{K} \subseteq \mathbf{k}$, $b_\mathbf{k}$ divise $b_\mathbf{K}$ mais en observant chaque étape de l'algorithme de T. Oaku, on constate que tout les calculs se font dans $\mathbf{K}$, donc $b_\mathbf{k} = b_\mathbf{K}$.
D'autre part, on peut inclure $\mathbf{K}$ dans $\mathbf{C}$. En utilisant les mêmes arguments, on montre que $b_\mathbf{K} = b_\mathbf{C}$. En utilisant le résultat de Kashiwara [**K**] sur la rationalité des racines du polynôme de Bernstein locale et sachant que $b_\mathbf{C}$ est le ppcm de tous les polynômes locaux (voir par ex. [**Br-Mai**], voir aussi la preuve de la proposition dans laquel on montre que le ppcm des b_L locaux est égal au b_L global), on conclut que $b_\mathbf{k}$ est à racines rationnelles. $\square$

1.2. L'algorithme de T. Oaku générique. Comme dans le chapitre précédent, soit Q un idéal premier de $\mathbf{k}[a]$ et soit $f \in \mathbf{k}[x][a]$ comme décrit plus haut. Considérons les idéaux suivants.

(1) $I_Q =< t - f,\, \partial_{x_i} + \frac{\partial f}{\partial x_i}\partial_t, i = 1, \ldots, n > + < Q > \subset \mathbf{A}_{n+1}(\mathbf{k})[a]$

(2) $I_{1,Q} =< 1 - y_1y_2,\, y_1t - f,\, y_1\partial_{x_i} + \frac{\partial f}{\partial x_i}\partial_t, i = 1, \ldots, n > + < Q >$
$\subset \mathbf{A}_{n+1}[y_1, y_2](\mathbf{k})[a]$

(3) $I_{2,Q} = I_Q \cap \mathbf{A}_n(\mathbf{k})[-\partial_t t][a] \subset \mathbf{A}_n(\mathbf{k})[s][a]$ où $s = -\partial_t t$

(4) $I_{3,Q} = I_{2,Q} + \mathbf{A}_n(\mathbf{k})[s][a] \cdot f \subset \mathbf{A}_n(\mathbf{k})[s][a]$

(5) $I_{4,Q} = I_{3,Q} \cap \mathbf{k}[s][a]$

Remarquons que tous ces idéaux contiennent Q.
Pour un idéal J dépendant de a, on note comme d'habitude $J_{|a}$ son spécialisé en $a \in \mathbf{k}^m$ ainsi on notera $I_{Q_{|a}}$, $I_{1,Q_{|a}}$, etc. D'autre part, nous avons les idéaux I, I_1, etc, correspondants à $f_{|a}$, nous les noterons $I(f_{|a})$, $I_1(f_{|a})$, ...
Par ailleurs, considérons une base standard minimale G de $I_{1,Q}$ pour un ordre $\prec$ qui élimine les variables y_1, y_2 (plus précisement il privilégie d'abord les monômes en y_1, y_2 puis en $x_i, t, \partial_{x_i}, \partial_t$ et enfin en a), nous avons vu que dans ces conditions, $G \setminus Q$ est une base standard générique de $I_{1,Q}$ par rapport à $<$ qui est la restriction de $\prec$ à $\mathbf{N}^{2n+2+2}$. Soit alors $h_1 \in \mathbf{k}[a]$ le polynôme donné par le lemme de spécialisation faible (remarquons que ce lemme est énoncé dans $\mathbf{A}_n(\mathbf{k})[a]$ mais il fonctionne aussi bien ici dans $\mathbf{A}_{n+1}(\mathbf{k})[y_1, y_2][a]$). De même soit $h_2 \in \mathbf{k}[a]$ le polynôme obtenu en appliquant le lemme de spécialisation à une base standard minimale de $I_{3,Q}$ pour un ordre qui élimine les variables x_i et ∂_{x_i}. Enfin notons $h = h_1h_2$.

PROPOSITION 5.5. *(1) Pour tout $a \in V(Q)$, $I(f_{|a}) = I_{Q_{|a}}$ et $I_1(f_{|a}) = I_{1,Q_{|a}}$*

(2) Pour tout $a \in V(Q) \setminus V(h_1)$, $I_2(f_{|a}) = I_{2,Q_{|a}}$ et $I_3(f_{|a}) = I_{3,Q_{|a}}$

(3) Pour tout $a \in V(Q) \setminus V(h)$, $I_4(f_{|a}) = I_{4,Q_{|a}}$

DÉMONSTRATION. (1) Il est clair que $(\frac{\partial f}{\partial x_i})_{|a} = \frac{\partial f_{|a}}{\partial x_i}$, les deux égalités en découlent.

(2) Il est clair que si on a l'égalité pour I_2 alors on l'a pour I_3. Montrons donc la première.
Soit $\prec$ l'ordre (introduit ci-dessus) sur $\mathbf{N}^{2n+2+2+m}$ qui élimine les variables y_1, y_2 et soit G une $\prec$-base standard minimale de $I_{1,Q}$. Si on étend la définition du symbole ψ à des éléments dépendants de a, nous avons que $\psi(G \cap \mathbf{A}_{n+1}[a])$ engendre $I_{2,Q}$ et par suite $\psi(G \cap \mathbf{A}_{n+1}[a])_{|a}$ engendre $I_{2,Q_{|a}}$.
D'autre part, pour tout $a \in V(Q) \smallsetminus V(h_1)$, $G_{|a}$ est une $<$-base standard de $I_1(f_{|a})$ si on note $<$ la restriction de $\prec$ à $\mathbf{N}^{2n+2+2}$. Ainsi $\psi(G_{|a} \cap \mathbf{A}_{n+1})$ engendre $I_2(f_{|a})$.
Nous avons $G_{|a} \cap \mathbf{A}_{n+1} = (G \cap \mathbf{A}_{n+1}[a])_{|a}$. En effet pour $g \in G$, g dépend de y_i si et seulement si son terme dominant $\mathrm{tp}_<$ en dépend. Pour conclure, il est clair que $\psi((G \cap \mathbf{A}_{n+1}[a])_{|a}) = \psi(G \cap \mathbf{A}_{n+1}[a])_{|a}$. Par conséquent les idéaux $I_{2,Q_{|a}}$ et $I_2(f_{|a})$ admettent un même système de générateurs.

(3) Notons G une base standard minimale de $I_{3,Q}$ introduite plus haut. Comme au point précédent, les ensembles $G_{|a} \cap \mathbf{k}[s]$ et $(G \cap \mathbf{k}[s][a])_{|a}$ sont égaux sur $V(Q) \smallsetminus V(h)$ et engendrent $I_4(f_{|a})$ et $I_{4,Q_{|a}}$.

□

1.3. La preuve du résultat principal. Nous allons démontrer le théorème 5.1. Tout d'abord, voici un lemme nécessaire à la preuve, nous l'avons baptisé lemme de rationalité.

Soit $c(y) = \sum_\alpha c_\alpha(a) y^\alpha$ dans $\mathbf{k}[a][y]$ où $y = (y_1, \ldots, y_n)$, $\alpha \in \mathbf{N}^n$, $a = (a^1, \ldots, a^m)$. Soit Q un idéal premier de $\mathbf{k}[a]$. Soit α_0 un multi-indice quelconque intervenant dans l'écriture de c. Soit $h \in \mathbf{k}[a]$ tel que $V(Q) \not\subseteq V(h) \supseteq V(c_{\alpha_0})$.

LEMME 5.6 (de rationalité)**.** *Supposons que pour tout $a \in V(Q) \smallsetminus V(h)$, le spécialisé $(c(y)/c_{\alpha_0})_{|a}$ soit dans $\mathbf{Q}[y]$. Alors il existe $p(y) \in \mathbf{Q}[y]$ tel que pour tout a de $V(Q) \smallsetminus V(h)$ on ait $c_{|a}(y) = c_{\alpha_0 |a} p(y)$.*

Pour dire les choses plus simplement, si $c(y)$ se spécialise génériquement sur $\mathbf{Q}[y]$ alors à un multiple scalaire près, c'est génériquement le même spécialisé.

Démonstration. Pour un α fixé, notons $d(a) = c_\alpha(a)/c_{\alpha_0}(a)$ définie sur l'ensemble $V(Q) \smallsetminus V(h)$ que nous noterons W dans cette preuve. D'après ([**Ha**], Théorème 3.16), l'image par $d(W)$ est constructible dans $\mathbf{C}$, or par hypothèse $d(W) \subseteq \mathbf{Q}$, par conséquent $d(W)$ est une union finie de points rationnels. Par l'irréductibilité de $V(Q)$, $d(W)$ est un singleton. □

Voici maintenant la preuve du thórème 5.1.

Démonstration. Comme pour lemme de constructibilité, elle se fera par récurrence sur la dimension $\dim Y$ de Y.
Si $\dim Y = 0$, le résultat est trivial. Supposons donc $\dim Y \geq 1$. Ecrivons $Y = V(Q_1) \cup \cdots \cup V(Q_r)$ où chaque Q_i est un idéal premier de $\mathbf{Q}[a]$. Pour chaque $Q = Q_1, \ldots, Q_r$, appliquons l'algorithme de T. Oaku générique décrit précédement et notons h_i le h correspondant. Du fait que les Q_i sont dans $\mathbf{Q}[a]$, chaque I_{j,Q_i} est défini sur $\mathbf{Q}$ et par conséquent, les polynômes $h_1, \ldots, h_r$ sont aussi dans $\mathbf{Q}[a]$.
Avant d'aller plus loin, fixons $i \in \{1, \ldots, r\}$ et montrons que sur $V(Q_i) \smallsetminus V(h_i)$, $b_{f_{|a}}$ est constant.
Notons G la base standard utilisée pour calculer I_{4,Q_i}. Puisque tous les $I_{4,Q_i|a}$ sont

principaux et ont un escalier constant (en dehors de $V(h_i)$), il existe $g_i \in G$ tel que $g_{i|a}$ engendre $I_{4,Q_i|a}$ qui est égal à $I_4(f_{|a})$ d'après ce qui précède. Rappelons que $g \in \mathbf{Q}[a][s]$. Notons $c(a) \in \mathbf{Q}[a]$ son coefficient privilégié. Alors pour tout $a \in V(Q_i) \smallsetminus V(h_i)$, $(g_i(s,a)/c(a))_{|a}$ est le polynôme de Bernstein $b_{f_{|a}}$. Puisque le polynôme de Bernstein de chaque $f_{|a}$ est dans $\mathbf{Q}[s]$, on peut appliquer le lemme de rationalité ce qui montre qu'il existe un polynôme $b_i(s) \in \mathbf{Q}[s]$ tel que pour tout $a \in V(Q_i) \smallsetminus V(h_i)$ on ait $b_{f_{|a}} = b_i$.
Reprenons le fil de la preuve. L'ensemble Y s'écrit comme réunion finie sous la forme suivante :

$$Y = \Big(\bigsqcup_{i=1}^{r} V(Q_i) \smallsetminus V(h_i) \Big) \bigsqcup Y'$$

avec $Y' = \bigsqcup_{i=1}^{r} (V(Q_i) \cap V(h_i))$ pour lequel $\dim Y' < \dim Y$ car, rappelons le, pour chaque i, $h_i \notin Q_i$. Il ne reste plus qu'à appliquer l'hypothèse de récurrence à Y' qui est bien défini sur $\mathbf{Q}$ et le théorème est démontré. □

2. Cas de plusieurs fonctions

Dans la section précédente et dans le cas d'une fonction f, nous avons pu répondre de manière complète à la question de savoir comment se comporte l'idéal de Bernstein-Sato $\mathcal{B}(f_{|a})$ lorsque le système de paramètres parcourt $\mathbf{k}^m$ (resp. un voisinage de $0 \in \mathbf{C}^m$). Ici nous essayons dans la mesure du possible de répondre à la même question dans le cas de p polynômes dépendant d'un système de paramètre a. Le problème est que nous savons peu de choses sur l'idéal $\mathcal{B}^v$. Nous savons par [**Br-May**] qu'il n'est pas principal en général. En fait la seule chose connue dont on peut se servir est l'existence pour toute fonction polynomiale $f = (f_1, \ldots, f_p) \in \mathbf{k}[x]^p$ d'un élément rationnel non nul dans $\mathcal{B}^v(f)$ (ce qui a été démontré dans le chapitre 3). Ceci limite sérieusement l'espoir d'apporter une réponse exhaustive à la question de départ, néanmoins nous sommes capable de montrer l'existence d'un polynôme de Bernstein-Sato générique $r$ationnel dans les cas :
– algébrique où $f_1, \ldots, f_p$ appartiennent à $\mathbf{k}[x][a]$.
– analytique où $f_1, \ldots, f_p$ appartiennent à $\mathbf{C}[x]\{a\}$.
Rappelons encore une fois que H. Biosca démontre l'existence d'un polynôme de Bersntein-Sato générique dans ces situations et avec $\mathbf{k} = \mathbf{C}$.

REMARQUE 5.7. *Dans le cas où les f_j dépendent analytiquement de x, les méthodes que nous utilisons (lemmes de spécialisation) ne nous permettent pas d'aboutir car en regardant bien l'algorithme de T. Oaku, il faut à un certain moment faire un calcul de base standard qui élimine les variables x_i et ∂_{x_i}. Or lorsque l'idéal dépend analytiquement des x_i, il n'est semble-t-il pas possible de les éliminer.*

Avant d'aller plus loin, nous rappelons la notion de polynôme de Bernstein-Sato générique et énonçons les résultats principaux de cette section.

Etant donné $v \in \mathbf{N}^p$ et Q premier dans $\mathbf{k}[a]$ (resp. $\mathbf{C}\{a\}$), considérons les deux situations suivantes :

Cas algébrique: Supposons $f_1, \ldots, f_p$ dans $\mathbf{k}[x][a]$ et Q premier dans $\mathbf{k}[a]$ et supposons qu'aucun f_j ne soit dans $\mathbf{k}[x] \otimes_{\mathbf{k}} Q$.
S'il existe $b(s) \in \mathbf{k}[s] \smallsetminus 0$ et $h(a) \in \mathbf{k}[a] \smallsetminus Q$ tels que :

$$h(a)b(s)f_1^{s_1} \cdots f_p^{s_p} \in \mathbf{A}_n(\mathbf{k})[s][a]f_1^{s_1+v_1} \cdots f_p^{s_p+v_p} + (\mathbf{k}[x, \frac{1}{f_1 \cdots f_p}, s] \otimes_{\mathbf{k}} Q)f^s,$$

alors $b(s)$ est dit polynôme de Bernstein-Sato générique de $f = (f_1, \ldots, f_p)$ sur $V(Q)$.

Cas analytique: Supposons $f_1, \ldots, f_p$ dans $\mathbf{C}[x]\{a\}$ et Q premier dans $\mathbf{C}\{a\}$ et qu'aucun f_j ne soit dans $\mathbf{C}\{x\} \otimes_{\mathbf{C}} Q$.
S'il existe $b(s) \in \mathbf{C}[s] \smallsetminus 0$ et $h(a) \in \mathbf{C}\{a\} \smallsetminus Q$ tels que :

$$h(a)b(s)f_1^{s_1} \cdots f_p^{s_p} \in \mathbf{A}_n(\mathbf{C})[s]\{a\}f_1^{s_1+v_1} \cdots f_p^{s_p+v_p} + (\mathbf{C}\{x\}[\frac{1}{f_1 \cdots f_p}, s] \otimes_{\mathbf{C}} Q)f^s,$$

alors $b(s)$ est dit polynôme de Bernstein-Sato générique de $f = (f_1, \ldots, f_p)$ sur $V(Q)$.

Reprenons les notations du lemme de spécialisation forte, le but de la présente section est de montrer le théorème suivant.

THEOREME 5.8.

Cas algébrique: *Soit Q un idéal premier dans $\mathbf{k}[a]$. Alors il existe $h \in \mathbf{k}[a] \smallsetminus Q$ et $b(s) \in \mathbf{Q}[s] \smallsetminus 0$ tel que pour tout idéal premier $P \subset \mathbf{k}[a]$ tel que $h \notin P \supseteq Q$ on ait*

$$b(s)(\sigma_P(f))^s \in \mathbf{A}_n(\mathbf{k}(P))[s](\sigma_P(f))^{s+v}.$$

Cas analytique: *Soit Q un idéal premier dans $\mathbf{C}\{a\}$. Alors il existe $h \in \mathbf{C}\{a\} \smallsetminus Q$ et $b(s) \in \mathbf{Q}[s] \smallsetminus 0$ tel que pour tout idéal premier $P \subset \mathbf{C}\{a\}$ tel que $h \notin P \supseteq Q$ on ait*

$$b(s)(\sigma_P(f))^s \in \mathbf{A}_n(\mathbf{C}(P))[s](\sigma_P(f))^{s+v}.$$

COROLLAIRE 5.9. *Sous les hypothèses du théorème précédent, pour tout $a \in V(Q) \smallsetminus V(h)$, $b(s)$ appartient à $\mathcal{B}^v(f_{|a})$.*

Comme autre corollaire, nous avons aussi :

COROLLAIRE 5.10. *Il existe une partition finie de $\mathbf{k}^m$ (resp. d'un voisinage de $0 \in \mathbf{C}^m$) constituée d'ensembles localement fermés W (resp. localement fermés analytiques) telle que pour chaque W, il existe $b(s) \in \mathbf{Q}[s]$ qui appartient à $\mathcal{B}^v(f_{|a})$ pour tout a dans W.*

Ce corollaire se démontre de manière similaire au lemme de constructibilité.

La preuve du théorème 5.8 va s'étaler sur trois paragraphes. Dans les deux premiers, nous allons décrire la version absolu et générique de l'algorithme de T. Oaku du calcul de l'idéal de Bernstein-Sato et dans le troisième, nous ferons la preuve proprement dite mais avant cela, voyons comment l'énoncé du théorème 5.8 est équivalent à la notion de polynôme de Bernstein-Sato générique sur $V(Q)$ (notion rappelée plus haut).

Montrons l'équivalence dans le cas algébrique, le cas analytique se traite de la même manière. Etant donné Q premier dans $\mathbf{k}[a]$, il s'agit de montrer l'équivalence entre :

(i): Il existe $b(s) \in \mathbf{Q}[s] \smallsetminus 0$ et $h(a) \in \mathbf{k}[a] \smallsetminus Q$ tels que :

$$h(a)b(s)f_1^{s_1}\cdots f_p^{s_p} \in \mathbf{A}_n(\mathbf{k})[s][a]f_1^{s_1+v_1}\cdots f_p^{s_p+v_p} + (\mathbf{k}[x, \frac{1}{f_1\cdots f_p}, s] \otimes_{\mathbf{k}} Q)f^s.$$

et

(ii): Il existe $b(s) \in \mathbf{Q}[s] \smallsetminus 0$ et $h(a) \in \mathbf{k}[a] \smallsetminus Q$ tels que pour tout idéal premier P tel que $h \notin P \supseteq Q$, on ait :

$$b(s)(\sigma_P(f))^s \in \mathbf{A}_n(\mathbf{k}(P))[s](\sigma_P(f))^{s+v}.$$

L'implication (i)⇒(ii) est triviale, montrons l'implication réciproque. Pour cela, prenons $P = Q$. Cela donne :

$$b(s)([f]_Q)^s = \frac{[U(a,s)]_Q}{[h_0(a)]_Q}([f]_Q)^{s+v},$$

ou encore, en chassant les dénominateurs, $h_0(a)b(s)f^s - U(a,s)f^{s+v}$ est nul pour tout $a \in V(Q)$ avec $U(a,s) \in \mathbf{A}_n(\mathbf{k})[s,a]$ et $h_0(a) \in \mathbf{k}[a] \smallsetminus Q$. Comme aucun f_j n'est dans $\mathbf{k}[x] \otimes_{\mathbf{k}} Q$, cela signifie que $L(a) = h_0(a)b(s) - U(a,s)f^v$ s'annule génériquement sur $V(Q)$ (rappelons que $L(a) \in \mathbf{k}[x,s,1/f_1\cdots f_p][a]$). Comme Q est premier, $L(a)$ est dans $\mathbf{k}[x,s,1/f_1\cdots f_p] \otimes_{\mathbf{k}} Q$. L'implication (ii)⇒(i) est démontrée.

2.1. L'algorithme de T. Oaku absolu. On se place dans le cas où les f_j sont dans $\mathbf{k}[x]$. La référence pour l'algorihtme qui suit est [**O-T**].

(1) Soit $I = < t_j - f_j, j = 1,\dots,p,\ \partial_{x_i} + \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial f_j}{\partial x_i}\partial_{t_j}, i = 1,\dots,n > \subset \mathbf{A}_{n+p}(\mathbf{k})$,

(2) Soit $I_1 = < 1 - y_j y'_j,\ y_j t_j - f_j, j = 1,\dots,p,\ y_1\cdots y_p\partial_{x_i} + \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial f_j}{\partial x_i}\partial_{t_j}, i = 1,\dots,n > \subset \mathbf{A}_{n+p}(\mathbf{k})[y,y'] = \mathbf{A}_{n+p}(\mathbf{k})[y_1,\dots,y_p,y'_1,\dots,y'_p]$,

(3) Soit $I_2 = I \cap \mathbf{A}_n(\mathbf{k})[-\partial_{t_1}t_1,\dots,-\partial_{t_p}t_p] \subset \mathbf{A}_n(\mathbf{k})[s] = \mathbf{A}_n(\mathbf{k})[s_1,\dots,s_p]$ où $s_j = -\partial_{t_j}t_j$.
On calcule I_2 à partir de I_1 de la façon suivante :
   - Soit G_1 une base standard de I_1 par rapport à un ordre qui élimine les variables y_j et y'_j.
   - Soit $G_2 = G_1 \cap \mathbf{A}_{n+p}(\mathbf{k})$.
     Affirmation : G_2 est V-multihomogène i.e. tous ses éléments le sont.
   - Pour chaque $P \in G_2$, notons $\psi(P)(s) \in \mathbf{A}_n(\mathbf{k})[s]$ l'élément obtenu de la manière suivante :
     Notons $P' = S_1\cdots S_p \cdot P$ où $S_j = t_j^{\mathrm{ord}^{V_j}(P)}$ si $\mathrm{ord}_j^V(P) \geq 0$ et $S_j = \partial_{t_j}^{-\mathrm{ord}^{V_j}(P)}$ sinon.
     P' est alors V-multihomogène d'ordre 0 et peut donc s'écrire dans $\mathbf{A}_n(\mathbf{k})[-\partial_t t]$.
     $\psi(P)(s) \in \mathbf{A}_n(\mathbf{k})[s]$ est alors défini par $\psi(P)(-\partial_t t) = P'$.
   - L'idéal I_2 est engendré par l'ensemble $\psi(G_2)$ des $\psi(P)$ pour $P \in G_2$.

(4) Soit $I_3 = I_2 + \mathbf{A}_n(\mathbf{k})[s] \cdot f_1^{v_1}\cdots f_p^{v_p} \subset \mathbf{A}_n(\mathbf{k})[s]$.

(5) Soit $I_4 = I_3 \cap \mathbf{k}[s]$.

(6) I_4 est l'idéal de Bernstein-Sato $\mathcal{B}^v(f_1,\dots,f_p)$.

2.2. L'algorithme de T. Oaku générique. Ici on reprend l'hypothèse sur les f_j, à savoir f_j appartient à $\mathbf{k}[x][a]$ (resp. $\mathbf{C}[x]\{a\}$). Soit Q un idéal premier de $\mathbf{k}[a]$ (resp. $\mathbf{C}\{a\}$).

L'algorithme qui suit est écrit dans le cas algébrique, les modifications dans le cas analytiques sont évidentes.

(1) $I_Q =< t_j - f_j, j = 1,\dots,p,\ \partial_{x_i} + \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial f_j}{\partial x_i}\partial_{t_j}, i = 1,\dots,n > + < Q > \subset \mathbf{A}_{n+p}(\mathbf{k})[a]$

(2) $I_{1,Q} =< 1 - y_j y'_j,\ y_j t_j - f_j, j = 1,\dots,p,\ y_1\cdots y_p\partial_{x_i} + \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial f_j}{\partial x_i}\partial_{t_j}, i = 1,\dots,n > + < Q > \subset \mathbf{A}_{n+p}(\mathbf{k})[y,y'][a] = \mathbf{A}_{n+p}(\mathbf{k})[y_1,\dots,y_p,y'_1,\dots,y'_p][a]$

(3) $I_{2,Q} = I_Q \cap \mathbf{A}_n(\mathbf{k})[-\partial_{t_1}t_1,\dots,-\partial_{t_p}t_p][a] \subset \mathbf{A}_n(\mathbf{k})[s][a] = \mathbf{A}_n(\mathbf{k})[s_1,\dots,s_p][a]$ où $s_j = -\partial_{t_j}t_j$

(4) $I_{3,Q} = I_{2,Q} + \mathbf{A}_n(\mathbf{k})[s][a]\cdot f_1^{v_1}\cdots f_p^{v_p} \subset \mathbf{A}_n(\mathbf{k})[s][a]$

(5) $I_{4,Q} = I_{3,Q} \cap \mathbf{k}[s][a]$

PROPOSITION 5.11. *(1) Soit G une base standard de $I_{4,Q} \subset \mathbf{k}[a][s]$ par rapport à un ordre qui privilégie les variables s_j. Il existe $h_0 \in \mathbf{k}[a] \smallsetminus Q$ tel que pour tout $P \subset \mathbf{k}[a]$ premier tel que $h \notin P \supseteq Q$, $\sigma_P(G)$ est une base standard de $\mathcal{B}^v(\sigma_P(f))$.*

(2) Il existe $h_0 \in \mathbf{k}[a] \smallsetminus Q$ tel que pour tout $a \in V(Q) \smallsetminus V(h_0)$ on ait $\mathcal{B}^v(f_{|a}) = I_{4,Q_{|a}}$.

(3) Il existe $h_1 \in \mathbf{k}[a] \smallsetminus Q$ tel que le polynôme de Hilbert de $I_{4,Q_{|a}}$ soit constant sur $V(Q) \smallsetminus V(h_1)$.

La preuve des deux premiers points est identique à celle de la proposition 5.5 à part que pour le premier point on utilise le lemme de spécialisation forte au lieu du faible. Pour le troisième point, on se réfère au paragraphe consacré au polynôme de Hilbert générique (du chapitre précédent).

Remarquons que le point 1 donne une sorte de constructibilité en un sens faible. En effet, comme dans le lemme de constructibilité, on peut partitionner $\mathbf{k}^m$ en ensembles localement fermés W de telle sorte que sur chaque W il existe un ensemble $G_W \subset \mathbf{k}[a][s]$ tel que pour tout a dans W, le spécialisé $G_{W|a}$ engendre $\mathcal{B}^v(f_{|a})$. Dit autrement, l'idéal $\mathcal{B}^v(f_{|a})$ est continu par rapport à a sur chaque W. Nous avons employé le terme de constructibilité faible car on ne sait pas si $\mathcal{B}^v(f_{|a})$ est constant sur W (comme c'est le cas quand $p = 1$).

REMARQUE 5.12. *En remplaçant $\mathbf{k}[a]$ par $\mathbf{C}\{a\}$ dans la proposition précédente, on obtient la version analytique de cette même proposition.*

En combinant les deux points de la proposition précédente, c'est-à-dire en se plaçant sur $V(Q) \smallsetminus V(h_0h_1)$, on est en mesure d'appliquer le lemme de constructiblité, ce qui donne :

COROLLAIRE 5.13. *L'espace $\mathbf{k}^m$ (resp. Un voisinage de $0 \in \mathbf{C}^m$) se partionne en ensembles localement fermés (resp. localement fermés analytiques) W de façon telle que sur chaque W le polynôme de Hilbert de $\mathcal{B}^v(f_{|a})$ est constant.*

2.3. Preuve du théorème 5.8. La voici dans le cas algébrique. Il n'y pas de plus de difficultés dans le cas analytique.

Démonstration. Revenons à l'algorithme générique de T. Oaku du paragraphe précédent. En appliquant deux fois le lemme de spécialisation forte (d'abord dans $\mathbf{A}_{n+p}(\mathbf{k})[y,y'][a]$ puis dans $\mathbf{A}_n(\mathbf{k})[s][a]$), on obtient $h_1 \in \mathbf{k}[a] \smallsetminus Q$ et $G \subset I_{4,Q}$ tels que pour tout $P \subset \mathbf{k}[a]$ premier tel que $h_1 \notin P \supseteq Q$, l'ensemble $\sigma_P(G)$ soit une base standard de $\sigma_P(I_{4,Q})$ (pour un ordre qui nous importe peu, ce qui compte c'est que $\sigma_P(G)$ engendre $\sigma_P(I_{4,Q})$).
D'autre part, il est facile de montrer (toujours à l'aide du lemme de spécialisation forte) qu'il existe $h_2 \notin Q$ tel que pour tout $P \supseteq Q$ ne contenant pas h_2, l'idéal de Bernstein-Sato $\mathcal{B}^v(\sigma_P(f)) \subset \mathbf{k}(P)[s]$ est égal à $\sigma_P(I_{4,Q})$ (remarquons que c'est exactement ce que dit le premier point de la proposition 5.11).
Maintenant, d'après le chapitre 3, il existe dans $\mathcal{B}^v(\sigma_Q(f))$ un élément $b(s)$ qui est dans $\mathbf{Q}[s]$. Ainsi pour chaque $g \in G$, il existe $A_g \in \mathbf{k}[a,s]$ et $a_g \in \mathbf{k}[a] \smallsetminus Q$ tels que :

$$b(s) = \sum_{g \in G} \frac{[A_g]}{[a_g]} \cdot \frac{[g]}{1}$$

où $[\cdot]$ désigne la classe dans $\mathbf{k}[a]/Q$. Notons alors $h_3 = \prod_{g \in G} a_g$, on a $h_3 \notin Q$. De plus, on a $h_3 b(s) - \sum_{g \in G} A'_g \cdot g \in \mathbf{k}[a,s] \cdot Q \subset I_{4,Q}$ avec $A'_g \in \mathbf{k}[a,s]$, ainsi $h_3 b(s) \in I_{4,Q}$.
En posant $h = h_1 h_2 h_3 \notin Q$, il est clair que pour tout P premier de $\mathbf{k}[a]$ tel que $h \notin P \supseteq Q$, le polynôme $b(s)$ appartient à $\mathcal{B}^v(\sigma_P(f))$. $\square$

CHAPITRE 6

Constructibilité de l'éventail de Gröbner

Dans ce chapitre, on considère un idéal $I \subset \mathbf{A}_n(\mathbf{k})[a]$ où a est comme avant un système de paramètres algébriques ou analytiques. On cherche à savoir comment se comporte l'éventail de Gröbner de $h(I_{|a})$ quand a parcourt $\mathbf{k}^m$ (resp. un voisinage de 0 dans $\mathbf{C}^m$). La réponse est que leur nombre est fini et que l'espace des paramètres se partitionne en ensembles localement fermés (resp. localement fermés analytiques) sur lesquels l'eventail de Gröbner de $h(I_{|a})$ est constant. Les méthodes utilisées sont les mêmes que précédement. En fait l'idée est d'être en mesure d'appliquer le lemme de constructibilité.

1. Rappels et énoncé du résultat principal

Rappelons comment est défini l'éventail de Gröbner associé à un idéal I de $\mathbf{A}_n(\mathbf{k})$ d'après [**A-C-G 1**] et [**A-C-G 2**].
Remarque : nous citons [**A-C-G 2**] car les auteurs y ont donné des définitions et des résultats (plus précis que dans [**A-C-G 1**]) dont nous nous inspirons ici...

Notons $\mathcal{U}$ l'ensemble des formes linéaires $L : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ vérifiant $L(\alpha, \beta) = \sum_i e_i\alpha_i + \sum_i f_i\beta_i$ avec $e_i + f_i \geq 0$. A une telle forme L on peut associer une filtration $F_{L,\bullet}$ sur $\mathbf{A}_n(\mathbf{k})$ ainsi qu'un gradué associé $\mathrm{gr}^L(\mathbf{A}_n(\mathbf{k}))$. Cette filtration s'étend à $\mathbf{A}_n(\mathbf{k})\langle z\rangle$ et donne le gradué $\mathrm{gr}^L(\mathbf{A}_n(\mathbf{k})\langle z\rangle)$. Pour $P \in \mathbf{A}_n(\mathbf{k})$ (resp. $P \in \mathbf{A}_n(\mathbf{k})\langle z\rangle$) on définit le symbole principal $\sigma^L(P)$ dans $\mathrm{gr}^L(\mathbf{A}_n(\mathbf{k}))$ (resp. dans $\mathrm{gr}^L(\mathbf{A}_n(\mathbf{k})\langle z\rangle)$) et pour un idéal $I \subset \mathbf{A}_n(\mathbf{k})$, on note $\mathrm{gr}^L(I)$ l'idéal de $\mathrm{gr}^L(I)$ engendré par le symbole principal des éléments de I (et de même pour un idéal de $\mathbf{A}_n(\mathbf{k})\langle z\rangle$).
Maintenant pour L et L' dans $\mathcal{U}$, on définit la relation d'équivalence suivante :

$$L \sim L' \iff gr^L(\mathbf{A}_n(\mathbf{k})\langle z\rangle) \simeq gr^{L'}(\mathbf{A}_n(\mathbf{k})\langle z\rangle) \text{ et } gr^L(h(I)) \simeq gr^{L'}(h(I)).$$

La partition de $\mathcal{U}$ induite par cette relation est ce qu'on appelle l'éventail de Gröbner de $h(I)$, on le note $\mathcal{E}(h(I))$. Dans [**A-C-G 1**] et [**A-C-G 2**], les auteurs ont montré que cette partition était une partition finie constituée de cônes polyhédraux convexes rationnels.

Il y a une autre manière de définir cet éventail :
Considérons les ordres $<_L$ sur $\mathbf{N}^{2n}$ et $<_L^h$ sur $\mathbf{N}^{2n+1}$ définis par :

$$(\alpha, \beta) <_L (\alpha', \beta') \iff L(\alpha, \beta) < L(\alpha', \beta') \text{ ou } (= \text{ et } (\alpha, \beta) <_0 (\alpha', \beta'))$$

où $<_0$ est un bon ordre sur $\mathbf{N}^{2n}$ fixé.

$$(\alpha, \beta, k) <_L^h (\alpha', \beta', k') \iff \begin{cases} |\alpha| + |\beta| + k < |\alpha'| + |\beta'| + k' \\ \text{ou } (= \text{ et } (\alpha, \beta) <_L (\alpha', \beta')) \end{cases}$$

Dans [**A-C-G 1**] et [**A-C-G 2**], les auteurs montrent que l'ensemble des $\exp_{<_L^h}(h(I))$ pour $L \in \mathcal{U}$ est fini et notent $\mathcal{U}_E = \{L \in \mathcal{U} | \exp_{<_L^h}(h(I)) = E\}$ pour $E \subseteq \mathbf{N}^{2n+1}$

vérifiant $E = E + \mathbf{N}^{2n+1}$. Pour $L \in \mathcal{U}$, considérons $g_1, \ldots, g_r$ la base standard réduite minimale de $h(I)$ par rapport à $<_L^h$ et définissons $L \sim L'$ par

$$L \sim L' \iff \forall i = 1, \ldots, r \quad \sigma^L(g_i) = \sigma^{L'}(g_i).$$

Pour L et L' dans un même $\mathcal{U}_E$, cette relation est une relation d'équivalence. On partitionne alors $\mathcal{U}$ en l'union finie des $\mathcal{U}_E$ et sur chaque $\mathcal{U}_E$ on considère la partition induite par la relation précédente. La partition de $\mathcal{U}$ ainsi obtenue est alors l'éventail de Gröbner de $h(I)$. En fait, il y a un certain abus de notations car pour pouvoir écrire $\sigma^L(Q_i) = \sigma^{L'}(Q_i)$ il faut déja que $\mathrm{gr}^L(\mathbf{A}_n(\mathbf{k})\langle z \rangle)$ et $\mathrm{gr}^{L'}(\mathbf{A}_n(\mathbf{k})\langle z \rangle)$ soient isomorphes. Par conséquent, la partition de $\mathcal{U}$ se fait de la manière suivante, on le partitionne de sorte que les gradués de $\mathbf{A}_n(\mathbf{k})\langle z \rangle$ soient isomorphes, cette partition est constituée de cônes polyhédraux rationnels convexes (voir la section 2 du chapitre premier). Et c'est sur chaque constituant de cette partition qu'on effectue la construction précédente.

Nous reprenons la situation de l'introduction.
A partir de maintenant, on désigne par I un idéal de $\mathbf{A}_n(\mathbf{k})[a]$ (resp. $\mathbf{A}_n(\mathbf{C})\{a\}$) et Q un idéal premier de $\mathbf{k}[a]$ (resp. $\mathbf{C}\{a\}$). Dans cette section, on se propose de montrer la

PROPOSITION 6.1. *Il existe $h_Q \in \mathbf{k}[a] \smallsetminus Q$ (resp. $\mathbf{C}\{a\} \smallsetminus Q$) tel que l'éventail de Gröbner $\mathcal{E}(h(I_{|a}))$ est constant sur $V(Q) \smallsetminus V(h_Q)$.*

En appliquant le lemme de constructiblité, on démontre le théorème suivant :

THEOREME 6.2. *Il existe une partition de $\mathbf{k}^m$ (resp. un voisinage de 0 dans $\mathbf{C}^m$) constituée d'ensembles localement fermés (resp. localement fermés analytiques) W telle que sur chaque W l'éventail de Gröbner de $h(I_{|a})$ est constant.*

L'objet de la section est de mettre en place une preuve de la proposition 6.1. Cette preuve sera basée sur le lemme de spécialisation. Avant tout nous devons nous pencher sur les opérations d'homogénéisation et de spécialisation ce qui est le but du paragraphe suivant.
Dans la suite, nous noterons $J_Q = h(I) + < Q > \subset \mathbf{A}_n(\mathbf{k})\langle z \rangle[a]$ (resp. $\mathbf{A}_n(\mathbf{C})\langle z \rangle\{a\}$).

2. Homogénéisation et spécialisation

Pour $P \in \mathbf{A}_n(\mathbf{k})[a]$, nous définissons son homogénéisé $h(P)$ de la façon suivante : on écrit $P = \sum_{\alpha\beta} c_{\alpha\beta}(a) x^\alpha \partial_x^\beta$ et on pose $h(P) = \sum c_{\alpha\beta}(a) x^\alpha \partial_x^\beta z^{d-|\alpha|-|\beta|}$ où $d = \max\{|\alpha| + |\beta| / \, c_{\alpha\beta}(a) \neq 0\}$ est le degré total en x et ∂_x de P.
On définit alors $h(I)$ comme l'idéal de $\mathbf{A}_n(\mathbf{k})\langle z \rangle[a]$ engendré par les $h(P)$ pour $P \in I$.

Les notations précédentes se généralisent facilement au cas analytique.

LEMME 6.3. *Il existe $h_0(a) \in \mathbf{k}[a] \smallsetminus Q$ (resp. $\mathbf{C}\{a\} \smallsetminus Q$) tel que pour tout $a_0 \in V(Q) \smallsetminus V(h_0)$ on ait $h(I_{|a_0}) = h(I)_{|a_0}$.*

Nous allons démontrer ce lemme uniquement dans le cas algébrique car la preuve marche aussi bien dans l'autre cas. Soit $<^T$ l'ordre total sur $\mathbf{N}^{2n}$ définit par

$$(\alpha, \beta) <^T (\alpha', \beta')$$
$$\iff |\alpha| + |\beta| < |\alpha'| + |\beta'| \text{ ou } (= \text{ et } (\alpha, \beta) <_0 (\alpha', \beta'))$$

où $<_0$ désigne un bon ordre quelconque compatible avec + sur $\mathbf{N}^{2n}$. On note aussi $\prec^T$ l'ordre sur $\mathbf{N}^{2n+m}$ associé à $<^T$ (voir les notations génériques dans le chapitre 4). Pour la preuve du lemme, nous aurons besoin de ceci :

AFFIRMATION 6.4. *Soit I_0 un idéal de $\mathbf{A}_n(\mathbf{k})$ et $g_1, \ldots, g_r \in I$ une $<^T$-base standard alors les $h(g_i)$ engendrent $h(I_0) \subset \mathbf{A}_n(\mathbf{k})\langle z \rangle$.*

Démonstration. Soit $g \in I_0$ alors par division, on peut écrire $g = \sum_1^r q_i g_i$ avec $\deg(g) \geq \deg(q_i g_i)$ si $q_i \neq 0$. Par conséquent $h(g) = \sum_1^r z^{l_i} h(q_i) h(g_i)$ avec $l_i = \deg(g) - \deg(q_i g_i)$. □

démonstration du lemme 6.3. Notons $I_Q = I + < Q > \subset \mathbf{A}_n(\mathbf{k})[a]$. Soit $G = \{g_1, \ldots, g_r, g_{r+1}, \ldots, g_q\}$ la $\prec^T$-base standard réduite minimale de I_Q (où seuls les r premiers ne sont pas dans Q) et $h_0 = \prod_{i=1}^{r} lc_{<^T}(g_i)$ (comme dans le lemme de spécialisation faible). Soit $a_0 \in V(Q) \setminus V(h_0)$. Nous allons montrer que $h(I_{|a_0})$ et $h(I)_{|a_0}$ admettent un même système de générateurs.
Soit $f \in I \subset I_Q$.
On a $f = \sum_{i=1}^q u_i g_i$ avec $\deg^T(f) \geq \deg^T(u_i g_i)$ par conséquent,

$$\begin{aligned} h(f) &= \sum_{i=1}^{q} z^{l_i} h(u_i) h(g_i) \text{ avec } l_i \in \mathbf{N} \\ &= \sum_{i=1}^{r} z^{l_i} h(u_i) h(g_i) + \sum_{i=r+1}^{q} z^{l_i} h(u_i) g_i \text{ car } g_{r+k} \in Q \subset \mathbf{k}[a] \text{ si } k \geq 1 \end{aligned}$$

Ainsi $h(f)_{|a_0}$ s'écrit comme combinaison des $\{h(g_i)_{|a_0} \,/\, i = 1, \ldots, r\}$ or $h(I)_{|a_0}$ est engendré par les $h(f)_{|a_0}$ pour $f \in I$ donc par les $h(g_i)_{|a_0}$ $i = 1, \ldots, r$.
D'autre part (par le lemme de spécialisation faible) $g_{1|a_0}, \ldots, g_{r|a_0}$ forment une $<^T$-base standard de $I_{|a_0}$ donc par l'affirmation ci-avant, $h(I_{|a_0})$ est engendré par les $h(g_{i|a_0})$.
Pour conclure, il ne reste plus qu'à remarquer que pour $i = 1, \ldots, r$, $h(g_{i|a_0}) = h(g_i)_{|a_0}$ car $(\exp_{<^T}(g_i) = \exp_{<^T}(g_{i|a_0}))$. □

3. Résultats de finitude

Suivant le chapitre 4, nous notons $\prec_L^h$ l'ordre sur $\mathbf{N}^{2n+m+1}$ défini à partir de $<_L^h$ sur $\mathbf{N}^{2n+1}$.

LEMME 6.5. *Pour $f \in \mathbf{A}_n(\mathbf{k})\langle z \rangle[a]$ (resp. $\mathbf{A}_n(\mathbf{C})\langle z \rangle\{a\}$), l'ensemble $\{\exp_{\prec_L^h} / L \in \mathcal{U}\}$ est fini.*

Démonstration. Dans le cas algébrique, c'est immédiat car le diagramme de Newton de f est fini. Plaçons nous dans le cas analytique. On écrit $f = \sum c_{\alpha\beta k}(a) x^\alpha \partial_x^\beta z^k$. Pour tout (α, β, k), on note $\eta(\alpha, \beta, k)$ l'exposant de $c_{\alpha\beta k}(a)$ par rapport à $\prec_L^h$. Rappelons que cet exposant est égal à $\exp_{\prec_0^{an}}(c_{\alpha\beta k}(a))$ (voir les notations génériques dans le chapitre 4). Il est alors clair que $\exp_{\prec_L^h}(f)$ se trouve parmi l'ensemble des $(\alpha, \beta, k, \eta(\alpha, \beta, k))$ pour (α, β, k) dans le nuage générique de f qui est fini. □

Rappelons que $J_Q \subset \mathbf{A}_n(\mathbf{k})\langle z \rangle[a]$ (resp. $\mathbf{A}_n(\mathbf{C})\langle z \rangle\{a\}$) désigne $h(I) + < Q >$.

LEMME 6.6. *L'ensemble* $\{\exp_{\prec^h_L}(J_Q)/L \in \mathcal{U}\}$ *est fini.*

La preuve est presque mot à mot celle du théorème 5 de [**A-C-G 2**]. On en déduit immédiatement le corollaire suivant.

COROLLAIRE 6.7. *L'ensemble* $\{\exp_{<^h_L}(J_Q)/L \in \mathcal{U}\}$ *est fini.*

Pour $E \subset \mathbf{N}^{2n+1}$, notons $\mathcal{U}^{gen}_E = \{L \in \mathcal{U}/ \exp_{<^h_L}(J_Q) = E\}$. Notons aussi $ES^{gen}(J_Q)$ l'ensemble des escaliers génériques $\exp_{<^h_L}(J_Q)$ de J_Q lorsque L parcourt $\mathcal{U}$.

PROPOSITION 6.8. *Soit* $E \in ES^{gen}(J_Q)$ *et* $L \in \mathcal{U}^{gen}_E$ *alors il existe* $g_1, \ldots, g_r$ *dans* J_Q *tels que :*

(a): $\{\exp_{<^h_L}(g_i),\ i = 1, \ldots, r\}$ *engendre* E *de façon minimale*

(b): $\forall i = 1, \ldots, r,\ \mathcal{N}^{gen}(g_i) \setminus \exp_{<^h_L}(g_i) \subset \mathbf{N}^{2n+1} \setminus E$

(c): $\forall i = 1, \ldots, r,\ coef(g_i) \cap Q = \emptyset$

Nous appellerons un tel système une E*-pseudo-base standard de* J_Q*.*

Remarquons qu'un tel système n'est pas unique et n'est pas une base standard de J_Q mais fournit (génériquement) après spécialisation (à des multiples de $\mathbf{k}$ près dans le cas algébrique et $\mathbf{C}$ dans le cas analytique) la base standard réduite minimale. Plus précisement nous avons :

COROLLAIRE 6.9. *Soit* $L' \in \mathcal{U}^{gen}_E$ *et* $a_0 \notin V(\prod_{i=1}^r lc_{<^h_L}(g_i))$ *alors les* $g_{i|a_0}$ *forment la* $<^h_{L'}$*-base standard réduite minimale de* $J_{Q|a_0}$*.*

En effet, le point important est que $\mathrm{cp}_{<^h_L}(g_i) = \mathrm{cp}_{<^h_{L'}}(g_i)$ ce qui permet d'appliquer le lemme 1.28.

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION. Soit $L \in \mathcal{U}^{gen}_E$ et soit $\{g'_1, \ldots, g'_r, \ldots\}$ une $\prec^h_L$-base standard minimale de J_Q et quitte à renuméroter les g'_i, on peut supposer que l'ensemble des $\exp_{<^h_L}(g'_i)$ pour $i = 1, \ldots, r$ engendre E de façon minimale. Pour chaque $i = 1, \ldots, r$, soit $g_i \in J_Q$ l'élément qu'on obtient en appliquant le lemme de réduction à g'_i. L'ensemble des g_i ainsi obtenus répond au problème. □

4. Preuve de la proposition 6.1

La preuve est la même dans les cas algébrique et analytique, la voici.

DÉMONSTRATION. Pour chaque $E \in ES^{gen}(J_Q)$ soit G_E une (on fait un choix) E-pseudo base de J_Q. On pose alors

$$h_Q = h_0 \cdot \prod_{E \in ES^{gen}(J_Q)} \prod_{g \in G_E} \prod_{c \in coef(g)} c$$

où h_0 a été construit à la section 1 du présent chapitre. Nous allons montrer l'équivalence suivante pour $L, L' \in \mathcal{U}$ et $a_1, a_2 \in V(Q) \setminus V(h_Q)$:

$$gr^L(h(I_{|a_1})) \simeq gr^{L'}(h(I_{|a_1})) \iff gr^L(h(I_{|a_2})) \simeq gr^{L'}(h(I_{|a_2}))$$

ce qui montrera bien la proposition 6.1.
Les choses étant symétriques en a_1 et a_2 nous montrerons seulement l'implication

"gauche $\Rightarrow$ droite".

Du fait que $a_1 \notin V(h_0)$, nous avons l'égalité $gr^L(J_{Q|a_1}) = gr^{L'}(J_{Q|a_1})$ et comme $gr^L(J_{Q|a_1})$ et $J_{Q|a_1}$ ont le même escalier par rapport à $<_L^h$ et à $<_{L'}^h$, les formes L et L' sont dans un même $\mathcal{U}_E^{gen}$ pour $E \in ES^{gen}(J_Q)$.
Soit alors $g_1, \ldots, g_r$ les éléments de G_E (ils vérifient les conditions de la proposition 6.8). Par spécialisation en a_1, les $g_{i|a_1}$ forment la base standard réduite minimale de $h(I_{|a_1})$ (à des multiples de $\mathbf{k}$ près, resp. $\mathbf{C}$ près) pour $<_L^h$ et $<_{L'}^h$ donc

$$\forall i = 1, \ldots, r \ \sigma^L(g_{i|a_1}) = \sigma^{L'}(g_{i|a_1})$$

or, du fait que $a_1 \notin V(h_Q)$, nous avons $\sigma^L(g_{i|a_1}) = \sigma^L(g_i)_{|a_1}$ et de même pour L'. Pour la même raison, nous avons aussi :

$$\sigma^L(g_i)_{|a_1} = \sigma^{L'}(g_i)_{|a_1} \iff \sigma^L(g_i) = \sigma^{L'}(g_i).$$

Après spécialisation en a_2, on obtient :

$$\sigma^L(g_i)_{|a_2} = \sigma^{L'}(g_i)_{|a_2}$$

puis

$$\sigma^L(g_{i|a_2}) = \sigma^{L'}(g_{i|a_2})$$

or les $g_{i|a_2}$ forment la $<_L^h$ (et la $<_{L'}^h$)-base standard réduite minimale de $h(I_{|a_2})$, par conséquent :

$$gr^L(h(I_{|a_2})) = gr^{L'}(h(I_{|a_2})).$$

La proposition 6.1 est démontrée. $\square$

5. Application au polynôme de Bernstein-Sato générique

On se donne $v = (v_1, v_2) \in \mathbf{N}^2$ et f_1, f_2 (i.e. on suppose $p = 2$, nous verrons pourquoi plus loin) dépendant polynomialement de x et dépendant d'un système de paramètres a algébriques (resp. analytiques). Soit Q un idéal premier de $\mathbf{k}[a]$ (resp. $\mathbf{C}\{a\}$). On se propose de montrer le résultat suivant :

PROPOSITION 6.10. *Il existe $h = h(a) \notin Q$ et il existe $b(s_1, s_2) \in \mathbf{Q}[s_1, s_2]$ tel que pour tout $a \in V(Q) \smallsetminus V(h)$ l'idéal de Bernstein-Sato $\mathcal{B}^v((f_1, f_2)_{|a})$ contienne $b(s_1, s_2)$.*

Nous savons déja que ce résultat est vrai pour p quelconque, ce fut l'objet du chapitre précédent mais nous proposons ici une autre preuve basée sur la proposition 6.1 qui assure que l'éventail de Gröbner est constant génériquement. La raison pour laquelle on suppose $p = 2$ est que nous allons aussi nous appuyer sur le théorème 2.10 pour lequel l'assertion 2 n'est valable que pour $p = 2$.

Nous n'allons pas donner tous les détails de la preuve mais seulement les principales étapes. Pour ne pas alourdir les choses, nous décrirons la preuve dans le cas algébrique. Le cas analytique se traite de la même façon.

Notons I l'idéal de $\mathbf{A}_n(\mathbf{k})[a]$ engendré par $t_j - f_j$ pour $j = 1, 2$ et $\partial_{x_i} + \sum_{j=1}^2 \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \partial_{t_j}$ et $I_Q = I + <Q>$. On note comme précédement $h(I) \subset \mathbf{A}_n(\mathbf{k})\langle z\rangle[a]$ et $J_Q = h(I) + <Q>$. Tout d'abord ce qui nous intéresse ici, c'est l'éventail $\mathcal{E}_V$ mais nous pouvons montrer comme cela a été fait pour $\mathcal{E}$ que :

– Il existe $h_1 \notin Q$ tel que pour tout $a \in V(Q) \smallsetminus V(h_1)$ l'éventail $\mathcal{E}_V(h(I_{|a}))$ est constant. Notons le $\mathcal{E}_V^{gen}$.

Nous avons vu au chapitre 3 qu'il existe un algorithme de calcul de b_L pour chaque $L \in Sq(\mathcal{E}_V^{gen})$. Cet algorithme donne lieu à l'assertion suivante :

– Il existe $h_2 \notin Q$ tel que pour tout $a \in V(Q) \smallsetminus V(h_2)$ le b_L de l'idéal $I_{|a}$ soit constant. On le note naturellement b_L^{gen}.

Cette assertion se montre en suivant les méthodes du chapitre précédent où nous avions utilisé l'algorithme de T. Oaku générique.

Dans l'assertion 2 du théorème 2.10, il est démontré l'existence de $\kappa = (\kappa^1, 0)$ tel que :

$$\overline{V}_w(\mathbf{A}_n(\mathbf{k})/I_0) \subset V_{w+\kappa}(\mathbf{A}_n(\mathbf{k})/I_0) \text{ pour tout } w \in \mathbf{Z}^2.$$

Or si on observe la construction d'un tel κ on s'aperçoit qu'il est entièrement définit par le nuage des bases de Gröbner réduites associé à $\sigma \in \mathcal{E}_V(h(I_0))$.

De plus dans la preuve de la constance générique de l'éventail de Gröbner on voit que pour a en dehors d'un certain $h_Q \notin Q$, le nuage des bases de Gröbner de $I_{|a}$ associées à chaque cône σ est constant, ce qui entraine :

– Il existe $h_3 \notin Q$ et il existe $\kappa = (\kappa^1, 0)$ tels que pour tout $a \in V(Q) \smallsetminus V(h_3)$,
$$\overline{V}_w(\mathbf{A}_n(\mathbf{k})/I_{|a}) \subset V_{w+\kappa}(\mathbf{A}_n(\mathbf{k})/I_{|a}) \text{ pour tout } w \in \mathbf{Z}^2.$$
On le note κ^{gen}.

Posons maintenant

$$b(s_1, s_2) = \prod_{L \in \mathcal{E}_V^{gen}} \prod_{-L(\kappa^{gen}+v) < k \leq 0} b_L^{gen}(L(s_1, s_2) - k).$$

On voit alors que pour tout $a \in V(Q) \smallsetminus V(h_1h_2h_3)$, $b(s_1, s_2)$ appartient à $\mathcal{B}^v(f_{|a})$.

Troisième partie

Aspects plus calculatoires

CHAPITRE 7

Algorithm for computing Bernstein-Sato ideals associated with a polynomial mapping

Ce chapitre est dans une certaine mesure indépendant du reste de la thèse. Il s'agit d'un travail réalisé au cours de ma première année de thèse. Ce travail a donné lieu à un article [**Ba**] (qui porte le titre du présent chapitre) publié au Journal of Symbolic Computation no 32 pages 643-662 paru en 2001. Cet article consiste en un algorithme de calcul de certains idéaux de Bernstein-Sato. L'algorithme de T. Oaku utilisé dans le chapitre 5 existait avant cet article. D'autre part pour $p = 1$, il existait un autre algorithme aussi dû à T. Oaku et c'est ce dernier que nous avons généralisé dans le cas $p \geq 2$. Les deux algorithmes se font par des calculs de bases de Gröbner. Il est bien connu que le nombre de variables compte énormement dans la complexité algorithmique de ce genre de calculs. Aussi notre algorithme permet de calculer certains idéaux de Bernstein-Sato avec des calculs de bases de Gröbner qui font intervenir au plus $2n+3p$ variables contre $2n+4p$ variables pour l'algorithme de T. Oaku. C'est ce gain dans le nombre de variables qui justifie l'intérêt de ce nouvel algorithme. Néanmoins, il existe d'autres conséquences des techniques utilisées dans cet article. C'est pour cette raison que le lecteur trouvera à la suite de l'article une section consacrée à leur mise en valeur.

Algorithm for Computing Bernstein-Sato Ideals Associated with a Polynomial Mapping

ROUCHDI BAHLOUL

Abstract : Let $f_1, \dots, f_p$ be polynomials in n variables with coefficients in a field $\mathbf{K}$. We associate with these polynomials a number of functional equations and of related ideals $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}_j$ and $\mathcal{B}_\Sigma$ of $\mathbf{K}[s_1, \dots, s_p]$ called Bernstein-Sato ideals. Using standard basis techniques, our purpose is to give an algorithm for computing generators of $\mathcal{B}_j$ and $\mathcal{B}_\Sigma$.

1. Introduction

Let n, p be two strictly positive integers.
Let $f_1(x), \dots, f_p(x) \in \mathbf{K}[x] := \mathbf{K}[x_1, \dots, x_n]$ be p polynomials of n variables with coefficients in a field $\mathbf{K}$ of characteristic zero. Denote by $\mathbf{A}_n = \mathbf{K}[x_1, \dots, x_n] < \partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_n} >$ the Weyl algebra with n variables and let $s_1, \dots, s_p$ be new variables. Denote by $\mathcal{L} = \mathbf{K}[x][f_1^{-1}, \dots, f_p^{-1}, s_1, \dots, s_p] \cdot f^s$ the free module generated by the symbol f^s where f^s is a notation for $f_1^{s_1} \cdots f_p^{s_p}$. $\mathcal{L}$ has a natural $\mathbf{A}_n[s]$-module structure where $\mathbf{A}_n[s] := \mathbf{A}_n[s_1, \dots, s_p]$. We have for instance :

$$\partial_{x_i}(g(x,s) f^{s-m}) = \Big(\frac{\partial g}{\partial x_i} f^{-m} + \sum_{j=1}^{p} g(x,s)(s_j - m_j) \frac{\partial f_j}{\partial x_i} f_j^{-1} f^{-m} \Big) f^s$$

where $g(x,s) \in \mathbf{K}[x][s]$ and $m \in \mathbf{N}^p$.
Consider the following ideals of $\mathbf{K}[s]$, called Bernstein-Sato ideals :

- $\mathcal{B} = \{b(s) \in \mathbf{K}[s] \ / \ b(s) f^s \in \mathbf{A}_n[s] f^{s+1}\}$,
- $\mathcal{B}_j = \{b(s) \in \mathbf{K}[s] \ / \ b(s) f^s \in \mathbf{A}_n[s] f_j f^s\}$ for $j \in \{1, \dots, p\}$,
- $\mathcal{B}_\Sigma = \{b(s) \in \mathbf{K}[s] \ / \ b(s) f^s \in \sum_{j=1}^{p} \mathbf{A}_n[s] f_j f^s\}$,

where $f^{s+1} := f_1^{s_1+1} \cdots f_p^{s_p+1}$.
Remark that, in the local analytic case, these ideals have been studied by C. Sabbah (see [**S1**]) who showed that they are not zero. In the algebraic case studied here, $\mathcal{B} \neq 0$ can be obtained by a way similar to that used when $p = 1$ (see [**Be**] and [**Bj**]). We take the notations of H. Maynadier (see [**May1**] and [**May2**]).
Our purpose, in this paper, is to give an explicit algorithm for computing the ideals $\mathcal{B}_j$ and $\mathcal{B}_\Sigma$ (i.e. an algorithm that gives generators of these ideals).
In [**O-T**], T. Oaku and N. Takayama solved the problem for $\mathcal{B}$ using the relation :

$$\mathcal{B} = (\mathrm{Ann} f^s + \mathbf{A}_n[s] f_1 \cdots f_p) \cap \mathbf{K}[s]$$

by a computation of $\mathrm{Ann} f^s$ the annihilator of f^s in $\mathbf{A}_n[s]$. The ideal $\mathrm{Ann} f^s$ is obtained as the intersection of the ideal I (the annihilator of f^s in $\mathbf{A}_{n+p} = \mathbf{A}_n[t_1, \dots, t_p] < \partial_{t_1}, \dots, \partial_{t_p} >$, see section 4 of the present paper for instance) and the subring $\mathbf{A}_n[-\partial_{t_1} t_1, \dots, -\partial_{t_p} t_p]$. This intersection is obtained by a Groebner basis computation in $2n + 4p$ variables.
The relations :

$$\mathcal{B}_j = (\mathrm{Ann} f^s + \mathbf{A}_n[s] f_j) \cap \mathbf{K}[s],$$
$$\mathcal{B}_\Sigma = (\mathrm{Ann} f^s + \mathbf{A}_n[s] f_1 + \cdots + \mathbf{A}_n[s] f_p) \cap \mathbf{K}[s]$$

show that our initial problem is completely resolved using this method.
On the other hand, in the case $p = 1$, those three kinds of ideals are equal and

another algorithm to compute $\mathcal{B}$ has been proposed by T. Oaku (in [**O2**]) . In this paper, T. Oaku works with a filtration, called the V-filtration, which gives what we call the V-order, and with these objects he computes a V-standard basis of the ideal I of $\mathbf{A}_{n+1} = \mathbf{A}_n[t] < \partial_t >$, the annihilator of f^s in $\mathbf{A}_{n+1}$, after which he obtains generators of an ideal of $\mathbf{A}_n[s]$ denoted $\psi(I)$ and with an elimination algorithm, he finally obtains a system of generators of the ideal $\mathcal{B}$.

In the present paper, we try to generalize this algorithm. In our case, where $p \geq 2$, we have to deal with p filtrations $V_1, \ldots, V_p$ or equivalently with a multifiltration V. For each ideal $J = \mathcal{B}_j, \mathcal{B}_\Sigma$, we have the $\prec_J$-order which allows us to compute a $\prec_J$-standard basis of I in $\mathbf{A}_{n+p}$ but the difficulty in our case is the following : to compute $\psi_J(I)$ (the analogue of Oaku's $\psi(I)$) we have to find generators of I which are adapted to the ideal J (for instance, V-regular for $\mathcal{B}_\Sigma$, Bj-good for $\mathcal{B}_j$, etc) and for this reason, we use an homogenization technique (see section 6) which makes impossible a number of undesirable divisions. After this homogenization, the rest of the algorithm is similar to Oaku's.
Remark that with this method, Groebner basis computations are done in (at most) $2n + 3p$ variables.

In section 2, we recall how to compute a standard basis with respect to an order which is not a well-order.
In section 3, we introduce the V-multifiltration in $\mathbf{A}_{n+p}$ and all the objects which are linked with it, and all the usual elementary properties of these objects.
In section 4, and following B. Malgrange (see [**Mal**]), we introduce I the annihilator of f^s in $\mathbf{A}_{n+p}$ and we establish the link between functional equations and this ideal.
In section 5, we introduce the three Bernstein-Sato ideals that we are interested in, and following T. Oaku, we also introduce the ideals $\psi_{\mathcal{B}}$, $\psi_{\mathcal{B}_j}$ and $\psi_{\mathcal{B}_\Sigma}$ of $\mathbf{A}_n[s]$ and we show the link between these ideals and the Bernstein-Sato ones.
In section 6, we give the algorithms for computing $\mathcal{B}_j$ and $\mathcal{B}_\Sigma$ (in fact $\psi_{\mathcal{B}_j}$ and $\psi_{\mathcal{B}_\Sigma}$), after having described and used the homogenization techniques which are specific to these algorithms. We end off this section with some examples. One has been made by hand and the other ones using KAN (see [**T**]).

In this paper, ideal means left ideal.

I wish to thank Prof. Michel Granger for his advice.

2. Standard basis with respect to a non-well order

In this section, we will recall the process of building a standard basis as in [**C-N**]. This is classical except for the fact that we add parameters $u_1, \ldots, u_q$, as developped below, in view of frequent applications, especially in 6.5.

We are going to work in $\mathbf{A}_n[u] = \mathbf{A}_n[u_1, \ldots, u_q]$, with $q \in \mathbf{N}$. It is a usual polynomial ring in which u_i commutes with the other variables. This section is nevertheless worthwhile even if $q = 0$, where we work in $\mathbf{A}_n$. Let $\prec$ be a total order of $\mathbf{N}^{2n+q}$ which is compatible with the structure of $\mathbf{A}_n$ i.e. :

$$\exp_\prec(1) \prec \exp_\prec(x_i \partial_{x_i}) = \exp_\prec(\partial_{x_i} x_i)$$

and we suppose this order to be compatible with sums while not necessarily being a well-order.

We recall that for $P \in \mathbf{A}_n[u]$ written :

$$P = \sum p_{\alpha,\beta,\gamma} x^\alpha \partial_x^\beta u^\gamma \text{ with } p_{\alpha,\beta,\gamma} \in \mathbf{K},\ (\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbf{N}^{2n+q},$$

We define :

– the privileged exponent of P :

$$\exp_\prec(P) = \{\max_\prec(\alpha,\beta,\gamma)/p_{\alpha,\beta,\gamma} \neq 0\}$$

– the privileged monomial of P :

$$\mathrm{mp}_\prec(P) = p_{\exp_\prec(P)}(x,\partial_x,u)^{\exp_\prec(P)}$$

– the Newton diagram of P :

$$\mathrm{ND}(P) = \{(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbf{N}^{2n+q}/p_{\alpha,\beta,\gamma} \neq 0\}.$$

Let I be an ideal of $\mathbf{A}_n[u]$. We suppose that we know a finite system of generators of I. The purpose of this section is to give an algorithm to compute a $\prec$-standard basis of I and more precisely, we are going to prove :

Proposition 2.1. *There exists $P_1,\dots,P_m \in I$ such that for each $P \in I$ there exists $W_1,\dots,W_m \in \mathbf{A}_n[u]$ such that :*

– $P = W_1P_1 + \cdots + W_mP_m$

– $\forall j = 1,\dots,m \quad \exp_\prec(W_jP_j) \preceq \exp_\prec(P)$ *if* $W_j \neq 0$

To construct such operators, we are going to introduce a new variable z and work in $\mathbf{A}_n[u] < z >$ as in [**C-N**].

Let $\mathbf{A}_n[u] < z >$ be the $\mathbf{K}$-algebra generated by $x_i, \partial_{x_i}, u_i, z$ with the following relations :

– $\forall i = 1,\dots,q,\ u_i$ commutes with the other variables.

– z commutes with the other variables.

– $\forall i,j \quad [x_i,x_j] = [\partial_{x_i},\partial_{x_j}] = 0.$

– $\forall i,j \quad [\partial_{x_i},x_j] = \delta_{ij}z^2$, where $\delta_{ij} = 1$ if $i = j$ and $\delta_{ij} = 0$ if $i \neq j$.

On $\mathbf{N}^{2n+q+1}$, we define the order $\prec^h$ by :

$$(\alpha,\beta,\gamma,i) \prec^h (\alpha',\beta',\gamma',i') \iff \left\{\begin{array}{ll} & |\alpha|+|\beta|+|\gamma|+i < |\alpha'|+|\beta'|+|\gamma'|+i' \\ \text{or} & (|\alpha|+|\beta|+|\gamma|+i = |\alpha'|+|\beta'|+|\gamma'|+i' \\ & \text{and } \ (\alpha,\beta,\gamma) \prec (\alpha',\beta',\gamma')) \end{array}\right.$$

We remark that $\prec^h$ is an order compatible with sums is a well-order.

For $P \in \mathbf{A}_n[u]$, let us write

$$P = \sum a_{\alpha,\beta,\gamma} x^\alpha \partial_x^\beta u^\gamma.$$

We denote $\mathrm{ord}^T(P) = \max\{|\alpha|+|\beta|+|\gamma|/a_{\alpha,\beta,\gamma} \neq 0\}$. We define $h(P) \in \mathbf{A}_n[u] < z >$ by :

$$h(P) = \sum a_{\alpha,\beta,\gamma} x^\alpha \partial_x^\beta u^\gamma z^{\mathrm{ord}^T(P)-|\alpha|-|\beta|-|\gamma|}$$

Thanks to the relations in $\mathbf{A}_n[u] < z >$, we have :

$$\forall P,Q \in \mathbf{A}_n[u], \quad h(PQ) = h(P)h(Q).$$

We define the ideal $h(I) \subseteq \mathbf{A}_n[u] < z >$ by the following :
Let $Q_1, \ldots, Q_r$ be generators of I , we define

$$h(I) = \sum_{i=1}^{r} \mathbf{A}_n[u] < z > \cdot h(Q_i)$$

Assertion 1 : We can compute a $\prec^h$-standard basis $H_1(z), \ldots, H_m(z)$ of $h(I)$ (in the sense of 2.1) consisting of T-homogeneous operators (see next remark).

Remark : $H \in \mathbf{A}_n[u] < z >$ is said to be T-homogeneous with a total order $\mathrm{ord}^T(H) = d$ if it is written :

$$H = \sum_{\alpha,\beta,\gamma} a_{\alpha,\beta,\gamma} x^\alpha \partial_x^\beta u^\gamma z^{d-|\alpha|-|\beta|-|\gamma|}$$

In order to prove the assertion 1, we just have to remark that $\prec^h$ is a well-order and that divisions in $\mathbf{A}_n[u] < z >$ preserve homogeneity. Then the H_j constucted from the $h(Q_i)$ (by division of semisyzygies, see [**Lej**] for the commutative case, see also [**C-G**]) will be homogeneous.

Assertion 2 : The system $H_1(1), \ldots, H_m(1)$ gives the P_j of proposition 2.1.
Let us prove the assertion 2.
Let $P \in I$, there exists $B_1, \ldots, B_r \in \mathbf{A}_n[u]$ such that $P = \sum B_i Q_i$. There exists $k, k_1, \ldots, k_r \in \mathbf{N}$ such that

$$z^k h(P) = z^{k_1} h(B_1 Q_1) + \cdots + z^{k_r} h(B_r Q_r).$$

We have $h(B_i Q_i) = h(B_i) h(Q_i)$ then $z^k h(P) \in h(I)$. Let us divide $z^k h(P)$ by the $H_j(z)$, we have :

- $z^k h(P) = \sum U_j(z) H_j(z)$
- $\forall j \quad \exp_{\prec^h}(z^k h(P)) \succeq^h \exp_{\prec^h}(U_j H_j)$ if $U_j \neq 0$
- $\forall j \quad U_j$ is T-homogeneous.

Denote $(\alpha, \beta, \gamma, i) = \exp_{\prec^h}(z^k h(P))$ and $(\alpha_j, \beta_j, \gamma_j, i_j) = \exp_{\prec^h}(U_j H_j)$. Since all the terms in the sum are T-homogeneous (with order equal to $k + \mathrm{ord}^T(P)$), we have $(\alpha, \beta, \gamma) \succeq (\alpha_j, \beta_j, \gamma_j)$. And also because of homogeneity we have $(\alpha, \beta, \gamma) = \exp_{\prec^h}(P)$ and $(\alpha_j, \beta_j, \gamma_j) = \exp_{\prec^h}(U_j(1) H_j(1))$.
So $P = \sum U_j(1) H_j(1)$ with $\exp_\prec(P) \succeq \exp_\prec(U_j(1) H_j(1))$.
The assertion 2 is proved and so is proposition 2.1.

3. V-multifiltration

Definition 3.1. *Let $P \in \mathbf{A}_{n+p}$, $P \neq 0$, P can be written in only one way as follows :*

$$P = \sum a_{\mu,\nu} t^\mu \partial_t^\nu \quad \text{with } \mu, \nu \in \mathbf{N}^p,\ a_{\mu,\nu} \in \mathbf{A}_n.$$

We define :

- *For $j = 1, \ldots, p$, the V_j-order of P*

$$\mathrm{ord}^{V_j}(P) = \max\{\nu_j - \mu_j \ /\ a_{\mu,\nu} \neq 0\}$$

- *The V-order of P*

$$\mathrm{ord}^V(P) = (\mathrm{ord}^{V_1}(P), \ldots, \mathrm{ord}^{V_p}(P))$$

– *For $j = 1, \dots, p$, the V_j-principal symbol of P*

$$\sigma^{V_j}(P) = \sum_{\nu_j - \mu_j = \mathrm{ord}^{V_j}(P)} a_{\mu,\nu} t^\mu \partial_t^\nu$$

– *For $m \in \mathbf{Z}^p$, the V-partial symbol of order m of P*

$$\sigma_m^V(P) = \sum_{\nu - \mu = m} a_{\mu,\nu} t^\mu \partial_t^\nu$$

– *The V- principal symbol of P*

$$\sigma^V(P) = \sigma^V_{\mathrm{ord}^V(P)}(P).$$

For $m \in \mathbf{Z}^p$, we denote

$$V_m(\mathbf{A}_{n+p}) = \{P \in \mathbf{A}_{n+p} \ / \ \forall j = 1, \dots, p \quad \mathrm{ord}^{V_j}(P) \leq m_j\}.$$

REMARK 3.2. *We may have $\sigma^V(P) = 0$ without having $P = 0$. For instance, if $p = 2$ and $P = t_1 + t_2$, $\sigma^V(P) = 0$.*

As usual, we have the following properties :

LEMMA 3.3. *Let $P, Q \in \mathbf{A}_{n+p}$, $P, Q \neq 0$, we have :*
– $\mathrm{ord}^V(PQ) = \mathrm{ord}^V(P) + \mathrm{ord}^V(Q)$
– $\sigma^V(PQ) = \sigma^V(P)\sigma^V(Q)$
– $\sigma^{V_j}(PQ) = \sigma^{V_j}(P)\sigma^{V_j}(Q)$

4. Bernstein-Sato equations and Malgrange point of view

Consider

$$\mathcal{L} = \mathbf{K}[x][f_1^{-1}, \dots, f_p^{-1}, s] \cdot f^s$$

the free module generated by the symbol f^s where $f^s := f_1^{s_1} \cdots f_p^{s_p}$.
$\mathcal{L}$ has an $\mathbf{A}_n[s]$-module structure. Thus for instance we have :

$$\partial_{x_i}(g(x,s)f^{s-m}) = \Big(\frac{\partial g}{\partial x_i} f^{-m} + \sum_{j=1}^{p} g(x,s)(s_j - m_j)\frac{\partial f_j}{\partial x_i} f_j^{-1} f^{-m}\Big) f^s$$

where $g(x,s) \in \mathbf{K}[x][s]$ and $m \in \mathbf{N}^p$.

Now let us introduce an $\mathbf{A}_{n+p}$-module structure on $\mathcal{L}$:
If $j = 1, \dots, p$ and $g(s) \in \mathbf{K}[x][f^{-1}, s]$, we define :

$$t_j.(g(s)f^s) = g(s_1, \dots, s_j + 1, \dots, s_p) f_j f^s$$

$$\partial_{t_j}.(g(s)f^s) = -s_j g(s_1, \dots, s_j - 1, \dots, s_p) f_j^{-1} f^s.$$

We can easily check that $(\partial_{t_j}.t_j).(g(s)f^s) = (t_j.\partial_{t_j} + 1).(g(s)f^s)$.

We have the following relations :

(i): $-\partial_{t_j} t_j (g(s)f^s) = s_j g(s) f^s$ if $g(s) \in \mathbf{K}[x][f^{-1}, s]$

(ii): $(t_j - f_j(x)).f^s = 0 \quad \forall j = 1, \dots, p$

(iii): $(\partial_{x_i} + \sum_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \partial_{t_j}).f^s = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$

We have the inclusions :

$$\mathbf{A}_n[s]f^s \subseteq \mathbf{A}_{n+p}f^s \subseteq \mathcal{L}$$

Remark that the first inclusion comes from (i).

As in lemma 4.1 of [**Mal**], we have :

LEMMA 4.1. *Let*

$$I = \sum_{j=1}^{p} \mathbf{A}_{n+p}\big(t_j - f_j(x)\big) + \sum_{i=1}^{n} \mathbf{A}_{n+p}\big(\partial_{x_i} + \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial f_j}{\partial x_i}\partial_{t_j}\big)$$

Then I is maximal in $\mathbf{A}_{n+p}$.

PROOF. Let $\phi : \mathbf{K}^{n+p} \longrightarrow \mathbf{K}^{n+p}$ defined by

$$\phi(x_1,\ldots,x_n,t_1,\ldots,t_p) = (x_1,\ldots,x_n,t_1 - f_1(x),\ldots,t_p - f_p(x)).$$

ϕ is bijective and induces an isomorphism ϕ_* on the ring $\mathbf{A}_{n+p}$. The image of I is

$$\phi_*(I) = \sum_{j=1}^{p} \mathbf{A}_{n+p}t_j + \sum_{i=1}^{n} \mathbf{A}_{n+p}\partial_{x_i},$$

Moreover, it's easy to see that :

$$I \text{ maximal is equivalent to } \phi_*(I) \text{ maximal.}$$

We suppose, in the rest of the proof, that $I = \sum \mathbf{A}_{n+p}t_j + \sum \mathbf{A}_{n+p}\partial_{x_i}$.
Let $P \in \mathbf{A}_{n+p} \smallsetminus I$, denote $I' = I + \mathbf{A}_{n+p}P$. We shall prove that $I' = \mathbf{A}_{n+p}$. Write

$$P = \sum a_{\alpha\beta\gamma\delta}x^\alpha\partial_t^\beta t^\gamma\partial_x^\delta \quad \text{with} \quad \alpha,\delta \in \mathbf{N}^n,\ \beta,\gamma \in \mathbf{N}^p,\ a_{\alpha\beta\gamma\delta} \in \mathbf{K}$$

then

$$P \in \sum a_{\alpha\beta 00}x^\alpha\partial_t^\beta + I.$$

Thus we can assume that P is of the following form :

$$P = \sum a_{\alpha\beta}x^\alpha\partial_t^\beta = \sum a_\beta(x)\partial_t^\beta.$$

Let $\mu(P) = max\{|\beta|, a_\beta \neq 0\}$. We shall prove by induction on $\mu(P)$ that there exists $a(x) \in \mathbf{K}[x] \cap I'$, $a(x) \neq 0$.
If $\mu(P) = 0$ then the assertion is true. Assume that $\mu(P) > 0$.
Write

$$P = Q + a_{\beta'}\partial_t^{\beta'} \quad \text{with} \quad |\beta'| = \mu(P).$$

Let j be such that $\beta'_j \neq 0$ and denote by $C = [P, t_j]$ the commutator of P and t_j.
Then on one hand $C \in I'$ and $C \neq 0$, and on the other hand $\mu(C) < \mu(P)$, we then apply the induction hypothesis. At this point, we have proved the existence of $a(x) \in \mathbf{K}[x]$, $a(x) \neq 0$ in I'.
For such an a, consider $\nu(a) = max\{deg_{x_1}(a),\ldots,deg_{x_n}(a)\}$, and let us show by induction on $\nu(a)$ that $1 \in I'$.
If $\nu(a) = 0$ then $1 \in I'$.
Assume $\nu(a) > 0$ and let i such that $deg_{x_i}(a) = \nu(a)$, then

$$\frac{\partial a}{\partial x_i} = [a, \partial_{x_i}] \in I' \quad \text{and} \quad deg_{x_i}\big(\frac{\partial a}{\partial x_i}\big) < deg_{x_i}(a).$$

After a finite number of steps we obtain the existence of $b(x) \in I'$, $b(x) \neq 0$ with $\nu(b) < \nu(a)$. We then apply the induction hypothesis which gives $1 \in I'$.

□

LEMMA 4.2. *I is the annihilator of f^s in $\mathbf{A}_{n+p}$.*

PROOF. Denote by $I' = \{P \in \mathbf{A}_{n+p} / P \cdot f^s = 0\}$ the annihilator of f^s in $\mathbf{A}_{n+p}$. Using the relations (ii) and (iii), we have $I \subseteq I'$, moreover $I' \neq \mathbf{A}_{n+p}$ because $1 \notin I'$, then by the previous lemma $I = I'$ □

As a consequence, we have :

COROLLARY 4.3. *Let $P(s) \in \mathbf{A}_n[s]$. We have :*

$$P(s) \cdot f^s = 0 \text{ in } \mathcal{L} \Longleftrightarrow P(-\partial_{t_1} t_1, \ldots, -\partial_{t_p} t_p) \in I.$$

PROOF. By the relation (i) we have : $P(s) f^s = P(-\partial_t t) f^s$, and the previous lemma ends the proof. □

5. Bernstein-Sato ideals

DEFINITION 5.1. *Consider the ideals of $\mathbf{K}[s] = \mathbf{K}[s_1, \ldots, s_p]$:*
– $\mathcal{B} = \{b(s) \in \mathbf{K}[s] \ / \ b(s) f^s \in \mathbf{A}_n[s] f^{s+1}\}$
– $\mathcal{B}_j = \{b(s) \in \mathbf{K}[s] \ / \ b(s) f^s \in \mathbf{A}_n[s] f_j f^s\}$ *for* $j = 1, \ldots, p$
– $\mathcal{B}_\Sigma = \{b(s) \in \mathbf{K}[s] \ / \ b(s) f^s \in \sum_{j=1}^p \mathbf{A}_n[s] f_j f^s\}$
with $f^{s+1} := f_1^{s_1+1} \cdots f_p^{s_p+1}$.

We have the inclusions :

$$\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}_j \subseteq \mathcal{B}_\Sigma.$$

Our purpose is to give an algorithm for computing $\mathcal{B}_\Sigma$ and $\mathcal{B}_j$.

DEFINITION 5.2. *Let $P \in \mathbf{A}_{n+p}$ such that $\mathrm{ord}^V = (m_1, \ldots, m_p)$. We define $\psi(P)(s) \in \mathbf{A}_n[s_1, \ldots, s_p]$ by the following :*

$$\psi(P)(-\partial_{t_1} t_1, \ldots, -\partial_{t_p} t_p) = \sigma^V(S_1 \ldots . S_p P)$$

with

$$S_j = \begin{cases} t_j^{m_j} & \text{if } m_j > 0 \\ \partial_{t_j}^{-m_j} & \text{if } m_j \leq 0. \end{cases}$$

We define the following ideals of $\mathbf{A}_n[s]$ (we still denote by I the annihilator of f^s in $\mathbf{A}_{n+p}$) by :
– $\psi_{\mathcal{B}}(I) = \{\psi(P) \ / \ P \in I, \ \mathrm{ord}^V(P) = 0, \ \forall j \ \mathrm{ord}^{V_j}(P - \sigma^V(P)) < 0\} \cup (0)$
– $\psi_{\mathcal{B}_\Sigma}(I) = \{\psi(P) \ / \ P \in I, \ \mathrm{ord}^V(P) = 0\} \cup (0)$
– $\psi_{\mathcal{B}_j}(I) = \{\psi(P) \ / \ P \in I, \ \mathrm{ord}^V(P) = 0, \ \mathrm{ord}^{V_j}(P - \sigma^V(P) < 0\} \cup (0)$

LEMMA 5.3. *Let $b(s) \in \mathbf{K}[s]$, we have :*

a: $b(s) \in \mathcal{B} \iff b(-\partial_t t) \in I + V_0(\mathbf{A}_{n+p}) t_1 \cdots t_p$

b: $b(s) \in \mathcal{B}_j \iff b(-\partial_t t) \in I + V_0(\mathbf{A}_{n+p}) t_j$

c: $b(s) \in \mathcal{B}_\Sigma \iff b(-\partial_t t) \in I + \sum V_0(\mathbf{A}_{n+p}) t_j$

PROOF. We shall now prove the assertion b, the other assertions can be proved in a similar way.
$\Longrightarrow$:
$b(s) \in \mathcal{B}_j$ is equivalent to the existence of $P(s) \in \mathbf{A}_n[s]$ such that $b(s)f^s = P(s)f_j f^s$, or $(b(s) - P(s)f_j).f^s = 0$, then by corollary 4.3, $b(-\partial_t t) - P(-\partial_t t)f_j \in I$, and using the relation (ii) of section 4, we obtain :

$$b(s) \in \mathcal{B}_j \iff b(-\partial_t t) - P(-\partial_t t)t_j \in I \tag{4}$$

thus this implication is proved.
$\Longleftarrow$:
By hypothesis, there exists $Q \in V_0(\mathbf{A}_{n+p})$ such that $b(-\partial_t t) - Q.t_j \in I$. Since $Q \in V_0(\mathbf{A}_{n+p})$, we can write it as :

$$Q = \sum_{m \in \mathbf{N}^p} Q_m(-\partial_t t)t^m$$

with $Q_m(-\partial_t t) \in \mathbf{A}_n[-\partial_t t]$. Using the relation (ii) of section 4, we obtain :

$$Qt_j \in I + (\underbrace{\sum Q_m(-\partial_t t)f^m}_{P(-\partial_t t)})t_j$$

hence $b(-\partial_t t) - P(-\partial_t t)t_j \in I$. Using (4), we end the proof. □

As a consequence, we have :

PROPOSITION 5.4. *We still denote by I the annihilator of f^s in $\mathbf{A}_{n+p}$.*

a: $\psi_{\mathcal{B}}(I) \cap \mathbf{K}[s] = \mathcal{B}$

b: $\psi_{\mathcal{B}_j}(I) \cap \mathbf{K}[s] = \mathcal{B}_j$

c: $\psi_{\mathcal{B}_\Sigma}(I) \cap \mathbf{K}[s] = \mathcal{B}_\Sigma$

PROOF. We only prove the assertion b (the other assertions being similar).
Let $b(s) \in \psi_{\mathcal{B}_j}(I) \cap \mathbf{K}[s]$. Then there exists $Q \in I$ with $\mathrm{ord}^V(Q) = 0$ such that $\mathrm{ord}^{V_j}(Q - \sigma^V(Q)) < 0$ and such that $b(s) = \psi(Q)(s)$, or $b(-\partial_t t) = \sigma^V(Q)$. Write

$$Q - \sigma^V(Q) = Q' t_j \quad \text{with } Q' \in V_0(\mathbf{A}_{n+p}).$$

We have $b(-\partial_t t) + Q' t_j \in I$. Then by the previous lemma, $b(s) \in \mathcal{B}_j$.
Let $b(s) \in \mathcal{B}_j$. Then by the previous lemma, there exists $Q \in I$ and $Q' \in V_0(\mathbf{A}_{n+p})$ such that

$$b(-\partial_t t) = Q - Q' t_j.$$

Thus we see that $\mathrm{ord}^V(Q) = (0, \ldots, 0)$ and $b(s) = \psi(Q)(s)$, i.e. $b(s) \in \psi_{\mathcal{B}_j}(I) \cap \mathbf{K}[s]$. □

REMARK 5.5. *If we can compute generators of $\psi_{\mathcal{B}_j}(I)$ then we will easily compute generators of $\mathcal{B}_j$. Actually, if we compute a standard basis $G_1, \ldots, G_q$ with respect to an order which eliminates the variables x_i and ∂_{x_i} then $\{G_1, \ldots, G_q\} \cap \mathbf{K}[s]$ will generate $\mathcal{B}_j$ on $\mathbf{K}[s]$. The same remark can be applied to $\psi_{\mathcal{B}_\Sigma}(I)$ and $\mathcal{B}_\Sigma$. Thus, in the next section, we will compute $\psi_{\mathcal{B}_\Sigma}(I)$ and $\psi_{\mathcal{B}_j}(I)$.*

6. Computation of $\mathcal{B}_\Sigma$ and $\mathcal{B}_j$

In this section, we present the main result of this paper. Let us see how this section is organized. As we saw in proposition 5.4 and in remark 5.5, it is enough to compute $\psi_{\mathcal{B}_\Sigma}(I)$ and $\psi_{\mathcal{B}_j}(I)$ to obtain $\mathcal{B}_\Sigma$ and $\mathcal{B}_j$.
The way we will compute $\psi_{\mathcal{B}_\Sigma}(I)$ and $\psi_{\mathcal{B}_j}(I)$ is the following :

– We introduce new variables $y_1, \dots, y_p$ which commute with $\mathbf{A}_{n+p}$.
– Given an ideal J of $\mathbf{A}_{n+p}[y_{j_1}, \dots, y_{j_k}]$ and $j \in \{1, \dots, p\} \setminus \{j_1, \dots, j_k\}$, we define $h^{V_j}(J)$ ideal of $\mathbf{A}_{n+p}[y_{j_1}, \dots, y_{j_k}, y_j]$.
Given generators of J, we show how to find generators of $h^{V_j}(J)$.
– We define an ideal $h(I)$ of $\mathbf{A}_{n+p}[y_2, \dots, y_p]$ as $h(I) = h^{V_2}(h^{V_3}(\cdots h^{V_p}(I)\cdots))$ (see 6.7). It is an ideal obtained by $p-1$ homogenizations starting from $I \subset \mathbf{A}_{n+p}$. In fact we construct $h^{V_p}(I) \subset \mathbf{A}_{n+p}[y_p]$, then $h^{V_{p-1}}(h^{V_p}(I)) \subset \mathbf{A}_{n+p}[y_{p-1}]$, etc.
– By definition, we can compute generators (finite in number) of $h(I)$.
– We introduce a multigraduation on $\mathbf{A}_{n+p}[y_2, \dots, y_p]$ given by a multiform $H = (H_2, \dots, H_p)$. For $G \in \mathbf{A}_{n+p}[y_2, \dots, y_p]$, we have a notion of being H-multihomogeneous. An ideal J of $\mathbf{A}_{n+p}[y_2, \dots, y_p]$ is said to be H-multihomogeneous if it can be generated by H-multihomogeneous elements.
– For an element of $\mathbf{A}_{n+p}$ (or $\mathbf{A}_{n+p}[y_2, \dots, y_p]$) we introduce a notion of V-regularity (resp. V_j-goodness).
– We introduce an order $\prec_{\mathcal{B}_\Sigma}$ (resp. $\prec_{\mathcal{B}_j}$) which is used to detect if an element is V-regular (resp. V_j-good) or not (see propositions 6.16 and 6.22). If $G \in \mathbf{A}_{n+p}[y_2, \dots, y_p]$ is H-multihomogeneous, then thanks to proposition 6.16 (resp. 6.22) and lemma 6.11 we can express the fact that G is V-regular (resp. $\mathcal{B}_j$-good) or not by a property of non-divisibility by y_j (see 6.17).
– Lemma 6.12 shows that $h(I)$ is H-multihomogeneous. A consequence is that there exists a standard basis of $h(I)$ with respect to $\prec_{\mathcal{B}_\Sigma}$ (resp. $\prec_{\mathcal{B}_j}$) made of H-multihomogeneous elements.
– Finally, proposition 6.19 (resp. 6.23) shows that a standard basis of $h(I)$ with respect to $\prec_{\mathcal{B}_\Sigma}$ (resp. $\prec_{\mathcal{B}_j}$) gives a system of generators of $\psi_{\mathcal{B}_\Sigma}(I)$ (resp. $\psi_{\mathcal{B}_j}(I)$), by keeping only the V-regular (resp V_j-good) elements.

6.1. Homogenizations. Let $y_1, \dots, y_p$ be p new variables. Let $k \in \{0, \dots, p-1\}$.
If $k \in \{1, \dots, p-1\}$, let $\{j_1, \dots, j_k\}$ be a part of $\{1, \dots, p\}$ of cardinal equal to k.
If $k = 0$ then we set $\mathbf{A}_{n+p}[y_{j_1}, \dots, y_{j_k}] = \mathbf{A}_{n+p}$ and $\{j_1, \dots, j_k\} = \varnothing$.
Let $j \in \{1, \dots, p\} \smallsetminus \{j_1, \dots, j_k\}$.

Definition 6.1. *Let $P \in \mathbf{A}_{n+p}[y_{j_1}, \dots, y_{j_k}]$, and denote $m_j = \mathrm{ord}^{V_j}(P)$. We define $h^{V_j}(P) \in \mathbf{A}_{n+p}[y_{j_1}, \dots, y_{j_k}, y_j]$ in the following way :*
Let us write

$$P = \sum a_{\mu\nu} t^\mu \partial_t^\nu \quad \mu, \nu \in \mathbf{N}^p,\ a_{\mu\nu} \in \mathbf{A}_n[y_1, \dots, y_{j_k}].$$

Set :

$$h^{V_j}(P) = \sum a_{\mu\nu} t^\mu \partial_t^\nu y_j^{m_j - (\nu_j - \mu_j)}.$$

Lemma 6.2. *For each $P, Q \in \mathbf{A}_{n+p}[y_{j_1}, \dots, y_{j_k}]$,*

$$h^{V_j}(PQ) = h^{V_j}(P) h^{V_j}(Q).$$

PROOF. The proof is based on the following :
If $V_j(t^\mu\partial_t^\nu)=m$ and $V_j(t^{\mu'}\partial_t^{\nu'})=m'$ then :
– $V_j(t^\mu\partial_t^\nu t^{\mu'}\partial_t^{\nu'})=m+m'$
– $t^\mu\partial_t^\nu t^{\mu'}\partial_t^{\nu'}=\sum c_{\mu'',\nu''}t^{\mu''}\partial_t^{\nu''}$
with $V_j(t^{\mu''}\partial_t^{\nu''})=m+m'$ if $c_{\mu'',\nu''}\neq 0$.
This follows from the Leibniz rule :

$$\partial_{t_j}^k\cdot a=\sum_{i=0}^k\binom{k}{i}\frac{\partial^i a}{\partial t_j}\partial_{t_j}^{k-i}$$

In fact we can say that V_j-homogeneity is preserved by products. □

LEMMA 6.3. *Let $P,P_1,\dots,P_d\in\mathbf{A}_{n+p}[y_{j_1},\dots,y_{j_k}]$ be such that $P=P_1+\dots+P_d$ with $\forall i\quad \mathrm{ord}^{V_j}(P_i)\le\mathrm{ord}^{V_j}(P)$, then there exists $l_1,\dots,l_d\in\mathbf{N}$ such that :*

$$h^{V_j}(P)=y_j^{l_1}h^{V_j}(P_1)+\dots+y_j^{l_d}h^{V_j}(P_d).$$

In fact $l_i=\mathrm{ord}^{V_j}(P)-\mathrm{ord}^{V_j}(P_i)$.

DEFINITION 6.4. *Let J be an ideal of $\mathbf{A}_{n+p}[y_{j_1},\dots,y_{j_k}]$. We define $h^{V_j}(J)$ as the ideal of $\mathbf{A}_{n+p}[y_{j_1},\dots,y_{j_k},y_j]$ generated by $\{h^{V_j}(P)\ /\ P\in J\}$.*

PROPOSITION 6.5. *Let J be an ideal of $\mathbf{A}_{n+p}[y_{j_1},\dots,y_{j_k}]$. There exists $P_1,\dots,P_q$ in J such that for each $P\in J$ there exists $C_1,\dots,C_q\in\mathbf{A}_{n+p}[y_{j_1},\dots,y_{j_k}]$ such that :*

$$P=\sum C_iP_i\quad \textit{with}\quad \mathrm{ord}^{V_j}(C_iP_i)\le\mathrm{ord}^{V_j}(P)\ \textit{if}\ C_i\neq 0.$$

Moreover, we can obtain these P_i in an algorithmic way if we know a finite system of generators of J.

PROOF. We just apply proposition 2.1 to the order $\prec_{V_j}$ defined on $\mathbf{N}^{2n+2p+k}$ by the following :

$$(\alpha,\beta,\mu,\nu,\eta)\prec_{V_j}(\alpha',\beta',\mu',\nu',\eta')$$
$$\iff\begin{cases}\qquad\nu_j-\mu_j<\nu_j'-\mu_j'\\ or\quad\Big(\nu_j-\mu_j=\nu_j'-\mu_j'\text{ and }(\alpha,\beta,\mu,\nu,\eta)\prec(\alpha',\beta',\mu',\nu',\eta')\Big)\end{cases}$$

where $\prec$ is a total well-order compatible with sums, the parameters of 2.1 being $y_{j_1},\dots,y_{j_k}$ here. □

COROLLARY 6.6. *Let J be an ideal of $\mathbf{A}_{n+p}[y_{j_1},\dots,y_{j_k}]$ and let $P_1,\dots,P_q\in J$ be as in proposition 6.5, then $h^{V_j}(J)$ is generated by $h^{V_j}(P_1),\dots,h^{V_j}(P_q)$.*

PROOF. Let $P\in J$. By proposition 6.5, there exists $C_1,\dots,C_q\in\mathbf{A}_{n+p}[y_{j_1},\dots,y_{j_k}]$ such that :

$$P=\sum C_iP_i\quad\text{with}\quad\mathrm{ord}^{V_j}(C_iP_i)\le\mathrm{ord}^{V_j}(P)\text{ if }C_i\neq 0.$$

By lemma 6.2 and lemma 6.3, we have :

$$h^{V_j}(P)=y_j^{l_1}h^{V_j}(C_1)h^{V_j}(P_1)+\dots+y_j^{l_q}h^{V_j}(C_q)h^{V_j}(P_q).$$

□

6.2. The homogenized ideal $h(I)$. From now on, y denotes $(y_2, \dots, y_p)$.

DEFINITION 6.7. *We still denote by I the annihilator of f^s in $\mathbf{A}_{n+p}$. We define by a descending induction an ideal $h(I)$ by :*
– $h_{p+1}(I) = I$,
– $h_k(I) = h^{V_k}(h_{k+1}(I))$,
– $h(I) = h_2(I)$.
We can write :
$$h(I) = h^{V_2}(h^{V_3}(\cdots h^{V_p}(I)\cdots)).$$
This is an ideal of $\mathbf{A}_{n+p}[y] = \mathbf{A}_{n+p}[y_2, \dots, y_p]$.
Similarly, for $P \in \mathbf{A}_{n+p}$ we define $h(P) \in \mathbf{A}_{n+p}[y]$ by :
$$h(P) = h^{V_2}(h^{V_3}(\cdots h^{V_p}(P)\cdots)).$$

For example, for $p = 3$, we have :
$$h^{V_3}(I) = \{\sum_j E_j(y_3) h^{V_3}(Q_j) \ / \ Q_j \in I, E_j(y_3) \in \mathbf{A}_{n+p}[y_3]\}$$
$$h^{V_2}(h^{V_3}(I)) = \{\sum_i F_i(y_2, y_3) h^{V_2}\big(\sum_j E_{i,j}(y_3) h^{V_3}(Q_{i,j})\big)\}$$
with $Q_{i,j} \in I, E_{i,j} \in \mathbf{A}_{n+p}[y_3], F_i(y_2, y_3) \in \mathbf{A}_{n+p}[y_2, y_3]$.
It is easy to see that for $P \in I$ we have $h(P) \in h(I)$. Lemma 6.12 says that conversely, $h(I)$ is generated by such elements, which is not completely direct.

REMARK 6.8. *Following proposition 6.5 and corollary 6.6, we can obtain in an algorithmic way generators (finite in number) of $h(I)$.*

DEFINITION 6.9.
For $j = 2, \dots, p$, we define the linear form H_j on $\mathbf{N}^{2n+2p+p-1}$ by :
$$H_j(\alpha, \beta, \mu, \nu, \eta) = \eta_j + \nu_j - \mu_j.$$
We denote by H the multiform $(H_2, \dots, H_p)$.
– *Let $G = G(y) \in \mathbf{A}_{n+p}[y]$. Write :*
$$G = \sum a_{\mu,\nu,\eta} t^\mu \partial_t^\nu y^\eta \quad \mu, \nu \in \mathbf{N}^p, \eta \in \mathbf{N}^{p-1}, \ a_{\mu,\nu,\eta} \in \mathbf{A}_n.$$
- *We define $\sigma^{H_j}_{d_j}(G)$ the partial H_j-symbol of G with order equal to $d_j \in \mathbf{Z}$ by :*
$$\sigma^{H_j}_{d_j}(G) = \sum_{\eta_j + \nu_j - \mu_j = d_j} a_{\mu,\nu,\eta} t^\mu \partial_t^\nu y^\eta.$$
- *G is said to be H_j-homogeneous with* $\mathrm{ord}^{H_j}(G) = d_j$ *if $G = \sigma^{H_j}_{d_j}(G)$.*
- *G is said to be H-homogeneous (or H-multihomogeneous) with* $\mathrm{ord}^H(G) =$ *$d = (d_2, \dots, d_p)$ if for each $j = 2, \dots, p$, G is H_j-homogeneous of order equal to d_j.*
We define $\sigma^H_d(G)$ the H-symbol with order equal to $d = (d_2, \dots, d_p)$ of G by :
$$\sigma^H_d(G) = \sum_{\forall j, \eta_j + \nu_j - \mu_j = d_j} a_{\mu,\nu,\eta} t^\mu \partial_t^\nu y^\eta.$$
We have :
$$\sigma^H_d(G) = \sigma^{H_2}_{d_2}(\cdots \sigma^{H_p}_{d_p}(G)\cdots).$$

Remark that the operations $\sigma_{d_j}^{H_j}$ commute with each other.

This yields the four following results :

LEMMA 6.10. *We take the notations of definition 6.4 :*
Let J be an ideal of $\mathbf{A}_{n+p}[y_{j_1},\ldots,y_{j_k}]$, let $G \in h^{V_j}(J)$. Then for each $m \in \mathbf{Z}$, we have $\sigma_m^{H_j}(G) \in h^{V_j}(J)$.

PROOF. By definition of $h^{V_j}(J)$, there exists $P_1,\ldots,P_e \in J$ and $R_1,\ldots,R_e \in \mathbf{A}_{n+p}[y_{j_1},\ldots,y_{j_k},y_j]$ such that $G=\sum_i R_i h^{V_j}(P_i)$. Since $\sigma_m^{H_j}(G)=\sum_i \sigma_m^{H_j}(R_i h^{V_j}(P_i))$, we can assume that $G = Rh^{V_j}(P)$ with $P \in J$. Write $R = \sum_{l\in\mathbf{Z}} \sigma_l^{H_j}(R)$, we have :

$$Rh^{V_j}(P) = \sum_l \sigma_l^{H_j}(R)h^{V_j}(P).$$

By the same calculation as in 6.2, we can prove that $\sigma_l^{H_j}(R)h^{V_j}(P)$ is H_j-homogeneous with ord^{H_j} equal to $l+\mathrm{ord}^{H_j}(h^{V_j}(P)) = l+\mathrm{ord}^{V_j}(P)$ so we have :

$$\sigma_m^{H_j}(Rh^{V_j}(P)) = \sigma^{H_j}_{m-\mathrm{ord}^{V_j}(P)}(R)h^{V_j}(P)$$

which ends the proof. □

LEMMA 6.11. *For each $G \in \mathbf{A}_{n+p}[y]$ H-homogeneous, there exists $l=(l_2,\ldots,l_p) \in \mathbf{N}^{p-1}$ such that $G = y^l h(G(1,\ldots,1))$.*

LEMMA 6.12. *$h(I)$ is the ideal of $\mathbf{A}_{n+p}[y_2,\ldots,y_p]$ generated by the set $\{h(P)/P \in I,\ P\neq 0\}$.*

PROOF. First, it is clear that for each P in I, $h(P)$ is in $h(I)$.
Conversely, let $G\in h(I)$. Since $G=\sum_{k\in\mathbf{Z}^{p-1}}\sigma_k^H(G)$, we are reduced to prove that each $\sigma_k^H(G)$ is in the ideal generated by $\{h(P)/P\in I\}$. In fact we shall prove that for each $k=(k_2,\ldots,k_p)\in\mathbf{Z}^{p-1}$, there exists $l=(l_2,\ldots,l_p)\in\mathbf{N}^{p-1}$ and $Q\in I$ such that $\sigma_k^H(G)=y^l h(Q)$, which will prove the lemma. The proof will be constructed by induction on r the number of homogenizations (the claim in step r of this induction being the following : $h_{p+1-r}(I)$ is generated by all the $h^{V_{p+1-r}}(\ldots h^{V_p}(P)\ldots)$ with $P\in I$).

- If $r=1$:
  In this case, we have $h(I)=h^{V_p}(I)$, $H=H_p$, $k\in\mathbf{Z}$. By 6.10 we have $\sigma_k^H(G)\in h(I)$, so $\sigma_k^H(G)_{|y_p=1}\in I$. As in lemma 6.11, there exists $l\in\mathbf{N}$ such that $\sigma_k^H(G)=y_p^l h^{V_p}(\sigma_k^H(G)_{|y_p=1})$. This proves the result for $r=1$.
- The induction step :
  In order to avoid too many notations, we will assume that the result is true for $r=p-2$ and we will prove it for $r=p-1$ (i.e. we only make the last step of the induction which is completely similar to the *rth* step). Let us assume the result true for $h^{V_3}(\cdots h^{V_p}(I))$.
  We have :

  $\sigma_k^H(G)=\sigma_{k'}^{H'}(\sigma_{k_2}^{H_2}(G))$ where $H'=(H_3,\ldots,H_p)$ and $k'=(k_3,\cdots,k_p)$.

Denote $G' = \sigma_{k_2}^{H_2}(G)_{|y_2=1}$ then using 6.10, we have $G' \in h^{V_3}(\cdots h^{V_p}(I)\cdots)$, moreover there exists $l'_2 \in \mathbf{N}$ such that $\sigma_{k_2}^{H_2}(G) = y_2^{l'_2} h^{V_2}(G')$. Thus we have :

$$\begin{aligned} \sigma_k^H(G) &= \sigma_{k'}^{H'}(y_2^{l'_2} h^{V_2}(G')) \\ &= y_2^{l'_2} \sigma_{k'}^{H'}(h^{V_2}(G')). \end{aligned}$$

Assertion : $\exists l''_2 \in \mathbf{Z}$ such that $\sigma_{k'}^{H'}(h^{V_2}(G')) = y_2^{l''_2} h^{V_2}(\sigma_{k'}^{H'}(G'))$.
Let G'' be such that $G' = \sigma_{k'}^{H'}(G') + G''$ then we have :

$$h^{V_2}(G') = y_2^{l''_2} h^{V_2}(\sigma_{k'}^{H'}(G')) + y_2^{l'''_2} h^{V_2}(G'')$$

with $l''_2 = 0$ or $l'''_2 = 0$, after which, $\sigma_{k'}^{H'}(h^{V_2}(G')) = y_2^{l''_2} h^{V_2}(\sigma_{k'}^{H'}(G'))$.
Let $l_2 = l'_2 + l''_2$, we have :

$$\sigma_k^H(G) = y_2^{l_2} h^{V_2}(\sigma_{k'}^{H'}(G')).$$

We apply the induction hypothesis :

$$\sigma_{k'}^{H'}(G') = y_3^{l_3} \cdots y_p^{l_p} h^{V_3}(\cdots h^{V_p}(Q)\cdots) \text{ with } Q \in I.$$

Finally we have

$$\sigma_k^H(G) = y^l h(Q) \text{ with } l = (l_2, \ldots, l_p) \text{ and } Q \in I.$$

□

COROLLARY 6.13. *For each $G \in h(I)$, we have $G_{|y=(1,\ldots,1)} \in I$.*

Another consequence of lemma 6.12 is that $h(I)$ is multihomogeneous : if we compute a standard basis of $h(I)$ with respect to some order, then we will be able to construct another standard basis whose elements will be H-homogeneous : let us denote by $G_1, \ldots, G_q$ such a basis, then $\{\sigma_k^H(G_i)/k \in \mathbf{Z}^{p-1}, i = 1, \ldots, q\}$ will be another standard basis.
In fact we shall see that, in our case, only q elements of this system will be useful.

6.3. Computation of $\mathcal{B}_\Sigma$. From now on, we denote by V^+ the linear form on $\mathbf{N}^{2p}$:

$$V^+(\mu, \nu) = \nu_2 - \mu_2 + \cdots + \nu_p - \mu_p.$$

We naturally extend V^+ on $\mathbf{N}^{2n+2p+p-1}$.

DEFINITION 6.14. *Let $G(y) \in \mathbf{A}_{n+p}[y]$. Then we say that $G(y)$ (or $G(1)$) is V-regular if $\sigma^V(G(1)) \neq 0$.*

DEFINITION 6.15. *On $\mathbf{N}^{2n+2p+p-1}$ we define the following order :*

$$(\alpha, \beta, \mu, \nu, \eta) \prec_{\mathcal{B}_\Sigma} (\alpha', \beta', \mu', \nu', \eta')$$

$$\iff \begin{cases} \quad \nu_1 - \mu_1 < \nu'_1 - \mu'_1 \\ \textit{or} \ \big(= \textit{ and } V^+(\mu,\nu) < V^+(\mu',\nu')\big) \\ \textit{or} \ \big(= \textit{ and } = \textit{ and } |\eta| < |\eta'|\big) \\ \textit{or} \ \big(= \textit{ and } = \textit{ and } = \textit{ and } (\alpha,\beta,\mu,\nu,\eta) \prec (\alpha',\beta',\mu',\nu',\eta')\big) \end{cases}$$

where $\prec$ is a total well-order compatible with sums.

PROPOSITION 6.16. *Let $P \in \mathbf{A}_{n+p}$,*

$$P \text{ is } V\text{-regular} \iff mp_{\prec_{\mathcal{B}_\Sigma}}(h(P)) \text{ has no } y_j \text{ in its factorization,}$$

where $mp_{\prec_{\mathcal{B}_\Sigma}}(h(P))$ is the privileged monomial of $h(P)$ with respect to the order $\prec_{\mathcal{B}_\Sigma}$.

PROOF. Denote $\gamma = \exp_{\prec_{\mathcal{B}_\Sigma}}(P)$. We have :

$$\mathrm{mp}_{\prec_{\mathcal{B}_\Sigma}}(h(P)) \text{ has no factors } y_j \iff \forall j = 2, \dots, p \quad V_j(\gamma) = \mathrm{ord}^{V_j}(P).$$

Assume that $\forall j = 2, \dots, p \quad V_j(\gamma) = \mathrm{ord}^{V_j}(P)$. By the definition of $\prec_{\mathcal{B}_\Sigma}$, we also have $V_1(\gamma) = \mathrm{ord}^{V_1}(P)$, hence $\gamma \in \mathrm{ND}(\sigma^V(P))$ and then $\sigma^V(P) \neq 0$, i.e. P is V-regular.
Conversely, assume that P is V-regular. Then let $\gamma_0 \in \mathrm{ND}(\sigma^V(P))$. By the definition of $\prec_{\mathcal{B}_\Sigma}$, we have $V_1(\gamma_0) = V_1(\gamma)$, then, by the same definition, we have :

$$V_2(\gamma) + \cdots + V_p(\gamma) = V^+(\gamma) \geq V^+(\gamma_0) = \mathrm{ord}^{V_2}(P) + \cdots + \mathrm{ord}^{V_p}(P),$$

but, since $\forall j = 2, \dots, p \quad V_j(\gamma) \leq \mathrm{ord}^{V_j}(P)$ we have

$$\forall j = 2, \dots, p \quad V_j(\gamma) = \mathrm{ord}^{V_j}(P)$$

and then $\mathrm{mp}_{\prec_{\mathcal{B}_\Sigma}}(h(P))$ has no y_j in its factorization. □

COROLLARY 6.17. *Let $G = G(y) \in \mathbf{A}_{n+p}[y]$ such that G is H-homogeneous then :*

$$mp_{\prec_{\mathcal{B}_\Sigma}}(G) \text{ has no } y_j \text{ in its factorization} \Longrightarrow G \text{ is } V\text{-regular}$$

PROOF. This is a direct consequence of lemma 6.11, corollary 6.13 and proposition 6.16. □

Computation of $\mathcal{B}_\Sigma$
We first give a lemma :

LEMMA 6.18. *Let $q, P \in \mathbf{A}_{n+p}$ with q a monomial, such that $\mathrm{ord}^V(qP) = (0, \dots, 0)$, then $\sigma^V(qP) \in \mathbf{A}_n[-\partial_t t]\psi(P)(-\partial_t t)$.*

PROOF. We have :

(i): $t_j^k \partial_{t_j}^k \in \mathbf{K}[-\partial_{t_j} t_j]$

(ii): $t^k c(-\partial_t t) \in \mathbf{K}[-\partial_t t] t^k$ with $c(x) \in \mathbf{K}[x]$

We prove (i) by an induction on k (for $k = 0$, (i) is true) :

$$\begin{aligned} t^k \partial_t^k &= t^k \partial_t \partial_t^{k-1} \\ &= (\partial_t t^k - k t^{k-1}) \partial_t^{k-1} \\ &= (\partial_t t - k) t^{k-1} \partial_t^{k-1} \end{aligned}$$

hence (i) is true by the induction hypothesis.
For (ii), we remark that it is enough to prove the result for $c(x) = x$:

$$\begin{aligned} t^k \partial_t t &= (\partial_t t^k + k t^{k-1}) t \\ &= (\partial_t t + k) t^k. \end{aligned}$$

Using these relations, it is easy to see that $q \in \mathbf{A}_n[-\partial_t t] S_1 \cdots S_p$ (see the notations of definition 5.2), thus :

$$\sigma^V(qP) \in \mathbf{A}_n[-\partial_t t]\sigma^V(S_1 \cdots S_p P)(-\partial_t t).$$

□

Let $G_1(y), \ldots, G_q(y), \ldots, G_{q+r}(y)$ be a $\prec_{\mathcal{B}_\Sigma}$-standard basis of $h(I)$ (in the sense of proposition 2.1) such that $G_1, \ldots, G_q$ are V-regular and not the next ones. By Lemma 6.12, $h(I)$ is H-homogeneous so that for each G_i from this basis and each $k \in \mathbf{Z}^{p-1}$, we have $\sigma^H_k(G_i) \in h(I)$.
For each $i = 1, \ldots, q+r$, let $k_i \in \mathbf{Z}^{p-1}$ such that

$$\exp_{\prec_{\mathcal{B}_\Sigma}}(G_i) = \exp_{\prec_{\mathcal{B}_\Sigma}}(\sigma^H_{k_i}(G_i))$$

and let $H_i(y) = \sigma^H_{k_i}(G_i)$, H_i is H-homogeneous. We shall prove that :

PROPOSITION 6.19. *$\psi_{\mathcal{B}_\Sigma}(I)$ is generated by $\psi(H_1(1)), \ldots, \psi(H_q(1))$.*

Remark that $\forall i, \quad \psi(H_i(1)) \in \psi_{\mathcal{B}_\Sigma}(I)$ by corollary 6.13

PROOF. Let $P \in I$, $P \neq 0$, be V-regular and such that $\mathrm{ord}^V(P) = (0, \ldots, 0)$. We have $h(P) \in h(I)$, and therefore :

$$\exists j_0 \in \{1, \ldots, q+r\} \;/\; \exp_{\prec_{\mathcal{B}_\Sigma}}(h(P)) \in \exp(H_{j_0}) + \mathbf{N}^{2(n+p)+p-1}.$$

By proposition 6.16 (applied to P) and corollary 6.17 (applied to $H_1, \ldots, H_{q+r}$), we have necessarily $j_0 \in \{1, \ldots, q\}$. Let m_{j_0} be the monomial such that

$$\mathrm{mp}_{\prec_{\mathcal{B}_\Sigma}}(h(P)) = m_{j_0}\mathrm{mp}_{\prec_{\mathcal{B}_\Sigma}}(H_{j_0}).$$

Necessarily m_{j_0} and $\mathrm{mp}_{\prec_{\mathcal{B}_\Sigma}}(H_{j_0})$ have no y_j in their factorization.
We set $\tilde{P}_1 = h(P) - m_{j_0}H_{j_0}$, we have $\tilde{P}_1 \in h(I)$.
If $\sigma^V_{(0,\ldots,0)}(\tilde{P}_1) = 0$ then we stop the process.
If $\sigma^V_{(0,\ldots,0)}(\tilde{P}_1) \neq 0$ then :

– $\tilde{P}_1$ is H-homogenous.
– $\tilde{P}_1 = y^m h(\tilde{P}_{1|y=(1,\ldots,1)})$ with $m \in \mathbf{N}^{p-1}$.
– $\forall j = 2, \ldots, p$, $\mathrm{ord}^{V_j}(\tilde{P}_1) = 0$
– It follows that $m = (0, \ldots, 0)$ and $\tilde{P}_1 = h(\tilde{P}_{1|y=(1,\ldots,1)})$ is V-regular.
– In this case, we can apply the process with P replaced by $\tilde{P}_{1|y=(1,\ldots,1)}$.

We continue the process :

$$\tilde{P}_{k+1} = \tilde{P}_k - m_{j_k}H_{j_k}$$

with $\forall k$, $j_k \in \{1, \ldots, q\}$,
and we stop the process as soon as $\sigma^V_{(0,\ldots,0)}(\tilde{P}_{s+1}) = 0$ i.e. when all the monomials of $\sigma^V(P)$ are eliminated. Remark that the restriction of $\prec_{\mathcal{B}_\Sigma}$ to $\{(\alpha, \beta, \mu, \nu, \eta) \in \mathbf{N}^{2n+2p+p-1} / \forall j = 1, \ldots, p \;\; \nu_j - \mu_j = 0\}$ is a well-order and that for all $k < s$

$$\exp_{\prec_{\mathcal{B}_\Sigma}}(\sigma^V_{(0,\ldots,0)}(\tilde{P}_{k+1})) = \exp_{\prec_{\mathcal{B}_\Sigma}}(\tilde{P}_{k+1}) \prec_{\mathcal{B}_\Sigma} \exp_{\prec_{\mathcal{B}_\Sigma}}(\tilde{P}_k) = \exp_{\prec_{\mathcal{B}_\Sigma}}(\sigma^V_{(0,\ldots,0)}(\tilde{P}_k)).$$

Thus we obtain :

$$h(P) = \sum_{k=0}^{s} m_{j_k}H_{j_k} + \tilde{P}_{s+1}$$

with

$$\begin{cases} \forall k,\ j_k \in \{1, \ldots, q\} \\ \forall k,\ \operatorname{ord}^V(m_{j_k} H_{j_k}) = (0, \ldots, 0) \\ \sigma^V_{(0,\ldots,0)}(\tilde{P}_{s+1}) = 0. \end{cases}$$

Finally

$$\sigma^V_{(0,\ldots,0)}(P) = \sum_{k=0}^{s} \sigma^V_{(0,\ldots,0)}(m_{j_k}(1) H_{j_k}(1))$$

and by lemma 6.18, $\forall k$, $\sigma^V_{(0,\ldots,0)}(m_{j_k} H_{j_k}(1)) \in \mathbf{A}_n[-\partial_t t]\psi(H_{j_k}(1))(-\partial_t t)$ hence

$$\psi(P) \in \sum_{i=0}^{q} \mathbf{A}_n[s]\psi(H_i(1))(s).$$

$\square$

We then find a finite system of generators of $\psi_{\mathcal{B}_\Sigma}$, and by remark 5.5 we can compute $\mathcal{B}_\Sigma$.

6.4. Computation of $\mathcal{B}_j$. Since we can permute f_1 and f_j, we can assume that $j = 1$, thus we shall compute B_1.

DEFINITION 6.20. *Let $G(y) \in \mathbf{A}_{n+p}[y]$. We say that $G(y)$ (or $G(1)$) is $\mathcal{B}_1$-good if we have the following condition :*

$$\operatorname{ord}^{V_1}(G(1) - \sigma^V(G(1))) < \operatorname{ord}^{V_1}(G(1)).$$

DEFINITION 6.21. *On $\mathbf{N}^{2n+2p+p-1}$ we define the following order :*

$$(\alpha, \beta, \mu, \nu, \eta) \prec_{\mathcal{B}_1} (\alpha', \beta', \mu', \nu', \eta')$$

$$\iff \begin{cases} \quad \nu_1 - \mu_1 < \nu'_1 - \mu'_1 \\ \textit{or} \quad \big(= \textit{ and } V^+(\mu', \nu') < V^+(\mu, \nu)\big) \\ \textit{or} \quad \big(= \textit{ and } = \textit{ and } |\eta| < |\eta'|\big) \\ \textit{or} \quad \big(= \textit{ and } = \textit{ and } = \textit{ and } (\alpha, \beta, \mu, \nu, \eta) \prec (\alpha', \beta', \mu', \nu', \eta')\big) \end{cases}$$

where $\prec$ is a total well-order compatible with sums.

PROPOSITION 6.22. *Let $P \in \mathbf{A}_{n+p}$,*

$$P \textit{ is } \mathcal{B}_1\textit{-good} \iff \textit{mp}_{\prec_{\mathcal{B}_1}}(h(P)) \textit{ has no } y_j \textit{ in its factorization.}$$

PROOF. Denote $\gamma = \exp_{\prec_{\mathcal{B}_1}}(P)$. As in proposition 6.16, we have :

$$\operatorname{mp}_{\prec_{\mathcal{B}_1}}(h(P)) \text{ has no factors } y_j \iff \forall j = 2, \ldots, p \quad V_j(\gamma) = \operatorname{ord}^{V_j}(P).$$

Assume that P is not $\mathcal{B}_1$-good, i.e. there exists $\gamma' \in \operatorname{ND}(P) \smallsetminus \operatorname{ND}(\sigma^V(P))$ such that $V_1(\gamma') = \operatorname{ord}^{V_1}(P)$ then $V^+(\gamma) \le V^+(\gamma') < \operatorname{ord}^{V_2}(P) + \cdots + \operatorname{ord}^{V_p}(P)$ and then $\operatorname{mp}_{\prec_{\mathcal{B}_1}}(h(P))$ has an y_j in its factorization.
Conversely, assume that P is $\mathcal{B}_1$-good, then $\sigma^V(P) = \sigma^{V_1}(P)$. But, by the definition of $\prec_{\mathcal{B}_1}$, $\gamma \in \operatorname{ND}(\sigma^{V_1}(P))$. Then $\gamma \in \operatorname{ND}(\sigma^V(P))$ and then $V_j(\gamma) = \operatorname{ord}^{V_j}(P) \quad \forall j = 2, \ldots, p$, i.e. $\operatorname{mp}_{\prec_{\mathcal{B}_1}}(h(P))$ has no factors y_j. $\square$

Computation of $\mathcal{B}_1$

Let $G_1(y), \ldots, G_q(y), \ldots, G_{q+r}(y)$ a $\prec_{\mathcal{B}_1}$-standard basis of $h(I)$ (in the sense of proposition 2.1) such that $G_1, \ldots, G_q$ are $\mathcal{B}_1$-good and not the next ones.
For each $i = 1, \ldots, q+r$, let $k_i \in \mathbf{Z}^{p-1}$ such that

$$\exp_{\prec_{\mathcal{B}_1}}(G_i) = \exp_{\prec_{\mathcal{B}_1}}(\sigma^H_{k_i}(G_i))$$

and let $H_i(y) = \sigma^H_{k_i}(G_i)$: H_i is H-homogeneous, and we can prove in the same way as for $\psi_{\mathcal{B}_\Sigma}(I)$ that :

Proposition 6.23. *$\psi_{\mathcal{B}_1}(I)$ is generated by $\psi(H_1(1)), \ldots, \psi(H_q(1))$.*

As before, we can obtain generators of $\mathcal{B}_1$ using remark 5.5.

6.5. Examples.

(1) Let $f_1 \in \mathbf{K}[x_1, \ldots, x_m]$, $f_2 \in \mathbf{K}[x_{m+1}, \ldots, x_n]$, with $m < n$. Let b_1 and b_2 be the Bernstein polynomials associated repectively with f_1 and f_2 then we can show that :

$$\mathcal{B}_1 = \mathbf{K}[s_1, s_2]b_1(s_1) \text{ and } \mathcal{B}_\Sigma = \mathbf{K}[s_1, s_2](b_1(s_1), b_2(s_2))$$

(2) An example treated by hand.
Let $f_1(x_1, x_2) = x_1 + x_2^2$ and $f_2(x_1, x_2) = x_1$.
The ideal I of $\mathbf{A}_4$ is generated by : $P_1 = t_1 - x_1 - x_2^2$, $P_2 = t_2 - x_1$, $P_3 = \partial_{x_1} + \partial_{t_1} + \partial_{t_2}$ and $P_4 = \partial_{x_2} + 2x_2\partial_{t_1}$.
Using semisyzygies, we can see that P_1, P_2, P_3, P_4 is already a V_2-standard basis of I. To make these calculations we decided that $\mathrm{mp}_{\prec_{V_2}}(P_1) = -x_2^2$ and $\mathrm{mp}_{\prec_{V_2}}(P_4) = \partial_{x_2}$. Thus $h(I) = h^{V_2}(I)$ is generated by $Q_1 = h(P_1)$, $Q_2 = h(P_2)$, $Q_3 = h(P_3)$, $Q_4 = h(P_4)$.
By a number of divisions of semisyzygies, we obtain the following elements of $h(I)$:
$Q_5 = x_2\partial_{x_2} + 2t_2\partial_{t_2} + 2t_1\partial_{t_1} + 2y_2t_2\partial_{x_1} + 2$,
$Q_6 = 2x_2\partial_{t_2} + 2x_2\partial_{x_1}y_2 - \partial_{x_2}y_2$,
$Q_7 = 4t_1\partial_{t_1}^2 + 4t_2\partial_{t_2}\partial_{t_1} + 6\partial_{t_1} - 4\partial_{x_1}t_2\partial_{t_2} - 4t_2y_2\partial_{x_1}^2 - \partial_{x_2}^2$,
$Q_8 = 4t_1\partial_{t_1}\partial_{t_2} + 4t_2\partial_{t_2}^2 + 6\partial_{t_2} + 6\partial_{x_1}y_2 + \partial_{x_2}^2y_2 + 8t_2\partial_{t_2}\partial_{x_1}y_2 + 4t_1\partial_{t_1}\partial_{x_1}y_2 + 4t_2\partial_{x_1}^2y_2^2$.
These divisions are made with respect to the order $\prec_{\mathcal{B}_\Sigma}$. Remember that, for two multi-indices ω and ω', we first compare $V_1(\omega)$ and $V_1(\omega')$ then $V_2(\omega)$ and $V_2(\omega')$ and then we compare ω and ω' using a well-order $\prec$. Here we decided that $\prec$ is a lexical order such that $\exp_\prec(x_2) \succ \exp_\prec(t_1) \succ \zeta$ where $\zeta = \max_\prec\{\exp_\prec(\xi)/\xi \in \{x_1, \partial_{x_1}, \partial_{x_2}, t_2, \partial_{t_1}, \partial_{t_2}, y_2\}\}$. In fact, the computation of a $\prec_{\mathcal{B}_\Sigma}$-standard basis of $h(I)$ is not complete but at this point we can see that Q_7 and Q_8 are V-regular and we have :
$\psi(Q_7) = (s_1 + 1)(2s_1 + 2s_2 + 3)$ and $\psi(Q_8) = (s_2 + 1)(2s_1 + 2s_2 + 3)$.
Let E be the ideal of $\mathbf{K}[s_1, s_2]$ generated by $\psi(Q_7)$ and $\psi(Q_8)$. We have the inclusion $E \subset \mathcal{B}_\Sigma$. We also prove that $\mathcal{B}_\Sigma \subset \mathbf{K}[s_1, s_2](s_1 + 1, s_2 + 1)$ (by taking $s_1 = -1$, $s_2 = -1$ in a functional equation).

Proposition 6.24. *We have $\mathcal{B}_\Sigma = E$.*

PROOF. If the inclusion $E \subset \mathcal{B}_\Sigma$ is not an equality, then we can construct an element $b(s_1, s_2)$ in $\mathcal{B}_\Sigma$ such that for all $c \in \mathbf{Z} \setminus 4$, $(2s_1 + 2s_2 + c)$ does not divide b. Using an argument of H. Maynadier (see [**May1**]), it would follow that

$$(s_1+1)(s_2+1)\Pi_{d_1,d_2\in\mathbf{N},d_1+d_2\leq l-1}b(s_1+d_1, s_2+d_2) \text{ where } l \in \mathbf{N}$$

is in $\mathcal{B}$. But, according to loc.cit., B is principal and generated by $(s_1 + 1)(s_2+1)(2s_1+2s_2+3)(2s_1+2s_2+5)$. Contradiction. $\square$

(3) The next examples have been made using the software KAN (see [**T**]). The results for $\mathcal{B}$ come from [**May1**].
$(f_1, f_2)(x_1, x_2) = (x_1, x_1 + x_2^2)$
   – $\mathcal{B}_\Sigma =< (s_1+1)(2s_1+2s_2+3), (s_2+1)(2s_1+2s_2+3) >$
   – $\mathcal{B}_1 =< (s_1+1)(2s_1+2s_2+3) >$
   – $\mathcal{B}_2 =< (s_2+1)(2s_1+2s_2+3) >$
   – $\mathcal{B} =< (s_1+1)(s_2+1)(2s_1+2s_2+3)(2s_1+2s_2+5) >$

(4) $(f_1, f_2)(x_1, x_2) = (x_1, x_1 + x_2^3)$
   – $\mathcal{B}_\Sigma =< (s_1+1)(3s_1+3s_2+4)(3s_1+3s_2+5), (s_2+1)(3s_1+3s_2+4)(3s_1+3s_2+5) >$
   – $\mathcal{B}_1 =< (s_1+1)(3s_1+3s_2+4)(3s_1+3s_2+5) >$
   – $\mathcal{B}_2 =< (s_2+1)(3s_1+3s_2+4)(3s_1+3s_2+5) >$
   – $\mathcal{B} =< (s_1+1)(s_2+1)(3s_1+3s_2+4)(3s_1+3s_2+5)(3s_1+3s_2+7)(3s_1+3s_2+8) >$

(5) $(f_1, f_2)(x_1, x_2) = (x_1, x_1^2 + x_2^3)$
   – $\mathcal{B}_\Sigma =< (s_1+1)(3s_1+6s_2+5)(3s_1+6s_2+7), (s_2+1)(3s_1+6s_2+5)(3s_1+6s_2+7) >$
   – $\mathcal{B}_1 =< (s_1+1)(3s_1+6s_2+5)(3s_1+6s_2+7) >$
   – $\mathcal{B}_2 =< (s_2+1)(3s_1+6s_2+5)(3s_1+6s_2+7)(3s_1+6s_2+8)(3s_1+6s_2+10) >$
   – $\mathcal{B} =< (s_1+1)(s_2+1)(3s_1+6s_2+5)(3s_1+6s_2+7)(3s_1+6s_2+8)(3s_1+6s_2+10)(3s_1+6s_2+11)(3s_1+6s_2+13) >$

(6) $(f_1, f_2)(x_1, x_2) = (x_1, x_1^3 + x_2^2)$
   – $\mathcal{B}_\Sigma =< (s_1+1)(2s_1+6s_2+5), (s_2+1)(2s_1+6s_2+5) >$
   – $\mathcal{B}_1 =< (s_1+1)(2s_1+6s_2+5) >$
   – $\mathcal{B}_2 =< (s_2+1)(2s_1+6s_2+5)(2s_1+6s_2+7)(2s_1+6s_2+9) >$
   – $\mathcal{B} =< (s_1+1)(s_2+1)(2s_1+6s_2+5)(2s_1+6s_2+7)(2s_1+6s_2+9)(2s_1+6s_2+11) >$

(7) $(f_1, f_2)(x_1, x_2) = (x_1^2 + x_2^3, x_1^3 + x_2^2)$
   – $\mathcal{B}_\Sigma =< (s_1+1)(4s_1+6s_2+5)(4s_1+6s_2+7)(6s_1+4s_2+5)(6s_1+4s_2+7), (s_2+1)(4s_1+6s_2+5)(4s_1+6s_2+7)(6s_1+4s_2+5)(6s_1+4s_2+7) >$
   – $\mathcal{B}_1 =< (s_1+1)(4s_1+6s_2+5)(4s_1+6s_2+7)(6s_1+4s_2+5)(6s_1+4s_2+7)(6s_1+4s_2+9) >$
   – $\mathcal{B}_2 =< (s_2+1)(4s_1+6s_2+5)(4s_1+6s_2+7)(6s_1+4s_2+5)(6s_1+4s_2+7)(4s_1+6s_2+9) >$

Some ramarks :
- The computation of $\mathcal{B}$ for example 7 seems to be hard. We tried using the algorithm of Oaku (in [**O-T**]) but the computer did not succeed.

- We can see that in examples 4, 5, 6 and 7, we don't have $\mathcal{B}_\Sigma = \mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_2$.
- In these examples, $\mathcal{B}$ can be obtained as follows :

Take $\mathcal{B}_2(s_1+1, s_2) := \{b(s_1+1, s_2)/b(s_1, s_2) \in \mathcal{B}_2\}$ then $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1.\mathcal{B}_2(s_1+1, s_2)$. Remark that we also have $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1(s_1, s_2+1).\mathcal{B}_2$ where $\mathcal{B}_1(s_1, s_2+1) = \{b(s_1, s_2+1)/b(s_1, s_2) \in \mathcal{B}_1\}$.

Compléments à l'article précédent

6.6. Résultats généraux. Considérons un idéal I de $\mathbf{A}_m$ et $L_1, \ldots, L_p$ des formes linéaires prises sur $\mathbf{N}^{2m}$ appartenant à $\mathcal{U}$. Notons $L = (L_1, \ldots, L_p)$. Dans le cas $p = 1$, posons $L = L_1$. Voici un certain nombre de questions naturelles que l'on peut se poser :

(1) Dans le cas $p = 1$, on sait calculer $\mathrm{gr}^L(I)$. Que dire quand $p \geq 2$?

(2) Quand $p = 2$, nous avons des éléments qui ont une pente, les autres etant appelés L-réguliers. Peut on en (les) trouver s'ils existent ?

(3) Même question dans le cas général $p \geq 2$.

Pour toutes (en fait elles n'en font qu'une) ces questions, le processus d'homogénéisation utilisé dans l'article en question permet de répondre explicitement.

Pour cela considérons l'idéal $h^{2,.,p}(I) = h^{L_2}(\cdots h^{L_p}(I) \cdots) \subset \mathbf{A}_m[y_2, \ldots, y_p] = \mathbf{A}_m[y]$ que nous noterons $h(I)$ dans cette section. De plus, considérons l'ordre $\prec_{L_1}$ définit sur $\mathbf{N}^{2m+p-1}$ par :

$$(\alpha, \beta, \eta) \prec_{L_1} (\alpha', \beta', \eta') \Longleftrightarrow$$

$$\begin{cases} L_1(\alpha, \beta) < L_1(\alpha', \beta') \\ \text{ou égalité et } L^+(\alpha, \beta) < L^+(\alpha', \beta') \\ \text{ou égalités et } |\eta| < |\eta'| \\ \text{ou égalités et } (\alpha, \beta, \eta) <_0 (\alpha', \beta', \eta') \end{cases}$$

où L^+ désigne la forme linéaire $L_2 + \cdots + L_p$ et $<_0$ est un bon ordre sur $\mathbf{N}^{2m+p-1}$ compatible avec l'addition.

Remarquons que dans l'article au JSC, on a $m = n + p$ et $L_j = V_j$ et dans ce cas cet ordre n'est rien d'autre que $\prec_{\mathcal{B}_\Sigma}$.
Comme dans ce papier, $h(I)$ se calcule par $p-1$ calculs de $\prec_{L_j}$-bases standards avec à chaque fois homogénéisation de la base standard obtenue.

Maintenant considérons la base standard $\mathcal{H}$ de $h(I)$ par rapport à $\prec_{L_1}$ obtenue de la façon suivante (similaire à celle de la proposition 6.19 de l'article). On considère une $\prec_{L_1}$-base standard de $h(I)$ qui est H-homogène (avec les notations de l'article). Pour chaque élément de cet base, on prend le symbole σ_k^H ($k \in \mathbf{Z}^{p-1}$) qui contient l'exposant privilégié de l'élément en question. Le nouvel ensemble ainsi contruit qu'on baptise $\mathcal{H}$ est aussi une base standard de $h(I)$ pour $\prec_{L_1}$ mais constituée d'éléments H-homogènes.
Nous avons le résultat suivant :

PROPOSITION 7.1.

(a): *Il existe dans I un élément L-régulier si et seulement si $\mathcal{H}$ en contient. Notons $H_1, \ldots, H_r$ les éléments L-réguliers de $h(I)$.*

(b): *L'ensemble $\{\sigma^L(H_k), k = 1, \ldots, r\}$ engendre $gr^L(I)$.*

(c): *$gr^L(I) = (0) \iff \mathcal{H}$ n'a pas d'éléments L-réguliers.*

Démonstration. Elle est en tout point semblable à celle de la proposition 6.19 du papier au JSC. □

6.7. Résultats concernant l'article précédent. Ici $m = n + p$ et I désigne l'annulateur de $f^s = f_1^{s_1} \cdots f_p^{s_p}$ dans $\mathbf{A}_{n+p}$.

Commençons par une remarque qui n'a pas été faite dans l'article au JSC.

REMARQUE 7.2. *$\psi_{\mathcal{B}_\Sigma}(I)$ est isomorphe à l'anneau $gr^V_{(0,\ldots,0)} = \{\sigma^V(P)/P \in I,\ ord^V(P) = (0,\ldots,0)\}$ via l'application $s_j \mapsto -\partial_{t_j} t_j$.*

L'intérêt du résultat suivant consiste dans le fait que pour calculer l'annulateur de I dans $\mathbf{A}_n[s]$ autrement dit $I \cap \mathbf{A}_n[-\partial_t t]$, l'algorithme de T. Oaku utilise $2n + 2p + 2p$ variables alors qu'ici on fait des calculs avec au plus $2n + 2p + p$ variables. Dans le cas $p = 2$, on ne gagne que deux variables mais ça peut être décisif.

PROPOSITION 7.3. *Ici $h(I)$ désigne l'idéal $h^{V_1}(\cdots h^{V_p}(I) \cdots)$ de $\mathbf{A}_{n+p}[y] = \mathbf{A}_{n+p}[y_1, \ldots, y_p]$. Soit $\mathcal{H}$ une base standard de $h(I)$ pour un ordre qui élimine les variables y_j. Alors $I \cap \mathbf{A}_n[s]$ est engendré par l'ensemble des $\psi(H)$ pour $H \in \mathcal{H} \cap \mathbf{A}_{n+p}$.*
Rappelons que $\psi(H)(s)$ est défini par : $\psi(H)(-\partial_t t) = \sigma^V(S_1(H) \cdots S_p(H) H)$ où $S_j(H) = t_j^{ord^{V_j}(H)}$ si $ord^{V_j}(H) \geq 0$ et $S_j(H) = \partial_{t_j}^{-ord^{V_j}(H)}$ sinon.

Dans l'algorithme de Oaku, on a besoin de rajouter les générateurs de la forme $1 - y_j y'_j$ de manière à ce que $h^V(P)$ soit dans l'idéal pour lequel on fait un calcul de base standard (d'où la necessité de rajouter p variables supplémentaires $y'_1, \ldots, y'_p$). Mais ici, on a tout fait pour avoir $h^V(P) \in h(I)$. Pour le reste de la preuve, il n'y a aucune différence avec celle de l'algorithme de Oaku.
Pour conclure, une dernière remarque.

REMARQUE 7.4.
– *Grâce à cette proposition, on dispose d'un algorithme qui permet de calculer l'idéal $\mathcal{B}$ avec au plus $2n + 3p$ variables comme c'était le cas pour $\mathcal{B}_j$ et $\mathcal{B}_\Sigma$ dans l'article au JSC.*
– *Signalons que J. Briançon et P. Maisonobe ont obtenu dans* [**Br-Mai**] *un algorithme de calcul de l'idéal de Bernstein-Sato $\mathcal{B}$ (algorithme qui donne en fait tous les idéaux $\mathcal{B}^v$) avec des bases de Gröbner utilisant au plus $2n + 2p$ variables dans l'anneau "intermédiaire" $\mathbf{A}_n[\partial_t, s]$.*

ANNEXE A

Calculs sur Kan

Dans cette annexe, nous avons rassemblé un certain nombre de calculs faits pour la plus grande partie en utilisant le logiciel Kan développé par N. Takayama [**T**]. Pour les calculs demandant moins de puissance (comme la factorisation ou le calcul de b_L à partir de $\mathcal{B}_L$), nous nous sommes servi de Maple.

Dans une premiere section, nous nous intéressons à l'exemple pour lequel J. Briançon et H. Maynadier [**Br-May**] ont montré que l'idéal $\mathcal{B}$ analytique n'est pas principal. Nous calculons sur cet exemple les idéaux de Bernstein-Sato $\mathcal{B}_\Sigma$, $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ et $\mathcal{B}$ et nous constatons que $\mathcal{B}_1$ n'est pas principal alors que $\mathcal{B}$ l'est.

Sur ce même exemple et comme $\mathcal{B}_1$ n'est pas principal, il est intéressant d'introduire un paramètre afin de calculer l'idéal de Bernstein-Sato générique. C'est l'objet de la section 2. Nous y traitons un autre exemple.

Dans la troisième section, nous calculons sur trois exemples (dont celui de [**Br-May**]) à deux fonctions les différents idéaux $\mathcal{B}_L$ ainsi que les b_L pour les pentes données par les "sauts" des $\mathcal{B}_L$. Nous y répondons à un certain nombre de questions naturelles dont une (voir A.1) qui consiste à se demander si l'idéal $\mathcal{B}^v$ ($v \in \mathbf{N}^2$ étant donné) est engendré par des éléments de la forme $\prod_L \prod_{k\geq 0} b_L(L(s)+k)$.

Avant d'aller plus loin et pour la commodité du lecteur, rappelons les différents idéaux de Bernstein-Sato auxquels nous nous sommes intéressés.

Etant donnés $f_1, \ldots, f_p$ dans $\mathbf{C}[x] = \mathbf{C}[x_1, \ldots, x_n]$, voici les idéaux de Bernstein-Sato en question :

- $\mathcal{B}_\Sigma = \{b(s) \in \mathbf{C}[s_1, \ldots, s_p]\,;b(s)f^s \in \sum_{j=1}^p \mathbf{A}_n(\mathbf{C})[s]f_j f^s\}$,
- $\mathcal{B}_j = \{b(s) \in \mathbf{C}[s_1, \ldots, s_p]\,;b(s)f^s \in \mathbf{A}_n(\mathbf{C})[s]f_j f^s\}$ pour $j = 1, \ldots, p$,
- $\mathcal{B} = \{b(s) \in \mathbf{C}[s_1, \ldots, s_p]\,;b(s)f^s \in \mathbf{A}_n(\mathbf{C})[s]f_1 \cdots f_p f^s\}$,
- $\mathcal{B}^v = \{b(s) \in \mathbf{C}[s_1, \ldots, s_p]\,;b(s)f^s \in \mathbf{A}_n(\mathbf{C})[s]f_1 \cdots f^{s+v}\}$ pour $v \in \mathbf{N}^p$.

On constate par exemple que pour $p = 2$, on a $\mathcal{B} = \mathcal{B}^{(1,1)}$, $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}^{(1,0)}$ et $\mathcal{B}_2 = \mathcal{B}^{(0,1)}$. Ceux que nous appelons idéaux de Bernstein-Sato analytiques sont définis comme les précédents en remplaçant $\mathbf{A}_n(\mathbf{C})[s]$ par $\mathcal{D}_n[s]$.

1. L'exemple de J. Briançon et H. Maynadier

Considérons l'application de $\mathbf{C}^3$ dans $\mathbf{C}^2$ donnée par :

$$(f_1, f_2) = (x_3\,,\, x_1^4 + x_2^4 + 2x_3x_1^2x_2^2).$$

Dans [**Br-May**], les auteurs ont montré que l'idéal de Bernstein-Sato analytique $\mathcal{B}$ n'est pas principal. Nous avons calculé les idéaux $\mathcal{B}_\Sigma$, $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ et $\mathcal{B}$ (algébriques). Il en ressort les résultats suivants :

- $\mathcal{B}_\Sigma = B_1 + B_2$
- $\mathcal{B}_1 =< (s_1+1)(2s_2+1)\,,\,(s_1+1)(s_1+2) >$
- $\mathcal{B}_2 =< (s_2+1)^2(4s_2+5)(2s_2+3)(2s_2+1)(4s_2+3) >$
- $\mathcal{B} =< (s_1+1)(s_2+1)^2(4s_2+5)(2s_2+3)(2s_2+1)(4s_2+3) >$

On peut en tirer un certain nombre de remarques :
- On voit donc que l'idéal $\mathcal{B}$ est principal dans le cas algébrique et pas dans le cas analytique.
- L'idéal $\mathcal{B}_1$ est quand à lui non principal, on en conclut que les idéaux $\mathcal{B}^v$ n'ont aucune raison d'être tous principaux ou tous non principaux.
- Si on note $\mathcal{B}_1(s_1, s_2+1) = \{b(s_1, s_2+1)\,;b(s_1,s_2) \in \mathcal{B}_1\}$ et $\mathcal{B}_2(s_1+1, s_2) = \{b(s_1+1, s_2)\,;b(s_1,s_2) \in \mathcal{B}_2\}$. On peut alors montrer (en utilisant pas exemple Maple) l'égalité :

$$(\$) \qquad \mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cdot \mathcal{B}_2(s_1+1, s_2) + \mathcal{B}_1(s_1, s_2+1) \cdot \mathcal{B}_2,$$

  alors qu'on a des inclusions strictes : $\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2(s_1+1, s_2) \subset \mathcal{B}$ et $\mathcal{B}_1(s_1, s_2+1)\mathcal{B}_2 \subset \mathcal{B}$.

Au vu de ce qui précède, on peut se poser la question de savoir si on a toujours une relation du type ($). On peut même se demander s'il est possible d'obtenir $\mathcal{B}^v$ à partir des $\mathcal{B}_j$ par ce genre de relations, pour n'importe quel v.

2. Polynôme de Bernstein-Sato générique

Etant donné que l'idéal $\mathcal{B}_1$ de l'exemple précédent est non principal, il est intéressant de se demander ce qui se passe si on rajoute un paramètre. C'est pour cela que nous avons regardé $\mathcal{B}_1$ dans les deux cas suivants :

(1) $(f_1, f_2)(x_1, x_2, x_3) = (x_3, x_1^4 + x_2^4 + ax_3x_1^2x_2^2)$

(2) $(f_1, f_2)(x_1, x_2, x_3) = (x_3, ax_1^4 + x_2^4 + 2x_3x_1^2x_2^2)$

Il en ressort pour le (1) :
$\mathcal{B}_1(a)$ est indépendant de a pour tout $a \neq 0$ et vaut le $\mathcal{B}_1$ de la section précédente, et pour $a = 0$, $\mathcal{B}_1 =< (s_1+1) >$.

Pour le (2) :
$\mathcal{B}_1(a) =< a(2s_2+1)(s_1+1), a(s_1+2)(s_1+1) >$ cette égalité étant valable en dehors de $a = 0$ et pour $a = 0$, on a $\mathcal{B}_1 =< (s_1+1)(2s_1+4s_2+3)(2s_1+4s_2+4) >$.

Un autre exemple

Soit $(f_1, f_2)(x_1, x_2) = (x_1^2 + ax_1x_2 + x_2^2\ ,\ x_1^2 + x_2^2)$.

Si on note $h(a) = a(a-1)(a+1)(a-4)(a+4)(3a^2+77)(a^2+16)(a^2+4)(3a^2+20)(a^2-12)(a^2+3)(a-2)(a+2)(a^2-2)$ alors l'idéal de Bernstein-Sato $\mathcal{B}$ de $(f_1, f_2)_{|a}$ est égal à :

$$\mathcal{B} =< 32a^2(a-2)(a+2)(1+s_1)(1+s_2)(2s_2+3+2s_1)(s_2+3+s_1)\times$$

$$\times(s_2+2+s_1)(s_2+1+s_1)(2s_2+5+2s_1) >,$$

pour tout a tel que $h(a) \neq 0$.
A titre d'exemple, si $a = 2$ ou $a = -2$ alors :

$$\mathcal{B} = ((s_1+1)(2s_1+1)(1+s_2)(s_1+s_2+1)(2s_1+2s_2+5)(2s_1+2s_2+3)(s_1+s_2+2)).$$

3. Les idéaux $\mathcal{B}_L$ et polynômes b_L

Les calculs suivants concernent les idéaux $\mathcal{B}_L$ et les polynômes b_L associés à deux fonctions. Etant donné un couple (f_1, f_2), le principe à été de poser $L = d_1V_1 + d_2V_2$ et de faire prendre à $d = (d_1, d_2)$ "beaucoup" de valeurs entières. Pour chaque valeur de d, nous avons (à l'aide de Kan) calculer l'idéal $\mathcal{B}_L$. Cela donne lieu à un certain nombre de pentes L_i telles qu'entre L_i et L_{i+1} l'idéal B_L est constant. Bien entendu, notre méthode ne nous permet pas d'être certain d'obtenir tous les $\mathcal{B}_L$ possibles mais il y a de bonnes chances que ce soit les seuls.

Avant de poursuivre, introduisons certaines notations :

– Pour $L = d_1V_1 + d_2V_2$ on note $\mathcal{B}_L = \mathcal{B}_{(d_1,d_2)}$.
– Si $L = d_1V_1 + d_2V_2$ et $L' = d_1'V_1 + d_2'V_2$, la notation $\mathcal{B}_{\rangle(d_1,d_2),(d_1',d_2')\langle} = J$ signifiera que pour tout L'' appartenant au cône $\rangle L, L'\langle$, l'idéal $\mathcal{B}_{L''}$ est égal à J.

3.1. Exemple 1. Il s'agit de l'application suivante :

$$(f_1, f_2) = (x_1\,,\, x_1 + x_2^2).$$

On trouve cinq idéaux $\mathcal{B}_L$ différents :

– $\mathcal{B}_{(1,0)} =< s_1 + 1 >$
– $\mathcal{B}_{\rangle(1,0),(1,1)\langle} =< s_1 + 1\,,\, (s_2 + 1)(2s_2 + 1) >$
– $\mathcal{B}_{(1,1)} =< (s_1 + 1)(2s_1 + 2s_2 + 3)\,,\, (s_2 + 1)(2s_1 + 2s_2 + 3) >$
– $\mathcal{B}_{\rangle(1,1),(0,1)\langle} =< s_2 + 1\,,\, (s_1 + 1)(2s_1 + 1) >$
– $\mathcal{B}_{(0,1)} =< s_2 + 1 >$

Cela donne lieu à trois b_L différents :

– $b_{(1,0)}(s_1) = s_1 + 1$
– $b_{(1,1)}(u) = (u + 2)(2u + 3)$ et $b_{(1,1)}(s_1 + s_2) = (s_1 + s_2 + 2)(2s_2 + 2s_2 + 3)$
– $b_{(0,1)}(s_2) = s_2 + 1$

Rappelons pour mémoire les idéaux $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ et $\mathcal{B}_\Sigma$:

– $\mathcal{B}_1 =< (s_1 + 1)(2s_1 + 2s_2 + 3) >$
– $\mathcal{B}_2 =< (s_2 + 1)(2s_1 + 2s_2 + 3) >$
– $\mathcal{B} =< (s_1 + 1)(s_2 + 1)(2s_1 + 2s_2 + 3)(2s_1 + 2s_2 + 5) >$
– $\mathcal{B}_\Sigma = \mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_2 = \mathcal{B}_{(1,1)}$

Voici certaines questions naturelles que l'on est amené à se poser :

(1) Existe-t-il un polynôme $c(u)$ tel que $c(1 \cdot s_1 + 3 \cdot s_2)$ appartienne à $\mathcal{B}_{(1,1)}$?
On peut montrer à l'aide de Maple que la réponse est non.

(2) Existe-t-il un polynôme $c(u)$ tel $c(s_1 + s_2)$ appartienne à $\mathcal{B}_{\rangle(1,1),(0,1)\langle}$?
La réponse est oui et c'est $b_{(1,1)}(s_1 + s_2) = (s_1 + s_2 + 2)(2s_2 + 2s_2 + 3)$. Il suffit pour cela de constater que :

$$b_{(1,1)}(s_1 + s_2) = (s_1 + 1)(2s_1 + 1) + [2(s_1 + 1) + (2s_1 + 2s_2 + 3)](s_2 + 1).$$

On constate que le lien entre les différents $\mathcal{B}_L$ n'est pas si clair. Cela pose aussi la question de savoir s'il y a des facteurs "nécessaires" dans un élément de l'idéal $\mathcal{B}$.

(3) Considérons le polynôme suivant :

$$c(s_1, s_2) = b_{(1,0)}(s_1) \cdot b_{(0,1)}(s_2) \cdot b_{(1,1)}(s_1 + s_2) \cdot b_{(1,1)}(s_1 + s_2 + 1)$$

qui est égal à

$$(s_1+1)(s_2+1)(s_1+s_2+2)(2s_1+2s_2+3)(s_1+s_2+3)(2s_2+2s_2+5).$$

On constate que $c(s_1,s_2)$ est un multiple strict du générateur de l'idéal $\mathcal{B}$ mais si on prend le produit de trois polynômes parmis $b_{(1,0)}(s_1)$, $b_{(0,1)}(s_2)$, $b_{(1,1)}(s_1+s_2)$ et $b_{(1,1)}(s_1+s_2+1)$ on obtient un polynôme qui n'est pas dans l'idéal $\mathcal{B}$. Cela répond à la question suivante :

QUESTION A.1. *Etant donné v, l'idéal $\mathcal{B}^v$ est-il engendré par des polynômes s'écrivant $\prod_L \prod_{k\geq 0} b_L(L(s)+k)$?*

Comme on vient de le voir, la réponse est non. Ainsi le procédé par lequel on fabrique un polynôme de Bernstein-Sato (dans le chapitre 2) donne en général un "gros" polynôme de Bernstein.

3.2. Exemple 2. Considérons l'application :

$$(f_1,f_2)=(x_3\,,\,x_1^4+x_2^4+2x_3x_1^2x_2^2),$$

c'est encore une fois l'exemple dû à J. Briançon et H. Maynadier.
D'abord, rappelons les idéaux $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ et $\mathcal{B}$:
- $\mathcal{B}_1 =< (s_1+1)(2s_2+1)\,,\,(s_1+1)(s_1+2) >$
- $\mathcal{B}_2 =< (s_2+1)^2(2s_2+1)(2s_2+3)(4s_2+3)(4s_2+5) >$
- $\mathcal{B} =< (s_1+1)(s_2+1)^2(2s_2+1)(2s_2+3)(4s_2+3)(4s_2+5) >$

Comme dans l'exemple précédent, nous obtenons une "pente" V_1+V_2 et cinq idéaux $\mathcal{B}_L$:
- $\mathcal{B}_{(1,0)} =< s_1+1 >$
- $\mathcal{B}_{\rangle(1,0),(1,1)\langle} =< s_1+1\,,\,(s_2+1)^2(2s_2+1)(2s_2+3)(4s_2+3)(4s_2+5) >$
- $\mathcal{B}_{(1,1)} =< (s_1+1)(s_1+2)\,,\,(s_1+1)(2s_2+1)\,,\,(s_2+1)^2(2s_2+1)(2s_2+3)(4s_2+3)(4s_2+5) >$
- $\mathcal{B}_{\rangle(1,1),(0,1)\langle} =< (s_1+1)(s_1+2)\,,\,(s_1+1)(2s_2+1)\,,\,(s_2+1)^2(2s_2+1)(4s_2+3)(4s_2+5) >$
- $\mathcal{B}_{(0,1)} =< (s_2+1)^2(2s_2+1)(2s_2+3)(4s_2+3)(4s_2+5) >$

Cela donne trois b_L différents :
- $b_{(1,0)}(s_1)=s_1+1$
- $b_{(1,1)}(u)=(u+2)^2(2u+3)(2u+5)(4u+7)(4u+9)$ et
  $b_{(1,1)}(s_1+s_2)=(s_1+s_2+2)^2(2s_1+2s_2+3)(2s_1+2s_2+5)(4s_1+4s_2+7)(4s_1+4s_2+9)$
- $b_{(0,1)}(s_2)=(s_2+1)^2(2s_2+1)(2s_2+3)(4s_2+3)(4s_2+5)$

Bien que $(1,1)$ soit une "pente", on voit que le polynôme $b_{(1,1)}(s_1+s_2)$ est complètement inutile pour fabriquer un élément de $\mathcal{B}$, de $\mathcal{B}_1$ ou de $\mathcal{B}_2$. On voit que $b_{(1,0)}(s_1)$ et $b_{(0,1)}(s_2)$ suffisent. Bien entendu, il n'est pas impossible que $b_{(1,1)}(s_1+s_2)$ apparaisse comme nécessaire si on veut fabriquer un élément de $\mathcal{B}^v$ avec v "grand" (i.e. avec v_1 et v_2 qui seraient de grands entiers). En tout cas cela pose encore la question de savoir s'il y a des facteurs nécessaires ou non. Au vu de l'exemple qu'on vient de voir, il semble que non.

3.3. Exemple 3. Considérons l'application de $\mathbf{C}^2$ dans $\mathbf{C}^2$ donnée par :

$$(f_1, f_2) = (x_1^2 + x_2^2\,,\ x_1^3 + x_2^2).$$

Donnons d'abord les idéaux $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ (l'idéal $\mathcal{B}$ n'étant pas calculable avec les ressources dont je dispose) :

- $\mathcal{B}_1 = (s_1+1)(2s_1+2s_2+2)(2s_1+2s_2+3)(4s_1+6s_2+5)(4s_1+6s_2+7)$
- $\mathcal{B}_2 = (s_2+1)(2s_1+2s_2+2)(2s_1+2s_2+3)(4s_1+6s_2+5)(4s_1+6s_2+7)(4s_1+6s_2+9)$

Le calcul des $\mathcal{B}_L$ fait apparaitre trois "pentes", à savoir $(1,1)$, $(2,3)$ et $(1,2)$:

- $\mathcal{B}_{(1,0)} =< s_2(s_1+1), (s_1+1)^2 >$
- $\mathcal{B}_{\rangle(1,0),(1,1)\langle} =< s_2(s_1+1),$
  $(s_1+1)^2,$
  $2s_2^3+3s_2^2+s_1+s_2+1 >$
- $\mathcal{B}_{(1,1)} =< (s_1+1)(2s_1+3+2s_2)(s_1+1+s_2),$
  $(s_2+1)(2s_1+3+2s_2)(s_1+1+s_2) >$
- $\mathcal{B}_{\rangle(1,1),(2,3)\langle} =< (s_2+1)(6s_2+4s_1+5),$
  $(2s_1+3+2s_2)(s_1-s_2),$
  $(2s_2+1)(2s_2-1)(s_2+1) >$
- $\mathcal{B}_{(2,3)} =< (s_2+1)(6s_2+4s_1+5),$
  $(6s_2+4s_1+5)(8s_1^2-12s_1s_2+18s_2^2+15s_2+1) >$
- $\mathcal{B}_{\rangle(2,3),(1,2)\langle} =< (s_2+1)(6s_2+4s_1+5),$
  $(6s_2+5)(6s_2+13)(s_2+2)(s_2+1),$
  $(6s_2+4s_1+5)(8s_1^2-12s_1s_2+18s_2^2+15s_2+1) >$
- $\mathcal{B}_{(1,2)} =< (6s_2+7)(s_2+1)(6s_2+4s_1+5),$
  $(s_2+1)(-36s_2^3-180s_2^2-251s_2+20s_1-105),$
  $(s_2+1)(6s_2+4s_1+5)(4s_1-7-6s_2),$
  $64s_1^4+96s_1^3+1188s_2^3+28s_1^2+60s_1s_2+3636s_2^2+54s_1+3675s_2+1225 >$
- $\mathcal{B}_{\rangle(1,2),(0,1)\langle} =< s_1(s_2+1),$
  $(6s_2+5)(6s_2+7)(s_2+1),$
  $32s_1^4+48s_1^3+14s_1^2+36s_2^2-3s_1+72s_2+35 >$
- $\mathcal{B}_{(0,1)} =< s_1(s_2+1),$
  $(6s_2+5)(6s_2+7)(s_2+1) >$

Voici les polynômes b_L intéressants :

- $b_{(1,0)}(s_1) = (s_1+1)^2$
- $b_{(1,1)}(u) = (u+1)(u+2)(2u+3)$
  $b_{(1,1)}(s_1+s_2) = (s_1+s_2+1)(s_1+s_2+2)(2s_1+2s_2+3)$
- $b_{(2,3)}(u) = (u+4)(u+5)(2u+5)$
  $b_{(2,3)}(2s_1+3s_2) = (2s_1+3s_2+4)(2s_1+3s_2+5)(4s_1+6s_2+5)$
- $b_{(1,2)}(u) = (u+3)(2u+5)(3u+5)(3u+7)(4u+7)(4u+9)$
  $b_{(1,2)}(s_1+2s_2) = (s_1+2s_2+3)(2s_1+4s_2+5)(3s_1+6s_2+5)(4s_1+8s_2+7)(4s_1+8s_2+9)$
- $b_{(0,1)}(s_2) = (s_2+1)(6s_2+5)(6s_2+7)$

On peut faire deux remarques :
La première est qu'on voit apparaitre dans certains $\mathcal{B}_L$ (par exemple dans $\mathcal{B}_{(1,2)}$) des éléments non factorisables sur $\mathbf{Q}$ ce qui montre que les choses ne sont pas aussi

simples que prévues.
La deuxième est le fait (comme dans l'exemple 1) que certains b_L soient inutiles et que ceux qui nous permettent de construire un élément de $\mathcal{B}_1$ (par exemple) donnent un multiple strict du générateur de $\mathcal{B}_1$.

Bibliographie

[A-C-G 1] A. Assi, F.J. Castro-Jiménez, M. Granger, *The Gröbner fan of an $\mathbf{A}_n$-module*, Journal of Pure and Applied Algebra 150, 27-39, 2000.

[A-C-G 2] A. Assi, F.J. Castro-Jiménez, M. Granger, *The analytic standard fan of a $\mathcal{D}$-module*, Journal of Pure and Applied Algebra 164, 3-21, 2001.

[At] M.F. Atiyah *Resolution of singularities and division of distributions*, Comm. Pure Appl. Math. 23, 145-150, 1970.

[Ba] R. Bahloul, *Algorithm for computing Bernstein-Sato ideals associated with a polynomial mapping*, J. Symbolic Comput. 32, 643-662, 2001.

[Be] I. N. Bernstein, *The analytic continuation of generalised functions with respect to a parameter*, Funct. Anal. Appl. 6, 273-285, 1972.

[Be-G] I.N. Bernstein, I.M. Gelfand, *Meromorphy of the function P^λ*, Funkcional. Anal. i Priložen. 3 no. 1, 84-85, 1969.

[Bi] H. Biosca, *Polynômes de Bernstein génériques et relatifs associés à une application analytique*, Thèse, Nice-Sophia Antipolis, 1996.

[Bj] J.E. Björk, *Rings of Differential Operators*, volume 21 of North-Holland Math. Libr., Amsterdam, Noth-Holland, 1979.

[Br] J. Briançon, *Passage du local au global*, notes manuscrites.

[Br-Ge-M] J. Brianon, F. Geandier, Ph. Maisonobe, *Déformation d'une singularité isolée d'hypersurface et polynômes de Bernstein*, Bull. Soc. Math. France 120, no 1, 15-49, 1992.

[Br-G-M-M] J. Brianon, M. Granger, Ph. Maisonobe, M. Miniconi, *Algorithme de calcul du polynôme de Bernstein : cas non dégénéré*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 39, no. 3, 553-610, 1989.

[Br-Mai] J. Briançon, Ph. Maisonobe, *Remarques sur l'idéal de Bernstein associé à des polynômes*, prépublication Université Nice-Sophia Antipolis n° 650, Mai 2002.

[Br-Mai2] J. Briançon, Ph. Maisonobe, *Examen de passage du local au global pour les polynômes de Bernstein-Sato*, 1990.

[Br-May] J. Briançon, H. Maynadier, *Equations fonctionnelles généralisées : transversalité et principalité de l'idéal de Bernstein-Sato*, J. Math. Kyoto Univ. 39, no. 2, 215-232, 1999.

[C] F.J. Castro-Jiménez, *Thèse de troisième cycle*, Univ. de Paris VII, 1984.

[C-G] F.J. Castro-Jiménez, M. Granger, *Explicit calculations in rings of differential operators*, preprint Université d'Angers n° 40, 1997.

[C-N] F.J. Castro-Jiménez, L. Nárvaez-Macarro, *Homogenising differential operators*, preprint n° 36, Universidad de Sevilla, 1997.

[C-L-O] D. Cox, J. Little, D. O'Shea, *Ideals, Varieties and Algorithms*, 2ème édition, Springer-Verlag, New York, 1996.

[Ge] I.M. Gelfand, *Some aspects of functional analysis and algebra. Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Amsterdam, 1954, Vol. 1*, P. Erven, N.V. Noordhoff, Groningen, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1957.

[G] A. Gyoja, *Bernstein-Sato's polynomial for several analytic functions*, J. Math. Kyoto Univ. 33-2, 399-411, 1993.

[Ha] J. Harris, *Algebraic Geometry. A first course.*, Graduate Texts in Mathematics 133, Springer-Verlag, New York, 1992.

[Hi] H. Hironaka, *Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero. I, II*, Ann. of Math. (2) 79, 109-203, 205-326, 1964.

[K] M. Kashiwara, *B-functions and holonomic systems. Rationality of roots of B-functions*, Invent. Math. 38, no 1, 33-53, 1976/1977.

[Lej] M. Lejeune-Jalabert, *Effectivité des calculs polynomiaux*, Cours de DEA, Université de Grenoble I, 1985.

[Lej-P] M. Lejeune-Jalabert, A. Philippe, *Un algorithme de calcul de changements de coordonnées génériques*, prépublication de l'Institut Fourier no 92, Grenoble, 1987.

[Lej-P2] M. Lejeune-Jalabert, A. Philippe, *Un algorithme de calcul de changements de coordonnées génériques*, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I Math. 309, no 13, 803-806, 1989.

[L] A. Leykin, *Constructibility of the set of polynomials with a fixed Bernstein-Sato Polynomial : an algorithmic approach*, Journal of Symbolic Computation 32, 663-675, 2001.

[Mal] B. Malgrange, *Le polynôme de Bernstein d'une singularité isolée*, Lecture Notes in Math. 459, Springer Verlag, 98-119, 1975.

[May1] H. Maynadier, *Equations fontionnelles pour une intersection complète quasi-homogène à singularité isolée et un germe semi-quasi-homogène*, Thèse, Nice-sophia Antipolis, 1996.

[May2] H. Maynadier, *Polynômes de Bernstein-Sato associés à une intersection complète quasi-homogène à singularité isolée*, Bull. Soc. Math. France 125, no 4, 547-571, 1997.

[O] T. Oaku, *Algorithm for the b-function and D-modules associated with a polynomial*, J. Pure Algebra 117/118, 495-518, 1997.

[O2] T. Oaku, *An algorithm of computing b-functions*, Duke Math. Journal 87, Vol 1, 115-132, 1997.

[O-T] T. Oaku, N. Takayama, *An algorithm for de Rham cohomology groups of the complement of an affine variety via D-module computation*, Journal of Pure and Applied Algebra 139, 201-233, 1999.

[S1] C. Sabbah, *Proximité évanescente I. La structure polaire d'un $\mathcal{D}$-Module*, Compositio Math. 62, 283-328, 1987.

[S2] C. Sabbah, *Proximité évanescente II. Equations fonctionnelles pour plusieurs fonctions*, Compositio Math. 64, 213-241, 1987.

[T] N. Takayama, *Kan : A system for computation in algebraic analysis, 1991-*.
Voir www.math.kobe-u.ac.jp/KAN/