TD 1: Dérivées partielles,
premiers calculs d'optimisation

<u>Attention</u> : ce TD se rapporte à un cours où les hypothèses précises des théorèmes n'étaient pas énoncés. On admet donc que l'on peut dériver et écrire les conditions d'optimalité dans tous les exercices. Le but est de savoir faire rapidement les calculs, mais à la fin de l'année, il y aura des choses supplémentaires à vérifier.

1 Calculs de dérivées partielles

Exercice 1. Calculez les dérivées partielles des fonctions suivantes :

1. $$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = \cos(x)\sin(y),$$
2. $$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = \sqrt{1+x^2+y^2},$$
3. $$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ f(x,y,z) = \exp(x^2+y^2)\log(1+z^4),$$

Exercice 2. Soit f la fonction définie pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y) = y^3 + (x^2-6)y + x^2.$$

1. Calculez les dérivées partielles de f.
2. En quel(s) point(s) le gradient de f s'annule-t-il ?
3. Sont-ce des extrema globaux ?

2 Calculs pratiques à l'aide des dérivées partielles

Exercice 3. La technologie de production d'une firme est décrite par la fonction de Cobb-Douglas

$$f(x,y,z) = 10x^{1/3}y^{1/2}z^{1/6}.$$

On suppose qu'elle utilise la combinaison de facteurs $(27, 16, 64)$.

1. Quelle est la quantité produite ?
2. À l'aide de ses dérivées partielles, donner une valeur approchée de f corespondant aux facteurs $(27.1, 15.7, 64)$. Comparez avec la vraie valeur. Même question en $(27.2, 16.2, 63.6)$.

Exercice 4. Donner une valeur approchée de

$$\sqrt{4.1^3 - 2.95^3 - 1.02^3}.$$

Exercice 5. Déterminer le domaine de définition et une équation du plan tangent à f au point $M(x_0, y_0)$ dans les deux cas suivants :

(i)
$$f(x,y) := \sin^2 x + \cos^2 y;$$

(ii)
$$f(x,y) = \ln\left(1 + \frac{x}{y}\right).$$

3 Questions d'optimisation

Exercice 6. Déterminer et donner la nature des points critiques des fonctions suivantes (si la matrice hessienne ne permet pas de caracatériser la nature du point critique, on dira qu'il est indéterminé).

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2,$$
$$f(x,y) = 3x^4 + 3x^2y - y^3.$$

Exercice 7. Dans chacun des cas suivant, trouver le minimum de f sous la contrainte indiquée.

1. $f(x,y,z) = (x-2)^2 + y^2 + z^2$ sous la contrainte $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$.
2. $f(x,y) = 3x - y$ sous la contrainte $x^2 + y^2 = 5$.
3. $f(x,y) = x^2 + y^2$ sous la contrainte $x + 2y = 6$.

Exercice 8 (Distance d'un point à une sphère)**.** Dans $\mathbb{R}^3$, quels sont les points de la sphère

$$S := \left\{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 4\right\}$$

les plus proches et les plus éloignés du point A de coordonnées $(3, 1, -1)$?

On rappelle que la distance entre deux points (x,y,z) et (x', y', z') de $\mathbb{R}^3$ est

$$\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}.$$

(Indice : on préfèrera manipuler son carré.)

Exercice 9 (Questions de géométrie)**.**

1. Parmis les rectangles pour lesquels l'aire est égale à A, déterminer ceux dont le périmètre est maximal.
2. Quelle est la surface minimale d'un parallélépipède rectangle contenant un volume de $12m^3$?

Exercice 10. Trouver les extrema de la fonction $f : (x,y) \mapsto x^2 + 2y^2$ sous contrainte d'inégalité $x^2 + y^2 \leq 1$.