

## TD 2: Analyse réelle

**Exercice 1.** Soit  $(u_n)$  une suite réelle qui converge vers un réel  $l$ .

1. Montrer que si  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  est strictement croissante, alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\varphi(n) \geq n$ .
2. Montrer que si  $(v_n)$  est une suite extraite de  $(u_n)$ , alors  $(v_n)$  converge vers  $l$ .

**Exercice 2.** Soit  $(u_n)$  une suite réelle bornée. On suppose que  $(u_n)$  n'admet qu'une seule valeur d'adhérence. Montrer que  $(u_n)$  converge vers cette valeur d'adhérence.

**Exercice 3.** Pour chacun des exemples suivants, calculer  $\sup_I f$  et  $\inf_I f$ . De plus, indiquer si ces bornes sont atteintes, et en quel(s) point(s).

1.  $f(x) = x(1-x)$  sur  $I = [0, 1]$ .
2.  $f(x) = 1 - e^{-x}$  sur  $I = \mathbb{R}_+$ .
3.  $f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 12x + 1$  sur  $I = \mathbb{R}$ .
4.  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - x + 1}}$  sur  $I = [0, 1]$ .

**Exercice 4.** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue telle que

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty.$$

Montrer qu'elle admet un minimum global.

**Exercice 5.** Soit  $f : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue ayant une limite finie en  $+\infty$ .

1. Montrer que  $f$  est bornée.
2. Montrer que  $f$  admet un maximum global ou un minimum global.
3. Donner un exemple de fonction satisfaisant les conditions de l'énoncé ayant un maximum global mais pas de minimum.

**Exercice 6.** Soit  $f$  une fonction continue et dérivable de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  admettant la même limite dans l'ensemble  $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$  en  $-\infty$  et  $+\infty$ . Montrer qu'il existe  $c \in \mathbb{R}$  tel que  $f'(c) = 0$ .

**Exercice 7.** Soient  $a$  et  $b$  deux réels avec  $a < b$ , et soit  $f$  une fonction de  $[a, b]$  dans  $\mathbb{R}$ .

1. On suppose que  $f$  est dérivable en  $a$ . Donner une condition suffisante sur  $f'(a)$  pour que  $a$  soit un point de minimum local de  $f$ .
2. Même question en  $b$ .

**Exercice 8.** Déterminer le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 des fonctions suivantes.

1.  $x \mapsto \ln(1+x) + \exp(x)$ .
2.  $x \mapsto \exp(x) \ln(1+x)$ .
3.  $x \mapsto x/\ln(1+x)$ .
4.  $x \mapsto \exp(\cos(x))$ .
5.  $x \mapsto \arcsin(x)$ .

**Exercice 9.** Soit  $f$  une fonction d'un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , et soit  $x \in I$ . On suppose que  $f$  est de classe  $\mathcal{D}^1$  et que  $f'$  est dérivable en  $x$ .

1. Donner l'équation de la tangente au graphe de  $f$  en  $x$ .
2. Donner une condition suffisante sur  $f''(x)$  pour que le graphe de  $f$  soit au dessus de sa tangente en  $x$ .

**Exercice 10.** Étudier la position du graphe de l'application  $x \mapsto \ln(1+x+x^2)$  par rapport à sa tangente en  $x = 0$  et 1.