TD 3: Structure euclidienne de $\mathbb{R}^d$, Géométrie

1 Espaces euclidiens

Exercice 1 (Projection orthogonale)**.** On munit $\mathbb{R}^d$ de sa structure euclidienne canonique.

1. Soit E un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^d$. On note p la projection orthogonale sur E et q la projection orthogonale sur $E^\perp$. Montrer que
$$p + q = \mathrm{id}\,.$$
2. Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la projection orthogonale sur le plan défini par l'équation :
$$\mathcal{P} : \qquad x + y + z = 0.$$
On pourra commencer par déterminer l'orthogonal de $\mathcal{P}$, donner la matrice de la projection orthogonale sur cet orthogonal et utiliser la question 1.

Exercice 2. Plus généralement, soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ un vecteur non nul. Donner la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur la droite engendrée par (a, b, c) et sur son plan orthogonal.

Exercice 3. Donner une base orthonormée dont les deux premiers vecteurs appartiennent au plan
$$\mathcal{P} : \qquad x + y + z = 0.$$

Exercice 4. Soient E et F deux sous-espace vectoriels de $\mathbb{R}^d$.

1. Exprimer $(E + F)^\perp$ en fonction de $E^\perp$ et $F^\perp$.
2. Exprimer $(E \cap F)^\perp$ en fonction de $E^\perp$ et $F^\perp$ (on pourra montrer l'une des deux inclusions puis raisonner par dimension en utilisant la question 1).

Exercice 5. Soit E un sous-ensemble de $\mathbb{R}^d$. Montrer que $(E^\perp)^\perp = \mathrm{Vect}(E)$.

Exercice 6 (Isométrie)**.** On dit que l'application f de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^d$ est une isométrie si elle est linéaire et si pour tout $x \in \mathbb{R}^d$:
$$\|f(x)\| = \|x\|.$$

1. Montrer que si f est une isométrie alors pour tout x et y dans $\mathbb{R}^d$:
$$\langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle.$$
2. (Question dure). Montrer que réciproquement, si f est une application de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^d$ (que l'on ne suppose pas linéaire) qui vérifie pour tous x et y dans $\mathbb{R}^d$
$$\langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle,$$
alors f est une isométrie.

Exercice 7 (Produit scalaire de matrices)**.** Pour toutes matrices M et N dans $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$, on définit
$$(M|N) := \mathrm{tr}({}^tM \times N).$$

1. Montrer que cette formule définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$.
2. On note $\mathcal{N}$ la norme euclidienne associée. Montrer que pour toutes matrices M et N dans $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$,
$$\mathcal{N}(M \times N) \leq \mathcal{N}(M) \times \mathcal{N}(N).$$

2 Géométrie plane

Exercice 8. Pour chacune des équations suivantes, dire si c'est une équation de cercle, et si oui, donner son centre et son rayon.

1. $x^2 + y^2 + x = 0$,
2. $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 20$,
3. $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 5 = 0$,
4. $x^2 + y^2 + 4x + 14 = 0$.

Exercice 9. Soient $A := (3, 3)$ et $B := (5, 3)$. Déterminer l'ensemble des points $P = (x, y)$ tels que

$$\langle \overrightarrow{AP}, \overrightarrow{BP} \rangle = 8.$$

Exercice 10. Déterminer l'équation du cercle de centre $(1, -1)$ et dont la droite d'équation $5x + 9 = 12y$ est une tangente.

Exercice 11. On définit $\mathcal{C}$ de la façon suivante :

$$\mathcal{C} := \left\{ \begin{pmatrix} \sin(2t) \\ \sin(3t) \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Trouver l'équation de la tangente à $\mathcal{C}$ en $(0, 1)$ (correspondant au paramètre $t = 3\pi/2$).

Exercice 12. Soient a et b deux nombres réels strictement positifs. Considérons la courbe $\mathcal{E}$ du plan d'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

(C'est une ellipse de centre 0 et dont les axes sont les axes du repère.) On suppose $a > b$.

1. Quels sont les points de $\mathcal{E}$ les plus éloignés de O ? Les plus proches ?
2. Soit (x, y) un point de l'ellipse satisfaisant $x > 0$ et $y > 0$. Calculer l'équation de la tangente à l'ellipse en (x, y), puis les coordonnées des intersections de cette tangente avec les axes des coordonnées. On note P l'intersection avec l'axe des x et Q celle avec l'axe des y.
3. Calculer le minimum de la distance PQ et les coordonnées du point M pour laquelle cette distance est réalisée.

3 Géométrie dans l'espace

Exercice 13. Trouver l'équation du plan passant par $A = (2, 3, 5)$, $B = (1, 0, 5)$ et $C = (6, -2, 5)$.

Exercice 14. Trouver une équation du plan tangent à la sphère de centre O et de rayon 3 au point $(1, 2, 2)$.

Exercice 15. Dans $\mathbb{R}^3$, déterminer l'image du plan d'équation

$$x + y = 0$$

par

1. la symétrie orthogonale par rapport au plan d'équation

$$x - y + z = 0,$$

2. la symétrie orthogonale par rapport au vecteur $(1, 1, 1)$,
3. la rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$ autour du vecteur $(1, 1, 1)$.