TD 4: Topologie

Exercice 1. Pour chacun des sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^2$, indiquer s'il est ouvert, fermé, les deux ou aucun, puis donner son intérieur et son adhérence.

1. $\{(x,y) \mid -1 < x < 1,\ y = 0\}$,
2. $\{(x,y) \mid x$ et y sont des entiers naturels$\}$,
3. $\{(x,y) \mid x$ et y sont des rationnels$\}$,
4. $\{(x,y) \mid x + y = 1\}$,
5. $\{(x,y) \mid x + y < 1\}$,
6. $\{(x,y) \mid x = 0$ ou $y = 0\}$.
7. $\{(x,y) \mid x^2y^2 > 1\}$.
8. $\{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 1,\ y > 0\}$.

Exercice 2. Soit A un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et B un ouvert de $\mathbb{R}$. Montrer que $A \times B$ est un ouvert de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 3 (Bord d'un ensemble)**.** Soit $E \subset \mathbb{R}^d$. On définit son bord par

$$\partial E := \overline{E} \backslash \mathring{E}.$$

1. Montrer que E est fermé si et seulement si $\partial E \subset E$.
2. Montrer que E est ouvert si et seulement si $\partial E \cap E = \emptyset$.

Exercice 4 (Distance à un ensemble)**.** Soit E un sous-ensemble de $\mathbb{R}^d$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, on définit la distance de x à E de la façon suivante :

$$d(x,E) := \inf_{y \in E} \|y - x\|.$$

1. Montrer que si E est compact et non vide, alors pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, il existe $y \in E$ tel que :
$$d(x,E) = \|y - x\|.$$
2. En considérant $E \cap \overline{B}(x,R)$ avec R suffisamment grand, montrer que le même énoncé est encore vrai si E est seulement fermé et non vide.
3. Montrer que si E n'est pas fermé, alors le résultat est faux : il existe un point $x \in \mathbb{R}^d$ tel que pour tout $y \in E$,
$$d(x,E) < \|y - x\|.$$

Exercice 5. Soient $x \in \mathbb{R}^d$ et $R > 0$. Montrer que l'adhérence de la boule ouverte de centre x et de rayon R est la boule fermée de centre x et de rayon R.

Exercice 6. Soit f la fonction de $\mathbb{R}_+^*$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ par :

$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

On note E son graphe, c'est à dire :

$$E := \{(x, f(x)),\ x \in \mathbb{R}_+^*\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Déterminer l'adhérence de E.

Exercice 7. Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}^d$. On définit :

$$A + B := \{z \in \mathbb{R}^d | \exists x \in A, \exists y \in B, z = x + y\}.$$

1. Démontrer que si A est ouvert, alors $A + B$ est ouvert.
2. Démontrer que les parties $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | xy = 1\}$ et $B := \{0\} \times \mathbb{R}$ sont fermées.
3. Démontrer que $A + B$ n'est pas fermée.

Exercice 8 (Sous-espaces vectoriels)**.**

1. Soit A une partie de $\mathbb{R}^d$. Montrer que $A^\perp$ est fermé.

Soit E un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^d$.

2. Montrer que E est fermé.
3. Montrer que si E est ouvert, alors $E = \mathbb{R}^d$.

Exercice 9 (Ensemble dense)**.** Soit E un sous-ensemble de $\mathbb{R}^d$. On dit que E est dense dans $\mathbb{R}^d$ si pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, il existe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E qui converge vers x.

1. Montrer que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
2. Montrer que si E est un sous ensemble fermé et dense de $\mathbb{R}^d$, alors $E = \mathbb{R}^d$.
3. Montrer que E est dense dans $\mathbb{R}^d$ si et seulement si pour tout ouvert U de $\mathbb{R}^d$, $U \cap E \neq \emptyset$.

Exercice 10. Soient U et V deux ouverts denses de $\mathbb{R}^d$. Montrer que $U \cap V$ est encore un ouvert dense de $\mathbb{R}^d$.

Exercice 11 (Topologie induite)**.** Soit $E \subset \mathbb{R}^d$. On dit qu'un sous-ensemble U de E est un ouvert de E si

$$\forall x \in E, \exists r > 0 \text{ tel que } \forall y \in B(x, r) \cap E, y \in U.$$

On dit qu'un sous ensemble F de E est un fermé de E si $E \backslash F$ est un ouvert de E.

1. Montrer que $U \subset E$ est un ouvert de E si et seulement si il existe un ouvert V de $\mathbb{R}^d$ tel que
$$U = V \cap E.$$
2. Montrer que F est un fermé de E si et seulement si il existe un fermé G de $\mathbb{R}^d$ tel que
$$F = G \cap E.$$
3. Montrer que F est un fermé de E si et seulement si pour toute suite d'éléments de E qui converge vers une limite $l \in E$, on a $l \in F$.
4. Montrer qu'une union d'ouverts de E est un ouvert de E, qu'une intersection finie d'ouverts de E est un ouvert de E, qu'une intersection de fermés de E est un fermé de E et qu'une union finie de fermés de E est un fermé de E.
5. Soit f une fonction de E dans $\mathbb{R}^n$. Montrer que f est continue si et seulement si l'image réciproque de tout ouvert de $\mathbb{R}^n$ par f est un ouvert de E.
6. Soit f une fonction de E dans $\mathbb{R}^n$. Montrer que f est continue si et seulement si l'image réciproque de tout fermé de $\mathbb{R}^n$ par f est un fermé de E.