TD 5: Algèbre linéaire

Exercice 1. Quels sont la valeur propre et le vecteur propre évidents de cette matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 7 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 9 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & 0 & 0 \end{pmatrix} ?$$

Que dire de celle-ci :

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 8 & 2 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} ?$$

Exercice 2. Calculer le polynôme caractéristique des matrices suivantes, et dire si elles sont diagonalisable dans $\mathbb{R}$. Si oui, calculer une base de vecteurs propres.

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 3 (Utiliser le déterminant pour calculer des inverses)**.** Soit A une matrice carré de taille d. On appelle comatrice de A, notée $\mathrm{Com}(A)$ la matrice carré de taille d construite que la façon suivante. Pour tous i et j dans $\{1, \dots, d\}$, le coefficient (i, j) de $\mathrm{Com}(A)$ est le déterminant de la matrice A à laquelle on a retiré la i-ième ligne et la j-ième colonne, le tout multiplié par $(-1)^{i+j}$. On se propose de montrer la formule suivante :

$$^t\,\mathrm{Com}(A) \times A = \det(A) I_d.$$

1. En utilisant la formule du développement du déterminant par rapport à une colonne, montrer que les coefficients diagonaux de $^t\,\mathrm{Com}(A) \times A$ sont tous égaux à $\det(A)$.
2. Soit maintenant i différent de j dans $\{1, \dots, d\}$. On note B la matrice obtenue en remplaçant la i-ème colonne de A par sa j-ième et en conservant les autres colonnes.
   (i) Montrer que
   $$\left(^t\,\mathrm{Com}(A) \times A\right)_{i,j} = \left(^t\,\mathrm{Com}(B) \times B\right)_{i,i}.$$
   (ii) En montrant que $\det(B) = 0$ et en utilisant la question 1, conclure que
   $$\left(^t\,\mathrm{Com}(A) \times A\right)_{i,j} = 0.$$
3. Conclure.
4. Montrer que l'on a également
   $$A \times {}^t\,\mathrm{Com}(A) = \det(A) I_d.$$
5. En déduire une formule pour A^{-1} lorsque A est inversible.
6. En déduire une formule générale pour l'inversion de
   $$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$
   lorsque $ad - bc \neq 0$.

7. Inverser la matrice
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4. Soit M une matrice symétrique réelle de taille 2.

Montrer que M est définie positive si et seulement si $\det M > 0$ et $\operatorname{tr} M > 0$. Donner également un critère pour déduire que M est définie négative et pour déduire que M n'est ni positive ni négative.

En déduire le signe des matrices suivantes
$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} -7 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5 (Matrices orthogonales en dimension 2)**.** Soit
$$P := \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$
une matrice orthogonale.

1. Montrer qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $a = \cos\theta$ et $b = \sin\theta$.
2. En déduire qu'alors
$$P = R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad \text{ou bien} \quad P = S_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}.$$
3. Se convaincre que la première est la matrice de la rotation d'angle θ.
4. Montrer que S_θ est la symétrie orthogonale d'axe la droite engendrée par $(\cos(\theta/2), \sin(\theta/2))$.
5. Diagonaliser S_θ.

Exercice 6. Soit f un endormorphisme symétrique de $\mathbb{R}^d$ et $E \subset \mathbb{R}^d$ un sous-espace vectoriel stable de f (i.e. pour tout $x \in E$, $f(x) \in E$). Montrer que $E^\perp$ est également un sous-espace stable de f.

Soit $(u_1, \ldots, u_p)$ une base de E et $(u_{p+1}, \ldots, u_d)$ une base de $E^\perp$. Quelle est la forme de la matrice de f dans la base $(u_1, \ldots, u_d)$?

Exercice 7 (Décomposition polaire)**.** Soit M une matrice carré inversible de taille d.

1. Montrer que ${}^tMM$ est définie positive.
2. En déduire qu'il existe S définie positive telle que
$${}^tMM = S^2.$$
On pourra se servir du théorème spectral.
3. Montrer que MS^{-1} est orthogonale.
4. En déduire que toute matrice inversible est le produit d'une matrice orthogonale par une matrice symétrique définie positive :
$$M = PS.$$
En fait, cette décomposition se généralise par densité à l'ensemble des matrices carrés de taille d en remplaçant définie positive par positive. Bien réfléchir à ce que ça veut dire ! Cela veut par exemple dire que pour n'importe quel endomorphisme de $\mathbb{R}^d$, il existe $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ deux bases orthonormées telles que la matrice de f en prenant $\mathcal{E}$ comme base de départ et $\mathcal{F}$ comme base d'arrivée soit diagonale avec des coefficients diagonaux positifs. Dans ces bases, f a pour unique action de multiplier les coordonnées par des coefficients positifs !
5. Dans le cas où M est inversible, montrer que le P et le S impliqués dans la décomposition sont uniques.

Exercice 8. Soit $d \geq 1$ et H_d la matrice carré de taille d dont le coefficient i, j est
$$\frac{1}{i+j-1}.$$
En utilisant le fait que
$$\frac{1}{i+j-1} = \int_0^1 t^{i+j-2} \, \mathrm{d}\, t,$$
montrer que H_d est définie positive.