TD 6: Différentielle des fonctions de plusieurs variables

1 Exercices d'application

Exercice 1. À une période donnée du temps, la productivité marginale du travail est de 2.5 et celle du capital de 3. Sachant que le stock de capital augmente de 2 unités par unité de temps et que le taux de variation du facteur travail est de +0.5, peut-on en déduire la taux de variation de la production ?

Exercice 2. Soit f la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ qui à $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ associe

$$f(x, y) := 3xy^2 + 2x.$$

Soit γ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ qui à $t \in \mathbb{R}$ associe

$$\gamma(t) := (-3t^2, 4t^3 + t).$$

On pose $g := f \circ \gamma$.

1. Quels sont les ensembles de départ et d'arrivée de g ?
2. Utiliser la règle de dérivation des composées pour calculer la dérivée de g.
3. Retrouver ce résultat en calculant d'abord les valeurs de g en fonction de t, puis en dérivant.

Exercice 3. On considère les deux applications $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ et $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définies respectivement pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et pour tout $(u, v, w) \in \mathbb{R}^3$ par

$$f(x, y) = \Big(\sin(xy), y\cos(x), xy\sin(xy)\exp(y^2)\Big) \quad \text{et} \quad g(u, v, w) = uvw.$$

1. Quels sont les ensembles de départ et d'arrivée de $g \circ f$?
2. Calculer explicitement $g \circ f$.
3. Déterminer les matrices jacobiennes $J_f(x, y)$, $J_g(u, v, w)$ et $J_{g\circ f}(x, y)$.
4. La matrice $J_{g\circ f}(x, y)$ peut elle être obtenue comme un produit de matrices ?

2 Optimisation

Exercice 4. Soit $d \in \mathbb{N}^*$ et f une application de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$. On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand $|x|$ tend vers $+\infty$ et on écrit

$$\lim_{|x|\to+\infty} f(x) = +\infty$$

si pour tout $M > 0$, il existe $R > 0$ tel que pour tout $x \notin B(0, R)$,

$$f(x) \geq M.$$

Montrer que si f est continue et tend vers $+\infty$ quand $|x|$ tend vers $+\infty$, alors elle admet un minimum global.

Exercice 5. Soient $d \in \mathbb{N}^*$, I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, γ une application de I dans $\mathbb{R}^d$ et enfin F une application de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que γ et F sont différentiables partout et qu'il existe $t_0 \in I$ tel que

$$F(\gamma(t_0)) = \max_{t \in I} F(\gamma(t)).$$

Montrer qu'alors

$$\mathrm{d}F(\gamma(t_0)(\gamma'(t_0)) = \langle \nabla F(\gamma(t_0)), \gamma'(t_0) \rangle = 0.$$

Donner une interprétation de ce résultat, et une situation concrète où ce théorème s'applique.

Exercice 6. Déterminer et donner la nature des points critiques des fonctions suivantes (si la matrice hessienne ne permet pas de caracatériser la nature du point critique, on dira qu'il est indéterminé).

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2,$$
$$f(x,y) = 3x^4 + 3x^2y - y^3,$$
$$f(x,y,z) = xy + yz + zx - xyz \quad \text{(ne regarder que } x = y = z = 0\text{)}.$$

Exercice 7. Soit α un réel. On définit

$$M_\alpha := \begin{pmatrix} 1 & -\alpha & -\alpha \\ -\alpha & 1 & -\alpha \\ -\alpha & -\alpha & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Pourquoi M_α est elle diagonalisable ?
2. Trouver en fonction de α les valeurs propres de M_α.
3. On définit f_α la fonction de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ qui à (x, y, z) associe
$$\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2) - \alpha(xy + yz + zx).$$
Calculer le gradient et la hessienne de f en tout point de $\mathbb{R}^3$.
4. En déduire que quelque soit la valeur de α, $(0, 0, 0)$ est un point critique de f_α.
5. À l'aide de la question 2, donner en fonction de la valeur de α le type de point critique qu'est $(0, 0, 0)$. (On pourra faire un tableau de signe pour les valeurs propres de M_α en fonction de α. Si la hessienne ne permet pas de déterminer ce type, on dira que celui-ci est indéterminé.)

3 Exercices théoriques

Exercice 8. Dans le cas où $F = (f_1, \ldots, f_d) : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$ ne dépend que d'une variable, vérifier qu'elle est différentiable en $t \in I$ si et seulement si $f_1, \ldots, f_d$ sont dérivables en t et que pour tout $h \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{d}F(t)(h) = hF'(t) := h \begin{pmatrix} f_1'(t) \\ \vdots \\ f_d'(t) \end{pmatrix}.$$

En d'autres termes,

$$J_F(t) = F'(t).$$

Exercice 9. 1. Soit $f : I \subset \mathbb{R} \to U \subset \mathbb{R}^d$ et $g : U \to \mathbb{R}^n$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Soit $t \in I$. On suppose que

- f est dérivable en t,
- g est différentiable en $f(t)$.

Donner une formule pour $(g \circ f)'(t)$ en fonction des objets représentant les variations de f et g en t à l'ordre 1.

2. Soit $f : U \subset \mathbb{R}^d \to V \subset \mathbb{R}^n$ et $g : V \to \mathbb{R}$ où U et V sont des ouverts de $\mathbb{R}^d$ et $\mathbb{R}^n$ respectivement. Soit $x \in U$. On suppose que

   - f est différentiable en x,
   - g est différentiable en $f(x)$.

   Donner une formule pour $\nabla(g \circ f)(x)$ en fonction des objets représentant les variations de f et g en x à l'ordre 1.

Exercice 10. Soient d, n et p dans $\mathbb{N}^*$. Une application B de $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{dn}$ et à valeurs dans R^p est dite bilinéaire si pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^d$ et tout $y_0 \in \mathbb{R}^n$, les applications

$$y \in \mathbb{R}^n \mapsto B(x_0, y) \qquad \text{et} \qquad x \in \mathbb{R}^d \mapsto B(x, y_0)$$

sont linéaires. Montrer que B est différentiable en tout point de $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^n$ que sa différentielle vérifie pour tout $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^n$ et tout $(u, v) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^n$:

$$\mathrm{d}B(x_0, y_0)(u, v) = B(x_0, v) + B(u, y_0).$$

Exercice 11. Soit $d \in \mathbb{N}^*$. Soit F une bijection d'un ouvert U de $\mathbb{R}^d$ dans un ouvert V de $\mathbb{R}^d$. On note G son inverse. Soit x_0 un point de U. On suppose que :

- F est différentiable en x_0,
- $\mathrm{d}F(x_0)$ est inversible,
- G différentiable en $y_0 := F(x_0)$.

Montrer que

$$\mathrm{d}G(y_0) = \big(\mathrm{d}F(x_0)\big)^{-1}.$$

4 Questions de régularité

Exercice 12. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on définit

$$F(x, y) = \begin{cases} \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x} & \text{si } x \neq y, \\ f'(x) & \text{si } x = y. \end{cases}$$

Montrer que F est de classe C^1.

Exercice 13. Soit f la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que f est de classe C^1 et admet en 0 des dérivées partielles d'ordre 2 selon les coordonnées x, y et y, x, mais que ces dérivées ne coïncident pas.

5 Équations aux dérivées partielles

Exercice 14. Déterminer l'ensemble des fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ telles que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

(i)
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0;$$

(ii)
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = h(x),$$

où h est une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$;

(iii)
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = h(y),$$

où h est une fonction de classe C^1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 15. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une application de classe C^1 et $\alpha \in \mathbb{R}$. On dit que f est homogène de degré α si pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et tout $t > 0$,

$$f(tx, ty) = t^\alpha f(x,y).$$

1. Montrer que si f est positivement homogène de degré α, alors ses dérivées partielles sont homogènes de classe $\alpha - 1$.
2. Montrer que si f est homogène de degré α, alors pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,
$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \alpha f(x,y).$$
3. On suppose que f est de classe C^1 et est solution de l'équation aux dérivées partielles ci-dessus. En considérant pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ l'application qui à $t > 0$ associe $f(tx,ty)$, montrer que f est homogène de degré α.