TD 7: Théorème des fonctions implicites

Exercice 1. Dans chacuns des cas suivant, montrer que G permet de définir une fonction implicite autour du point indiqué, donner une équation de la tangente à l'ensemble des solutions de l'équation $G(x,y) = 0$ en ce point, et donner la position de cet ensemble par rapport à sa tangente.

1. $G(x,y) := x^2 \exp(y) - 4$, autour de $(2,0)$.
2. $G(x,y) := x(x+1)^2 - y^2$ autour de $(0,0)$.
3. $G(x,y) := x^3 + y^3 - 1$ autour de $(0,1)$.

Exercice 2. Une firme utilise x heures de travail non qualifié et y heures de travail qualifié pour produire quotidiennement $Q(x,y) = 60x^{2/3}y^{1/3}$ unité de marchandises. Sachant qu'elle utilise 64h de travail non qualifé et 27h de travail qualifié :

1. Quel est le niveau de sa production ?
2. Comment devrait-elle modifier (x,y) pour augmenter le plus rapidement possible son niveau de production ?
3. Cette firme prévoit d'accroître sa quantité d'heures de travail qualifié d'une quantité a d'heures. Comment doit varier (au premier ordre) la quantité de travail non-qualifié pour maintenir la production constante ?

Exercice 3 (Contre-exemple au théorème)**.** On se propose de donner plusieurs contre-exemples au théorème des fonctions implicites lorsque le gradient s'annule. Dans la suite, G est donc une application de $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ est on s'intéresse à l'ensemble des solutions de l'équation $G(z) = 0$. Dans chacuns des exemples suivants, donner la forme autour de $(0,0)$ de cet ensemble, et dire pourquoi la conclusion du théorème n'est pas vérifiée.

1. $G(x,y) := x^2 - y^2$.
2. $G(x,y) := x^2 + y^2$.
3. $G(x,y) := x^2 - y^3$.

Exercice 4. On considère le système d'équations :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2z^2 = 0, \\ x^2 + 2y^2 + z^2 = 4. \end{cases}$$

Montrer que, pour x proche de 0, il existe des fonctions strictement positives $y(x)$ et $z(x)$ telles que $(x, y(x), z(x))$ soit solution du système. On déterminera $y'(x)$ en fonction de x et y, ainsi que $z'(x)$ en fonction de x et z.

Exercice 5. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y,z) = (x^2 - y^2 + z^2 - 1, xyz - 1)$. Soit $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ tel que $f(x_0, y_0, z_0) = (0,0)$. Montrer qu'il existe un intervalle ouvert I contenant x_0 et une fonction $\varphi : I \to \mathbb{R}^2$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\varphi(x_0) = (y_0, z_0)$ et $f(x, \varphi(x)) = (0,0)$ pour tout $x \in I$.

Exercice 6. Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble définit par

$$\mathcal{S} := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^3 + 4xy + z^2 - 3yz^2 - 3 = 0\}.$$

Montrer que $\mathcal{S}$ admet un plan tangent en $(1,1,1)$ et le déterminer. Trouver aussi un vecteur orthogonal à ce plan.