TD 8: Optimisation sous contraintes

Exercice 1 (Une contrainte)**.** Dans chacun des cas suivant, trouver le minimum de f sous la contrainte indiquée.

1. $f(x,y,z) = (x-2)^2 + y^2 + z^2$ sous la contrainte $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$.
2. $f(x,y) = 3x - y$ sous la contrainte $x^2 + y^2 = 5$.
3. $f(x,y) = x^2 + y^2$ sous la contrainte $x + 2y = 6$.
4. $f(x,y) = (xy)^a$ sous la contrainte $2x + 3y = 12$, où $a > 0$ est un entier.

Exercice 2 (Distance d'un point à une sphère)**.** Dans $\mathbb{R}^3$, quels sont les points de la sphère

$$S := \big\{(x,y,z) \,|\, x^2 + y^2 + z^2 = 4\big\}$$

les plus proches et les plus éloignés du point A de coordonnées $(3, 1, -1)$?

On rappelle que la distance entre deux points (x,y,z) et (x', y', z') de $\mathbb{R}^3$ est

$$\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}.$$

(Indice : on préfèrera manipuler son carré.)

Exercice 3 (Questions de géométrie)**.**

1. Parmis les rectangles pour lesquels l'aire est égale à A, déterminer ceux dont le périmètre est maximal.
2. Quelle est la surface minimale d'un parallélépipède rectangle contenant un volume de $12m^3$?

Exercice 4 (Plusieurs contraintes)**.**

1. Trouver le points de $\mathbb{R}^3$ appartenant aux deux plans d'équation $3x + y + z = 5$ et $x + y + z = 1$ se trouvant le plus près de l'origine.
2. Maximiser la fonction
$$f : (x,y,z) \mapsto yz$$
sous les contraintes $y^2 + z^2 = 1$ et $xz = 3$.

Exercice 5. Le but de cet exercice est de trouver les extrema globaux de la fonction $F : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^2 + 2y^2$ sous les contraintes

$$\begin{cases} g_1(x,y) := x^2 + y^2 \leq 1, \\ g_2(x,y) := 2y - x \leq 1, \\ g_3(x,y) := 2y + x \leq 1. \end{cases}$$

1. Faire un dessin représentant l'ensemble $\mathcal{C}$ des points de $\mathbb{R}^2$ satisfaisant les trois contraintes.
2. Montrer que F admet sur $\mathcal{C}$ un maximum global et un minimum global.
3. **Conditions de qualification.** L'objectif de cette question est de montrer que pour tout $(x,y) \in \mathcal{C}$, les contraintes sont régulières en (x,y). On se donne donc $(x,y) \in \mathcal{C}$.
   (a) Montrer que les trois contraintes ne peuvent pas être actives simultanément.
   (b) Calculer les gradients de g_1, g_2 et g_3 en (x,y).

(c) Vérifier que si une seule contrainte est active en (x, y), alors les contraintes sont régulières en (x, y).

(d) Quel est le seul point de $\mathcal{C}$ où les contraintes associées à g_1 et g_2 sont toutes les deux actives ? Montrer qu'alors si (x, y) est ce point, alors les contraintes sont qualifiées en (x, y).

(e) Même question pour g_2 et g_3.

(f) Même question pour g_3 et g_1.

(g) Conclure.

4. Soit (x, y) un extremum local de F sous contraintes. Montrer qu'il existe trois réels λ, μ et ν tels que

$$\begin{cases} 2x = 2\lambda x - \mu + \nu, \\ 4y = 2\lambda y + 2\mu + 2\nu, \\ \lambda(1 - x^2 - y^2) = 0, \\ \mu(1 - 2y + x) = 0, \\ \nu(1 - 2y - x) = 0. \end{cases}$$

Que peut-on dire de λ, μ et ν si (x, y) est un maximum local ? un minimum local ?

5. Pour résoudre ce système, on fait une disjonction de cas selon les facteurs qui s'annulent dans les trois dernières équations.

(a) Résoudre ce système dans $\mathcal{C}$ si aucune contrainte n'est active.

(b) Résoudre ce système dans $\mathcal{C}$ si la seule contrainte active est celle associée à g_1.

(c) Même question pour g_2.

(d) Même question pour g_3.

(e) Quels sont les points que l'on n'a pas encore testé ?

(f) En déduire qu'il y a sept points candidats pour être des extrema locaux de F sous contraintes. En calculant la valeur de F en ces points, trouver le minimum et le maximum de F sous contraintes.

Exercice 6. On étudie le jeu de deux contraintes sur $\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \geq 1, \\ \qquad\quad y \leq 1. \end{cases}$$

1. Faire un dessin représentant l'ensemble des points de $\mathbb{R}^2$ satisfaisant ces contraintes.
2. Montrer que le seul point où les contraintes sont toutes les deux actives ne satisfait pas les conditions de qualifications. Comment cela se voit-il sur le dessin ?

Exercice 7. Un agriculteur produit du blé en utilisant un tracteur (qu'il conduit lui même, équivalent à 1000 heures de travail), du travail salarié en quatité x et des engrais en quantité y. Le prix d'une heure de travail est 1 et le prix d'une unité d'engrais est 2.

La fonction de production est donnée pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ par

$$F(x, y) = \sqrt{(1000 + x)y}.$$

1. Supposons que l'agriculteur dispose d'une enveloppe d'une valeur $a > 0$. En observant la matrice

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

montrer que les contraintes $x \geq 0$, $y \geq 0$ et $x + 2y \geq a$ sont partout régulières.

2. Montrer que le problème consistant à maximiser F sous ces trois contraintes admet au moins une solution.
3. Montrer que quelque soit la valeur de a, si (x, y) est un point de maximum de F sous contrainte, alors $y > 0$. En déduire que la fonction F est dérivable en tout point de maximum et calculer son gradient.
4. En déduire que pout tout point de maximum global (x, y), il existe λ et μ des réels positifs tels que

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{y}{1000+x}} = -\lambda + \mu, \\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1000+x}{y}} = 2\mu, \\ \lambda x = 0, \\ \mu(a - (x+2y)) = 0. \end{cases}$$

5. Montrer qu'on a nécessairement $\mu > 0$. Montrer que le système se ramène alors à

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{y}{1000+x}} = -2\lambda + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1000+x}{y}}, \\ \lambda x = 0, \\ x + 2y = a. \end{cases}$$

6. Posons $a = 500$. Montrer que si x est non nul, alors la résolution du système mène à une contradiction. En déduire la position de l'unique point de maximum et la quantité de blé produite pour cette valeur de a.
7. Trouver la valeur minimale de a pour que l'agriculteur fasse appel à de la main d'oeuvre.