Master de Mathématiques et Applications

Spécialité : Mathématiques de la Modélisation
Majeure : Contrôle optimal et Calcul des Variations

Mémoire de Master 2

Méthodes variationnelles appliquées à la résolution et à l'étude des solutions d'équations de la mécanique des fluides

Auteur :
Aymeric Baradat

Encadrants :
Yann Brenier
Luigi Ambrosio

17 octobre 2016

Résumé

L'objet de ce mémoire est l'étude d'équations hydrodynamiques du point de vue de la mécanique lagrangienne. Plus précisément, on va voir que les solutions des équations étudiées ne sont autres que des chemins généralisés dans des espaces d'états admissibles (c'est à dire satisfaisant certaines contraintes) qui minimisent l'action, c'est à dire l'intégrale de l'énergie cinétique. Bien sûr, il faut définir ce qu'est un chemin, ce qu'est un état, ce qu'est un état admissible, ce qu'est l'énergie cinétique... Le premier chapitre concerne l'équation d'Euler des fluides incompressibles. Dans ce cadre, on étudie le modèle de Brenier exposé pour la première fois dans [4] généralisant les chemins dans l'ensemble des difféomorphismes préservant la mesure de Arnol'd ([**?**]). Après avoir décrit ce modèle, on en rappellera quelques propriétés et faits intéressants qui en justifie son étude. Le deuxième chapitre est une réécriture de [5] qui concerne un problème plus simple : l'étude de M phases de fluides mélangés et se déplaçant en n'intéragissant les unes sur les autres que par le fait que la densité totale ne doit pas excéder 1. Cependant, dans notre cas, on rajoute une difficulté : on suppose que les fluides sont le siège d'un bruit. On montre que les résultats d'existence de solutions et de multiplicateurs de Langrange associés sont conservés dans ce cadre.

Sommaire

Chapitre 1

Formulation variationnelle de l'équation d'Euler

1.1 L'équation d'Euler

1.1.1 Dérivation de l'équation

L'équation d'Euler est une équation décrivant l'évolution du champ de vitesses des fluides parfaits, c'est à dire les fluides pour lesquels on peut négliger la viscosité (l'action du fluide sur une paroi sera toujours normale à cette paroi), la conductivité thermique et la conductivité électrique. Nous allons ici considérer le cas des fluides incompressibles, c'est à dire ceux dont le champ de vitesses est à divergence nulle, et dont la densité est constante.
Tradditionellement, l'équation d'Euler est déduite des lois de la mécanique Newtonienne de la façon suivante :
On admet qu'il existe dans le fluide un champ de forces surfaciques infinitésimales correspondant à la force que subirait une paroi plongée dans le fluide par unité de surface (dépendant *a priori* de la direction de la paroi). On suppose de plus que cette force agit sur le fluide lui-même de la même façon qu'il agirait sur une paroi solide. Il paraît raisonnable de penser que la dépendance de cette force par rapport à la direction est la restristion à la sphère d'une application linéaire sur $\mathbb{R}^3$ de sorte que comme elle doit toujours être normale à la paroi, elle est en fait isotrope. Ce champ est donc un champ *scalaire* que l'on appelle la *pression*, notée p. Il est alors facile en isolant une "particule de fluide" de voir par des arguments euristiques que la force induite par la pression sur ladîte particule de fluide est $-\nabla p$. En appliquant le principe fondamental de la dynamique, en normalisant la densité et en remarquant que l'accélération a de la particule de fluide en x à l'instant t peut être écrite en fonction du champ de vitesses du fluide $v(t,x)$ par la formule :

$$a = \partial_t v(t,x) + (v \cdot \nabla) v(t,x),$$

on obtient l'équation d'Euler :

$$\partial_t v(t,x) + (v \cdot \nabla) v(t,x) = -\nabla p + F_{ext}(t,x).$$

En ajoutant la contrainte de non compressibilité $\mathrm{div}\, v \equiv 0$, on obtient l'équation d'Euler pour les fluides incompressibles.
Une caractéristique fondamentale de cette équation est qu'elle détermine le champ de pression. La pression ne se calcule pas à partir de principes physiques indépendamment du champ de vitesse, elle est la solution d'une équation elliptique faisant intervenir le champ de vitesse (il suffit pour le voir de passer à la divergence dans l'équation). Ainsi l'équation se lit "$\partial_t v(t,x)+(v\cdot\nabla)v(t,x)-F_{ext}$ est un gradient". Une fois connu le fait que cette quantité est un gradient, la pression est caractérisée de manière unique (ou du moins son gradient).
A partir de maintenant, on supposera toujours $F_{ext} = 0$, ce qui n'est en fait pas du tout restrictif dans la plupart des cas.

1.1.2 Caractérisation géométrique des solutions de l'équation d'Euler des fluides incompressibles

Nous allons montrer dans ce paragraphe que l'on peut comprendre les solutions de l'équation d'Euler comme les solutions d'un problème variationnel avec contrainte. Le champs de pression apparaîtra alors naturellement comme un multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte de divergence nulle.
Adoptons tout d'abord un point de vue plus géométrique du problème. Plutôt que d'étudier le fluide par son champ de vitesses, on va définir une *configuration* du fluide comme un difféomorphisme préservant le volume du domaine dans lequel il se meut. Cela signifie que l'on indexe les particules du fluide (par exemple par leur position à l'instant initial), puis qu'on appelle la configuration ϕ une situation du fluide dans laquelle la particule x s'est déplacée en $\phi(x)$. Ce point de vue s'appelle le point de vue lagrangien. Le mouvement d'un fluide est alors décrit par un chemin lisse dans l'ensemble des configurations, en général partant de l'identité.
Le passage du point de vu lagrangien au point de vue eulérien (associé aux champs de vitesse) est simple. A un chemin ϕ_t dans l'ensemble des configurations, un temps t et un point x du domaine, on associera le champ de vitesses défini par :

$$v(t,x) := \partial_t \phi(\phi^{-1}(x)).$$

Réciproquement, si un champ de vitesses $v(t,x)$ est donné, on lui associera le chemin dans l'ensemble des configurations solution des équations différentielles ordinaires :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \phi_0(x) & = & x\,, \\ \partial_t \phi_t(x) & = & v(t,\phi_t(x))\,. \end{array} \right.$$

On vérifie que ces deux associations sont réciproques l'une de l'autre.
Un fluide parfait incompressible est vu comme une collection de particule n'agissant les unes sur les autres que par la contrainte de non-compressibilité. Il semble

donc naturel par le principe de moindre action de supposer que les mouvements dans un tel fluide sont des solutions du problème associé au lagrangien :

$$L(\phi_t, \partial_t \phi) = \frac{1}{2} \int |\partial_t \phi_t(x)|^2 dx,$$

avec la contrainte :

$$\phi_t \text{ conserve le volume.}$$

Ce point du vue peut paraître finaliste puisqu'on a l'impression qu'une particle de fluide en un point donné agit de sorte que l'action de l'ensemble du fluide soit minimale. En fait, on verra plus tard qu'en un certain sens, il est équivalent de résoudre le problème de minimisation sur l'ensemble du fluide et de résoudre un problème individuel sur chacune des particules : l'énergie minimale est obtenue quand chacune des particules minimise son énergie. Insistons sur le fait que ce résultat n'est pas évident à cause de la contrainte de non compressibilité.
Soit ϕ_1 une configuration sur un domaine D à bord lisse de l'espace euclidien $\mathbb{R}^d$. On suppose qu'il existe une solution lisse $(\phi_t)_{t\in[0,1]}$ du problème lagrangien associé à ϕ_1, c'est à dire qui minimise :

$$\int_0^1 \int_\Omega |\partial_t \psi_t|^2 dxdt,$$

parmis les chemins (ψ_t) dans l'ensemble des configurations vérifiant $\psi_0 = Id$ et $\psi_1 = \phi_1$.
Soit maintenant un champ de vecteurs (ξ_t) lisse sur D, dépendant du temps et vérifiant :

$$\begin{gathered} \operatorname{div} \xi \equiv 0\,, \\ \xi(0,\cdot) = \xi(1,\cdot) = 0\,, \\ \xi \cdot \vec{n} = 0 \text{ sur le bord de } \Omega. \end{gathered}$$

Etant donné $\epsilon > 0$ on peut alors définir un nouveau chemin dans l'ensemble des configurations par :

$$\phi_t^{\xi,\epsilon}(x) := \exp_\epsilon(\xi_t)(\phi_t(x)),$$

où $\exp_\epsilon(\xi_t)$ est la résolvante du champ de vecteurs ξ_t à l'instant ϵ. Ce chemin est bien à valeur dans les configurations et joint bien l'identité à ϕ_1 grâce aux propriétés de ξ.
Il découle du fait que (ϕ_t) soit un minimiseur du problème que quelques soient ξ et ϵ :

$$\int_0^1 \int_\Omega |\partial_t \phi_t|^2 dxdt \leq \int_0^1 \int_\Omega |\partial_t \phi_t^{\xi,\epsilon}|^2 dxdt\,.$$

A l'ordre 1 en ϵ, il vient que :

$$\int_0^1 \int_\Omega \partial_t \phi_t(x) \cdot \frac{d}{dt} \xi_t(\phi_t(x)) dxdt = 0\,,$$

i.e. :

$$-\int_0^1 \int_\Omega \partial_{tt}\phi_t(x) \cdot \xi_t(\phi_t(x))dxdt = 0\,.$$

Par des choix judicieux de ξ, on voit alors que quelque soit l'instant t, le champ de vecteurs $\partial_{tt}\phi_t$ est orthogonal à tous les champs de vecteurs du type $\xi\circ\phi_t$ avec $\operatorname{div}\xi = 0$ et ξ tangent au bord du domaine. En d'autres termes, par formule du changement de variables et en utilisant le fait que ϕ_t conserve le volume, $(\partial_{tt}\phi_t)\circ\phi_t^{-1}$ est un gradient $\nabla p(t,x)$. En réécrivant ceci pour le champ de vitesses associé à (ϕ_t), on obtient l'équation d'Euler des fluides incompressibles.
De plus, on voit que quelque soit le champ de vecteurs $\xi_t(x)$ tangent au bord de D, on a :

$$-\int_0^1 \int_\Omega \nabla p(t,x) \cdot \xi_t(x)dxdt = \int_0^1 \int_\Omega p(t,x)\operatorname{div}\xi_t(x)dxdt$$

Donc p s'incarne en une forme linéaire dépendant du temps sur l'ensemble des divergences des champs de vecteurs dépendant du temps et tangent au bord, c'est à dire comme un élément du dual des fonctions lisses d'intégrale spatiale nulle sur D. p apparaît donc exactement comme le multiplicateur de Lagrange associé à la minimisation de l'action du flot avec contrainte de non-compressibilité.
Réciproquement, toute solution régulière aux équations d'Euler des fluides incompressibles minimise au moins localement l'action entre deux configurations. On verra ce résultat, et même un beaucoup plus fort au corollaire 1.3.2.2.
On a donc caractérisé les solutions régulières des équations d'Euler comme solutions d'un problème de géodésique dans l'espace des configurations. Malheureusement, Schnirelman a montré dans [10] qu'une telle géodésique n'existe pas en général, même pour des configurations initiales et finales très régulières.

1.2 Un nouveau modèle pour l'équation d'Euler

1.2.1 Le problème relaxé

Le résultat de non existence de Schnirelman nous pousse définir un modèle plus robuste pour l'équation d'Euler. Il s'avère en effet que ce résultat découle d'un problème de complétude dans $\mathrm{SDiff}(M)$. On va définir les solutions généralisées aux équations d'Euler comme des solutions d'un nouveau problème variationnel admettant *a priori* plus de solutions.
Etant donné D un domaine compact à bord régulier de $\mathbb{R}^d$, on généralise la notion de difféomorphisme préservant la mesure de Lebesgue λ^d par celle de mesure borélienne (de probabilité) sur l'espace produit $D\times D$ dont chacune des marginales est λ^d. Ces mesures s'appellent les *configurations* du fluide. A une "particule de fluide" situé en x à l'instant initial, on n'associe plus un point y auquel elle se trouvera à l'instant final, mais une mesure de probabilité sur D représentant sa dispersion au sein de D durant l'écoulement du fluide (ou la probabilité qu'elle a de se trouver en tel ou tel endroit selon l'interprétation que l'on veut en faire). Cette généralisation des graphes par des mesures est l'objet

de la théorie du transport optimal.
On généralise alors la notion de chemin sur SDiff(D) par celle de mesure borélienne sur l'ensemble $\Omega(D)$ des chemins tracés sur D, définis sur $[0,1]$ munis de la norme L^∞ : si on se donne une configuration γ, on dira que la mesure de probabilité η sur $\Omega(D)$ est un flot admissible de l'identité à γ (et on écrira $\eta \in \mathrm{Adm}(Id,\gamma)$) si :

$$\begin{array}{rcl} (e_0,e_1)\sharp\eta & = & \gamma, \\ \forall t\in[0,1],\ e_t\sharp\eta & = & \lambda^d, \end{array}$$

où e_t est la fonction "évaluation au temps t" qui à un chemin ω associe sa position au temps t : $\omega(t)$.
La première ligne signifie que η va bien de l'identité à γ, et la seconde généralise la condition de non compressibilité.
Il ne nous reste plus qu'à donner un sens à la notion de géodésique pour un flot généralisé. On définit l'action du flot pour $\eta \in \mathrm{Adm}(Id,\gamma)$ (et même plus généralement pour toute mesure de probabilité sur l'ensemble des chemins) par :

$$\mathcal{A}(\eta) := \int A(\omega)d\eta(\omega),$$

où l'action d'un chemin tracé sur D est définie par :

$$A(\omega) := \left\{ \begin{array}{ll} \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{2}|\dot\omega|^2dt & \mathrm{si}\,\omega\in W^{1,2}([0,1],\mathbb{R}) \\ +\infty & \text{sinon.} \end{array} \right.$$

On dira alors qu'un chemin $\eta \in \mathrm{Adm}(Id,\gamma)$ est une solution généralisée de l'équation d'Euler si elle minimise E. On s'est donc ramené à un problème de minimisation convexe.
Une fois ce modèle établi, il convient de s'assurer qu'il vérifie plusieurs propriétés qui le rendent crédible.

- Les solutions régulières sont-elles des solutions généralisées ?
- Les solutions régulières uniques dans la classe des solutions régulières sont-elles uniques dans la classe des solution généralisées ?
- Sait-on construire des solutions pour une classe plus vaste de configurations que dans le cas régulier ?

Nous verrons dans les prochains paragraphes que la réponse à ces trois questions est positive.

1.2.2 Correspondance entre outils classiques et flots généralisés

On va voir dans ce paragraphe plusieurs points qui montrent que les objets du paragraphe précédent sont bien des généralisations des objets classiques. On en profitera pour introduire des notations qui nous seront utiles par la suite.

Tout d'abord , si on a un chemin (ξ_t) dans l'ensemble des difféormorphismes préservant la mesure de Lebesgue d'un domaine D, comment construit-on un flot généralisé incompressible qui lui correspond ? On pousse en avant la mesure par l'application :

$$\begin{array}{rccl} \Phi : & D & \to & \Omega(D) \\ & x & \mapsto & (t \mapsto \xi_t(x)) \, . \end{array}$$

$\Phi \sharp \mu$ est bien une mesure borélienne sur $\Omega(D)$ et vérifie bien

$$\forall t, \quad e_t \sharp (\Phi \sharp \lambda^d) = \lambda^d$$

par simple formule du changement de variables. C'est donc bien un flot généralisé incompressible qu'on notera par la suite η_ξ.

La suite du paragraphe concerne les injections des fonctions dans les configurations. Soit f une application mesurable de D dans lui-même, préservant la mesure sur D (i.e. $f \sharp \mu = \mu$). Alors on peut lui associer la configuration :

$$(Id, f) \sharp \lambda^d,$$

c'est à dire le poussé en avant de λ^d par l'application de D dans $D \times D$ qui à x associe $(x, f(x))$. C'est évidemment bien une configuration, et par abus de langage, on continuera à l'appeler f.

1.2.3 Existence de solutions

On va montrer dans ce paragraphe que l'action a les bonnes propriétés pour qu'il existe toujours des solutions généralisées à l'équation d'Euler joignant l'identité à une configuration γ *sous réserve* qu'il existe un flot généralisé incompressible joignant l'identité à γ. En fait, on montre le théorème suivant :

Théorème 1.2.3.1. *L'action est semi-continue inférieurement et a des sous-niveaux compacts relativement à la convergence étroite.*

Preuve : *Semi-continuité inférieure*

C'est une conséquence du théorème de Porte-manteau. En effet,

$$O_M := \{ \int_0^1 |\dot{\omega}(t)|^2 dt > M \}$$

est un ouvert pour la topologie L^∞ sur Ω^d (son complémentaire est compact grâce au théorème d'Ascoli), donc si (η_n) converge étroitement vers η :

$$\eta(O_M) \leq \liminf \eta_n(O_M).$$

La formule :

$$\int_{\Omega(\mathbb{R}^d)} \int_0^1 |\dot{\omega}(t)|^2 dt \eta^{\epsilon_n}(d\omega) = \int_{\mathbb{R}_+} \eta^{\epsilon_n}(O_M) dM$$

ainsi que le lemme de Fatou permettent donc d'obtenir le résultat.

Remarque 1.2.3.1

Cette preuve est valable sans la compacité de D.

Sous-niveaux compacts
Il faut vérifier que :

$$K_M = \{\mathcal{A}(\eta) \leq M\}$$

est tendu. Mais si $\eta \in K_M$:

$$\eta(\{\int_0^1 |\dot{\omega}(t)|^2 dt > E\}) \leq \frac{1}{E}\mathcal{A}(\eta) \leq \frac{M}{E}.$$

Donc si on prend E assez grand,

$$\eta(\{\int_0^1 |\dot{\omega}(t)|^2 dt > E\})$$

est aussi petit que l'on veut, uniformément sur K_M. Mais comme :

$$\{\int_0^1 |\dot{\omega}(t)|^2 dt \leq E\}$$

est compact dans $\Omega(D)$, on a le résultat.

$\square$

1.3 Validité du modèle

Nous allons voir dans cette partie en quoi le nouveau modèle est intéressant. Nous proposerons dans un premier temps des constructions de flots généralisés que ne sont pas induit par un chemin dans l'ensemble des difféomorphismes préservant la mesure. Nous verrons ensuite que les solutions régulières de l'équation d'Euler sont des solutions généralisées dès lors qu'on fait une hypothèse de régularité sur la pression.

1.3.1 Deux exemples de construction de flots généralisés

On va présenter dans ce paragraphe deux flots généralisés ayant des propriétés intéressantes. Ces exemples sont tirés de [4] et [11].

Exemple 1.3.1.1.
Intéressons nous d'abord à une famille de flots incompressibles sur le cube $K^d := [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^d$ de $\mathbb{R}^d$ permettant de joindre l'identité à n'importe quelle configuration associée à une application mesurable préservant la mesure avec une action finie, indépendante de la configuration. Ces flots consistent ni plus ni moins à disperser toutes les particules de façon homogène sur le cube, puis à les envoyer sur la position qui leur est prescrite par la configuration finale.
Pour cela, on utilise le lemme suivant :

Lemme 1.3.1.1. *Soit l'application :*

$$\begin{array}{rccl} \Phi : & K^d \times K^d & \to & C([0,\frac{1}{2}], K^d) \\ & (x,v) & \mapsto & (t \mapsto \Phi_t(x,v))\,, \end{array}$$

où $\Phi(x,v)$ est le chemin que suivrait un rayon lumineux partant de x avec la vitesse $4v$ si les bords du cube étaient des miroirs. On appelle ces chemins des trajectoires de billard. Alors Φ vérifie les propriétés suivantes :

1. *$\Phi \sharp (\lambda^d \otimes \lambda^d)$ est un flot généralisé incompressible.*
2. *Pour tout x de K^d, presque tout point y de K^d a exactement 2^d antécédents par l'application $v \mapsto \Phi_{\frac{1}{2}}(x,v)$.*

Preuve : On ne va pas démontrer entièrement ce lemme. En fait on va admettre un résultat concernant le groupe G engendré par les symétries hyperplanes par rapport aux faces du cube K^d, et un résultat qui en découle à propos des liens entre Φ_t et G. Ces résultats sont relativement simples mais un peu fastidieux et peu éclairant.

1. Si on pave l'espace $\mathbb{R}^d$ par des cubes de côté 1 et de centre les points de $\mathbb{Z}^d$, alors pour chaque cube C de ce pavage, il existe un et un seul $g \in G$ envoyant K^d sur C. Si x est un point intérieur de C, g est l'unique élément de G tel que $gx \in K^d$.
2. On peut donc définir une application g_t qui est définie presque partout et mesurable à valeur dans l'espace discret G qui à $(x,v) \in \mathbb{R}^d \times K^d$ associe $g_t(x,v)$ l'unique élément de G tel que $\Psi_t(x,v) := x + 4tv$ soit dans $g_t(x,v)K^d$ (ou de manière équivalente tel que $g_t(x,v)\Psi_t(x,v) \in K^d$ puisque les éléments de G sont des involutions).
On peut alors voir que partout où g_t et Φ_t sont définies :
$$\Phi_t(x,v) = g_t(x,v)\Psi_t(x,v) = \Psi_t(g_t(x,v), dg_t(x,v)v), \tag{1.1}$$
où $dg_t(x,v)$ est la partie linéaire de l'application affine $g_t(x,v)$.

For de ces considérations, on peut montrer le résultat.
Il faut ici faire attention à ne pas confondre la mesure de Lebesgue sur l'espace $\mathbb{R}^d$ et sa restriction à K^d, on adoptera donc un style plus précis que d'habitude en distinguant λ^d et $\lambda^d_K := \lambda^d \llcorner K^d$. On a ici une sorte de principe de réflexion qui s'applique, à savoir que :

$$\Phi_t \sharp \left(\lambda^d_K \otimes \lambda^d_K\right) = \Psi_t \sharp \left(\lambda^d \otimes \lambda^d_K\right) \llcorner K^d. \tag{1.2}$$

En effet :

$$\Psi_t \sharp \left(\lambda^d \otimes \lambda^d_K\right) \llcorner K^d = \Psi_t \sharp \left[\mathbf{1}_{\Psi_t(x,v)\in K^d} \lambda^d \otimes \lambda^d_K\right].$$

Or, presque partout, on peut décomposer $\mathbf{1}_{\Psi_t(x,v)\in K^d}$ en :

$$\sum_{g\in G} \mathbf{1}_{x\in gK^d} \mathbf{1}_{\Psi_t(x,v)\in K^d}.$$

Mais sur $\{x \in gK^d$ et $\Psi_t(x,v) \in K^d\}$, on a presque partout :

$$g_t(gx, dgv) = g,$$

de sorte qu'avec (1.1) :

$$\Psi_t(x,v) = \Phi_t(gx, dgv).$$

Donc si on note $\tilde{g}$ l'application qui à (x,v) associe (gx, dgv), on a :

$$\begin{aligned}
\Psi_t \sharp \left(\lambda^d \otimes \lambda_K^d\right) \llcorner K^d &= \sum_{g\in G} \Psi_t \sharp \left[\mathbf{1}_{x\in gK^d} \mathbf{1}_{\Psi_t(x,v)\in K^d} \lambda^d \otimes \lambda_K^d\right] \\
&= \sum_{g\in G} \Phi_t \sharp \tilde{g} \sharp \left[\mathbf{1}_{x\in gK^d} \mathbf{1}_{\Psi_t(x,v)\in K^d} \lambda^d \otimes \lambda_K^d\right] \\
&= \sum_{g\in G} \Phi_t \sharp \left[\mathbf{1}_{y\in K^d} \mathbf{1}_{\Psi_t(gy,dgw)\in K^d} \tilde{g} \sharp \left(\lambda^d \otimes \lambda_K^d\right)\right] \\
&= \sum_{g\in G} \Phi_t \sharp \left[\mathbf{1}_{y\in K^d} \mathbf{1}_{\Psi_t(gy,dgw)\in K^d} \lambda^d \otimes \lambda_K^d\right] \\
&= \sum_{g\in G} \Phi_t \sharp \left[\mathbf{1}_{g\Psi_t(y,w)\in K^d} \lambda_K^d \otimes \lambda_K^d\right] \\
&= \Phi_t \sharp \left[\sum_{g\in G} \mathbf{1}_{\Psi_t(y,w)\in gK^d} \lambda_K^d \otimes \lambda_K^d\right] \\
&= \Phi_t \sharp \left(\lambda_K^d \otimes \lambda_K^d\right),
\end{aligned}$$

d'où (1.2).
Mais avec (1.2), le point 1 du lemme est une conséquence directe du théorème de Fubini, puisqu'il suffit de montrer que :

$$\Psi_t \sharp \left(\lambda^d \otimes \lambda_K^d\right) \llcorner K^d = \lambda_K^d.$$

On va en fait montrer que :

$$\Psi_t \sharp \left(\lambda^d \otimes \lambda_K^d\right) = \lambda^d.$$

Si φ est une fonction continue à support compact sur $\mathbb{R}^d$, alors :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d\times K^d} \varphi(\Psi_t(x,v))dxdv &= \int_{\mathbb{R}^d\times K^d} \varphi(x+4tv)dxdv \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{(4t)^d} \int_{x+4tK^d} \varphi(y)dydx \\
&= \frac{1}{(4t)^d} \int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_{y\in x+4tK^d} dxdy \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(y) \frac{1}{(4t)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_{x\in y+4tK^d} dxdy \\
&= \int \varphi(y)dy,
\end{aligned}$$

ce qui permet d'obtenir le point 1.
Pour le point 2, choisissons $x \in K^d$ et regardons l'image de K^d par $\Psi_{\frac{1}{2}}(x,\cdot)$. C'est un cube de centre x et de rayon 2. Si $y \in K^d$, le nombre d'antécédents de y par $\Phi_{\frac{1}{2}}(x,\cdot)$ est le cardinal de l'intersection de ce cube avec $\{gy,\ g\in G\}$, qui est évidemment 2^d dès lors que x et y n'ont pas de coordonnée commune. $\square$

La méthode pour construire notre flot incompressible est alors la suivante : Pour chaque x, y et z de K^d tels que x et y d'une part, et y et z d'autre part n'ont pas de coordonnée en commun, on construit la mesure $\eta_{x,y,z}$ sur $\Omega(D)$ qui charge les chemins partant de x, passant par y au temps $\frac{1}{2}$ et qui arrive au point z en empruntant sur les intervalles $[0, \frac{1}{2}]$ et $[\frac{1}{2}, 1]$ des trajectoires de billard. Il y a clairement 2^{2d} chemins de ce type, on les charge alors de la masse 2^{-2d}.
On définit alors :

$$\eta := \int \eta_{x,y,\xi(x)} dxdy$$

Cette intégrale est licite car pour tout x, $\eta_{x,y,\xi(x)}$ est bien définie pour presque tout y, et la famille $(\eta_{x,y,\xi(x)})$ est mesurable en x et y grâce à la régularité de Φ en x, v. C'est bien une mesure (de probabilité) borélienne sur $\Omega(D)$ qui joint l'identité à ξ. De plus, on remarque que :

$$t_{0,\frac{1}{2}} \sharp \eta = \Phi \sharp (\lambda^d \otimes \lambda^d)$$

et

$$t_{\frac{1}{2},1} \sharp \eta = \tilde{\Phi} \sharp (\lambda^d \otimes \lambda^d)$$

où $\tilde{\Phi}_{1-t}(x, v) = \Phi_t(x, v)$ et t_{t_1,t_2} est l'applicaton "restriction entre les instants t_1 et t_2" qui à un chemin $t \in [0, 1] \mapsto \omega(t)$ associe le chemin $t \in [t_1, t_2] \mapsto \omega(t)$. Donc ce flot est incompressible.
Calculons l'action de ce flot. Par les égalités juste au dessus :

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(\eta) &= 2\mathcal{A}(\Phi) \\
&= 2 \int dxdv \times \int_0^{\frac{1}{2}} 16|v|^2 dt \\
&= 16 \int |v|^2 dv \\
&= \frac{4d}{3}.
\end{aligned}$$

Remarque 1.3.1.1

Cet exemple est intéressant parce qu'il permet en n'importe quelle dimension de joindre à l'identité n'importe quelle application du cube dans lui-même préservant la mesure, et ce avec une action finie et indépendante de l'application d'arrivée. De plus, il serait assez facile de généraliser cet exemple pour joindre n'importe quelle configuration γ puisqu'il suffirait essentiellement de remplacer

$$\int \eta_{x,y,\xi(x)} dy$$

par :

$$\int \eta_{x,y,z} dy d\gamma_x(z).$$

où γ_x est la désintégration de γ par rapport à sa première variable en x. Il *est alors intéressant de poser la :*

Définition 1.3.1.1. La distance géodésique incompressible de l'identité à la configuration γ du fluide dans un domaine D est :

$$d(Id, \gamma) := \inf \mathcal{A}(\eta)^{\frac{1}{2}},$$

où l'inf est pris sur tous les flots incompressibles η joignant l'identité à γ.

L'exemple donné montre donc que toutes les configurations dans le cube de dimension d sont à distance géodésique incompressible inférieure à $2\sqrt{\frac{d}{3}}$ de l'identité.
Par ailleurs, associé au théorème 1.2.3.1, cet exemple montre qu'il existe une solution aux équations d'Euler liant l'identité à n'importe quelle configuration.

Exemple 1.3.1.2.
Le deuxième exemple est essentiel à bien des égards. Il s'incarne dans le tore $\mathbb{T}^d$ de dimension d et part de l'observation suivante. Dans un espace euclidien (où ici sur une varité riemannienne plate), les géodésiques sont des droites. On s'attend donc à ce que les trajectoires des particules prescrites par une solution généralisée de l'équation d'Euler (par exemple joignant l'identité à une application préservant la mesure ξ) soient "les plus proches possibles des droites joignant x à $\xi(x)$ en dépit de la contrainte de non compressibilité". Il est donc naturel pour avoir des estimations sur la distance géodésique incompressible de l'identité à ξ, de tenter de modifier le moins possible le flot induit par de telles droites de façon à le rendre incompressible. Avant de le faire, donnons les enjeux d'un telle entreprise. On a l'espoir en faisant ça (et d'ailleurs on va le faire) de montrer que si une suite d'applications mesurables préservant la mesure converge vers l'identité dans L^2 ($\|\xi - Id\|_{L^2}^2$ est essentiellement l'action du flot donné par les droites), alors sa distance géodésique incompressible à l'identité tendra vers 0, ce qui n'est pas du tout évident a priori ! On va même montrer que dans le cas du tore, il existe deux réel strictement positif α et C ne dépendant que de la dimension tels que pour toute application mesurable ξ préservant la mesure de Lebesgue sur le tore :

$$d(Id, \xi) \leq C||\xi - Id||_{L^2}^{\alpha}.$$

Ce résultat a été démontré à deux reprises par Shnirelman dans [10] puis dans [11]. On suivra ici la méthode de [11]. Commençons par démontrer le lemme suivant :

Lemme 1.3.1.2. *Si une mesure de probabilité ν sur le tore admet une densité ρ continue et ne s'annulant pas, on sait construire (facilement) une fonction f du tore dans lui même tel que $f \sharp \nu = \lambda^d$, et avoir une formule pour cette fonction.*

Preuve : On pose pour $(a_1, ..., a_d)$:

$$f_1(x_1) := a_1 + \int_{a_1}^{x_1} \int_{\mathbb{T}^{d-1}} \rho(y,z) dz dy,$$

$$f_2(x_1, x_2) := a_2 + \frac{1}{\int_{\mathbb{T}^{d-1}} \rho(x_1, z) dz} \int_{a_2}^{x_2} \int_{\mathbb{T}^{d-2}} \rho(x_1, y, z) dz dy,$$

$$\dots$$

$$f_i(x_1, \dots, x_i) := a_i + \frac{1}{\int_{\mathbb{T}^{d-i+1}} \rho(x_1, \dots, x_{i-1}, z) dz} \int_{a_i}^{x_i} \int_{\mathbb{T}^{d-i}} \rho(x_1, \dots, x_{i-1}, y, z) dz dy,$$

$$\dots$$

$$f_d(x_1, \dots, x_d) := a_d + \frac{1}{\int_{\mathbb{T}^1} \rho(x_1, \dots, x_{d-1}, z) dz} \int_{a_d}^{x_d} \rho(x_1, \dots, x_{d-1}, z) dz.$$

Puis on pose :

$$f(x_1, \dots, x_d) := (f_1(x_1), \dots, f_d(x_1, \dots, x_d)).$$

On voit alors que f un difféormorphisme du tore, et que son déterminant jacobien vaut :

$$Jf(x_1, \dots, x_d) = \rho(x_1, \dots, x_d)).$$

Du coup, par la formule du changement de variables, $f \sharp \nu = \lambda^d$. □

Maintenant, choisissons ξ une application mesurable préservant la mesure de Lebesgue sur le tore, et notons $\delta := ||\xi - Id||_{L^2}$. On va construire un flot généralisé χ (compressible) joignant l'identité à ξ proche de celui induit par les trajectoires en ligne droite mais tel qu'à chaque instant, $e_t \sharp \chi$ admette une densité continue qui ne s'annule pas. Soit $\epsilon > 0$ et :

$$\begin{array}{rccl} \Phi : & \mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d & \to & \Omega(\mathbb{T}^d) \\ & (x,v) & \mapsto & t \mapsto \left\{ \begin{array}{ll} x + 4vt & \text{if } t \in [0, \frac{1}{4}] \\ x + 4v + 2(t - \frac{1}{4})(\xi(x) - x) & \text{if } t \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}] \\ \xi(x) + 4(1-t)v & \text{if } t \in [\frac{3}{4}, 1] \end{array} \right. \end{array}.$$

Soit φ une fonction lisse radiale, positive, à support compact dans la boule de centre 0 et de rayon 1 de $\mathbb{R}$, d'intégrale 1, inférieure à 1 et supérieure à $\frac{1}{2}$ sur la boule de centre 0 et de rayon $\frac{1}{2}$. On définit :

$$\chi := \Phi \sharp \left(\lambda^d \otimes \frac{1}{\epsilon^d} \varphi \left(\frac{\cdot}{\epsilon} \right) \lambda^d \right).$$

Suivant le flot χ, une particule commence par se répartir sur une boule de rayon ϵ autour de x, puis se déplace en ligne droite jusqu'à se situer sur une boule de rayon ϵ autour de $\xi(x)$ avant de se reformer en $\xi(x)$.
Le flot est incompressible sur les intervalles de temps $[0, \frac{1}{4}]$ et $[\frac{3}{4}, 1]$: par exemple,

si $t \in [0, \frac{1}{4}]$, si a est une fonction bornée sur le tore :

$$\begin{aligned}\int a(x) de_t \sharp \Phi \sharp \left(\lambda^d \otimes \frac{1}{\epsilon^d} \varphi \left(\frac{\cdot}{\epsilon} \right) \lambda^d \right)(x) &= \frac{1}{\epsilon^d} \int a(y + 4vt) \varphi \left(\frac{v}{\epsilon} \right) dy dv \\ &= \frac{1}{\epsilon^d} \int \left(\int a(z) dz \right) \varphi \left(\frac{v}{\epsilon} \right) dv \\ &= \int a(z) dz.\end{aligned}$$

De plus si $t \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$, $e_t \sharp \chi$ admet une densité continue. En effet, si a est une fonction bornée sur le tore :

$$\begin{aligned}&\int a(x) de_t \sharp \Phi \sharp \left(\lambda^d \otimes \frac{1}{\epsilon^d} \varphi \left(\frac{\cdot}{\epsilon} \right) \lambda^d \right)(x) \\ &\qquad = \frac{1}{\epsilon^d} \int a(x + v + 2(t - \frac{1}{4})(\xi(x) - x)) \varphi \left(\frac{v}{\epsilon} \right) dx dv \\ &\qquad = \frac{1}{\epsilon^d} \int a(y) \int \varphi \left(\frac{y - x - 2(t - \frac{1}{4})(\xi(x) - x)}{\epsilon} \right) dx dy,\end{aligned}$$

d'où le fait que $e_t \sharp \chi$ admette une densité que l'on notera $\rho(t, .)$. Elle vérifie :

$$\rho(t, y) = \frac{1}{\epsilon^d} \int \varphi \left(\frac{y - x - 2(t - \frac{1}{4})(\xi(x) - x)}{\epsilon} \right) dx.$$

En particulier, $\rho(t, .)$ est continue, et même beaucoup plus.
Montrons que si ϵ est assez grand par rapport à δ, alors la densité $\rho(t, .)$ de $e_t \sharp \chi$ ne s'annule pas. D'après la formule précédente, on a pour $t \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$ et y un point du tore :

$$\rho(t, y) \geq \frac{1}{2\epsilon^d} \lambda^d \{x \in \mathbb{T}^d, \, |y - x - 2(t - \frac{1}{4})(\xi(x) - x)| \leq \frac{\epsilon}{2}\}.$$

Or on a par inégalité triangulaire, pour toute fonction g_1 et g_2 :

$$\{|g_1| \leq B\} \backslash \{|g_2| \geq A - B\} \subset \{|g_1 - g_2| \leq A\}.$$

En appliquant ceci à $g_1(x) := y - x$, $g_2(x) := 2(t - \frac{1}{4})(\xi(x) - x)$, $A := \frac{\epsilon}{2}$ et $B := \frac{\epsilon}{4}$, on trouve :

$$\begin{aligned}&\lambda^d \{|y - x - 2(t - \frac{1}{4})(\xi(x) - x)| \leq \frac{\epsilon}{2}\} \\ &\qquad \geq \lambda^d \{|x - y| \leq \frac{\epsilon}{4}\} - \lambda^d \{2(t - \frac{1}{4})|\xi(x) - x| \geq \frac{\epsilon}{4}\} \\ &\qquad \geq \pi_d \frac{\epsilon^d}{4^d} - \lambda^d \{|\xi(x) - x| \geq \frac{\epsilon}{4}\} \\ &\qquad \geq \pi_d \frac{\epsilon^d}{4^d} - \frac{16}{\epsilon^2} \delta^2,\end{aligned}$$

où π_d est la mesure de Lebesgue de la boule unité en dimension d. Ainsi, si on choisit :

$$\epsilon^{d+2} \geq 2\frac{4^{d+2}}{\pi_d}\delta^2,$$

on obtient que pour tout $t \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$, et tout $y \in \mathbb{T}^d$:

$$\rho(t, y) \geq \frac{\pi_d}{4^{d+1}}.$$

La minoration est même indépendante de ϵ et du temps.
Profitons-en pour indiquer que l'on montre de façon analogue que si :

$$\epsilon^{d+2} \geq \frac{\delta^2}{2^d\pi_d},$$

alors pour tout $t \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$, et tout $y \in \mathbb{T}^d$:

$$\rho(t, y) \leq 2^{d+1}\pi_d,$$

de sorte que si l'on choisit :

$$\boxed{\epsilon^{d+2} \geq 2\frac{4^{d+2}}{\pi_d}\delta^2,} \tag{1.3}$$

alors ρ est minorée et majorée par des constantes ne dépendant que de la dimension. On suppose désormais cette condition réalisée et on peut donc appliquer à chaque instant le lemme précédent, ce qui nous procure f_t un difféomorphisme C^1 du tore (qui vaut l'identité sur $[0, \frac{1}{4}] \cup [\frac{3}{4}, 1]$) tel que $f_t \sharp e_t \sharp \chi = \lambda^d$. Mais d'autre part :

$$f_t \sharp e_t \sharp \chi = e_t \sharp F \sharp \chi,$$

où :

$$\begin{array}{rccc} F: & \Omega(\mathbb{T}^d) & \to & \Omega(\mathbb{T}^d) \\ & \omega & \mapsto & (t \mapsto f_t(\omega(t)))\,. \end{array}$$

Donc le flot généralisé $\eta := F \sharp \chi$ est incompressible et joint bien l'identité à ξ, puisque F ne change pas les extrémités des chemins. Il nous faut estimer son action.

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(\eta) &= \int_{C([0,1],\mathbb{T}^d)} \frac{1}{2}\int_0^1 |\dot{\omega}|^2 dt d\eta(\omega) \\ &= \frac{1}{2\epsilon^d}\int_0^1 \int_{\mathbb{T}^d\times\mathbb{R}^d} |f_t \dot{\circ} \Phi_t(x, v)|^2 \varphi\left(\frac{v}{\epsilon}\right) dxdvdt \\ &= \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3,\end{aligned}$$

où $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ et $\mathcal{A}_3$ sont respectivement les intégrales sur les intervalles $[0, \frac{1}{4}]$, $[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$ et $[\frac{3}{4}, 1]$. $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_3$ se calculent très facilement puisque sur les intervalles concernés, f_t est l'identité et $\Phi(x,v)$ a une vitesse constante, égale à v ou $-v$. On a alors :

$$\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_3 = \frac{\epsilon^2}{8}\int_{\mathbb{R}^d} |v|^2\varphi(v)dv.$$

Passons au calcul de $\mathcal{A}_2$.

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\epsilon^d}\int_{\frac14}^{\frac34}\int_{\mathbb{T}^d\times\mathbb{R}^d} |\partial_t f_t(\Phi_t(x,v)) + \nabla f_t(\Phi_t(x,v))\cdot\partial_t\Phi_t(x,v)|^2\varphi(\frac{v}{\epsilon})dxdvdt\\
&\le \frac{1}{\epsilon^d}\int_{\frac14}^{\frac34}\int_{\mathbb{T}^d\times\mathbb{R}^d} \left(|\partial_t f_t(\Phi_t(x,v))|^2 + |\nabla f_t(\Phi_t(x,v))\cdot\partial_t\Phi_t(x,v)|^2\right)\varphi(\frac{v}{\epsilon})dxdvdt\\
&= \underbrace{\int_{\frac14}^{\frac34}\int_{\mathbb{T}^d} |\partial_t f_t(y)|^2\rho(t,y)dydt}_{\mathcal{A}_{2,1}}\\
&\qquad + \underbrace{\frac{1}{\epsilon^d}\int_{\mathbb{T}^d\times\mathbb{R}^d} |\nabla f_t(\Phi_t(x,v))\cdot 2(\xi(x)-x)|^2\varphi(\frac{v}{\epsilon})dxdvdt}_{\mathcal{A}_{2,2}}.
\end{aligned}$$

Commençons par traiter le cas de $\mathcal{A}_{2,1}$. La formule pour f_t montre que $\partial_t f_t$ est un vecteur dont les coordonnées sont des combinaisons linéaires de grandeurs majorées uniformément en temps et espace multipliées par des intégrales de dérivées temporelles de ρ. Il est alors facile de voir en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz que l'application $\partial_t\rho(t,\cdot)\mapsto\partial_t f_t$ est continue de L^2 dans L^2. Donc en utilisant également la majoration uniforme que l'on a sur ρ, on trouve :

$$\mathcal{A}_{2,1} \le C\int_{\frac14}^{\frac34}\int |\partial_t\rho(t,y)|^2 dydt.$$

Il nous faut donc estimer $\partial_t\rho$. Mais comme :

$$\rho(t,y) = \frac{1}{\epsilon^d}\int\varphi\left(\frac{y-x-2(t-\frac14)(\xi(x)-x)}{\epsilon}\right)dx,$$

on a :

$$\partial_t\rho(t,y) = -\frac{1}{\epsilon^{d+1}}\int\nabla\varphi\left(\frac{y-x-2(t-\frac14)(\xi(x)-x)}{\epsilon}\right)\cdot(\xi(x)-x)dx.$$

Donc :

$$\begin{aligned}
\int|\partial_t\rho(t,y)|^2dy &\le \frac{\delta^2}{\epsilon^{2d+2}}\int_{\mathbb{T}^d\times\mathbb{T}^d}\left|\nabla\varphi\left(\frac{y-x-2(t-\frac14)(\xi(x)-x)}{\epsilon}\right)\right|^2dxdy\\
&= C\frac{\delta^2}{\epsilon^{d+2}},
\end{aligned}$$

et en conséquence :

$$\mathcal{A}_{2,1} \le C\frac{\delta^2}{\epsilon^{d+2}}.$$

Maintenant :

$$\mathcal{A}_{2,2} \leq C||\nabla f_t||_{L^\infty} \frac{\delta^2}{\epsilon^d}.$$

Il nous faut donc estimer ∇f_t. C'est une matrice triangulaire inférieure dont les termes diagonaux sont majorés par la borne supérieure de ρ, et si $1 \leq i < j \leq d$, on a :

$$\partial_i f_{t,j} = \frac{1}{\int_{\mathbb{T}^{d-j+1}} \rho(t, x_1, \ldots, x_{j-1}, z)dz} \int_{a_j}^{x_j} \int_{\mathbb{T}^{d-j}} \partial_i \rho(t, x_1, \ldots, x_{j-1}, y, z) dz dy$$
$$- \frac{\int_{\mathbb{T}^{d-j+1}} \partial_i \rho(t, x_1, \ldots, x_{j-1}, z)dz}{\left(\int_{\mathbb{T}^{d-j+1}} \rho(t, x_1, \ldots, x_{j-1}, z)dz\right)^2} \int_{a_j}^{x_j} \int_{\mathbb{T}^{d-j}} \rho(t, x_1, \ldots, x_{j-1}, y, z) dz dy.$$

Donc grâce aux estimations que l'on a sur ρ :

$$||\nabla f_t||_{L^\infty} \leq C||\nabla \rho(t, .)||_{L^\infty}.$$

Or, par les mêmes estimations que précédemment, en utilisant le fait que ϵ satisfait (1.3) :

$$\begin{aligned}
|\nabla \rho(t, y)| &= \left| \frac{1}{\epsilon^{d+1}} \int \nabla \varphi \left(\frac{y - x - 2(t - \frac{1}{4})(\xi(x) - x)}{\epsilon} \right) dx \right| \\
&\leq \frac{1}{\epsilon^{d+1}} ||\nabla \varphi||_{L^\infty} \lambda^d \{|y - x - 2(t - \frac{1}{4})(\xi(x) - x)| \leq \epsilon\} \\
&\leq \frac{2^{d+1}}{\epsilon} \pi_d ||\nabla \varphi||_{L^\infty}.
\end{aligned}$$

Au final, on obtient donc :

$$\mathcal{A}_{2,2} \leq C \frac{\delta^2}{\epsilon^{d+2}}.$$

Et ainsi :

$$\mathcal{A}(\eta) \leq C \left(\epsilon^2 + \frac{\delta^2}{\epsilon^{d+2}} \right).$$

En prenant $\epsilon := \delta^{\frac{2}{d+4}}$ qui satisfait bien (1.3) pour les δ petits (ce qui est suffisant pour affirmer le résultat puisque le diamètre L^2 de l'ensemble des application mesurable préservant la mesure de lebesgue du tore est fini), on obtient donc le résultat :

$$d(Id, \xi) \leq \sqrt{\mathcal{A}(\eta)} \leq C\delta^{\frac{2}{d+4}}.$$

1.3.2 Solutions régulières et problème généralisé

On va voir dans ce paragraphe que toute solution régulière (dans un sens à préciser mais qui contient toutes les solutions classiques construites en supposant la condition initiale dans un espace de Sobolev d'exposant élevé) sont au moins localement en temps des solutions du problème généralisé, et qu'elles sont même uniques *dans la classe des solutions généralisées.* On suivra la démarche de [4]. Ce résultat repose sur le lemme suivant :

Lemme 1.3.2.1. *Soit T un réel et f une application de $[0,T]\times\Omega$ dans $\mathbb{R}$ telle qu'il existe un réel positif C tel que pour tout $t\in[0,T]$, l'application :*

$$\begin{array}{rccl}\Phi_t: & \Omega & \to & \mathbb{R}\\ & x & \mapsto & \frac{C}{2}|x|^2-f(t,x)\end{array}$$

soit la restriction à Ω d'une fonction convexe sur $Conv(\Omega)$.
Supposons que

$$T\le\frac{\pi}{\sqrt{C}}.$$

Soit $y\in H^1([0,T],\Omega)$ dont la dérivée seconde au sens des distributions est une fonction qui vérifie pour presque tout $t\in[0,T]$:

$$Cy(t)+y''(t)\in\partial_-\Phi_t(y(t)).$$

Alors y minimise la fonctionelle :

$$\begin{array}{rccl}B: & H^1([0,T],\Omega) & \to & \mathbb{R}\\ & z & \mapsto & \displaystyle\int_0^T\left[\frac{1}{2}|z'(t)|^2-f(t,z(t))\right]dt\end{array}$$

parmis les applications $z\in H^1$ telles que $z(0)=y(0)$ et $z(T)=y(T)$.
De plus, si l'inégalité est stricte, le minimiseur est unique.

Remarque 1.3.2.1

1. *Les hypothèses sur f impliquent qu'elle est continue, presque partout deux fois dérivable et à différentielle seconde majorée par C au sens des matrices symétriques partout où elle existe.*
2. *Ce résultat est une conséquence de l'inégalité de Poincaré que l'on rappelle ici : si $\varphi\in H_0^1([0,T],\mathbb{R})$, alors :*

$$\int_0^T|\varphi(t)|^2dt\le\left(\frac{T}{\pi}\right)^2\int_0^T|\varphi'(t)|^2dt,$$

et la constante $\left(\frac{T}{\pi}\right)^2$ est optimale (cf $sin(\frac{\pi t}{T})$).

Preuve : Soit y une fonction vérifiant les propriétés de l'énoncé et soit une fonction $z\in H^1([0,T],\Omega)$ partageant ses extrémité avec y. Pour presque tout t, Φ_t est convexe et $Cy(t)+y''(t)\in\partial_-\Phi_t(y(t))$, on a alors :

$$\Phi_t(y(t))+\big[Cy(t)+y''(t)\big]\cdot\big[z(t)-y(t)\big]\le\Phi(z(t)),$$

c'est à dire :

$$\frac{C}{2}|y(t)|^2-f(t,y(t))+\big[Cy(t)+y''(t)\big]\cdot\big[z(t)-y(t)\big]\le\frac{C}{2}|z(t)|^2-f(t,z(t)).$$

L'inégalité étant vrai pour presque tout t et toutes les régularités étant suffisantes, on peut intégrer cette inégalité entre 0 et T. On obtient alors après intégration par partie de la dérivée d'ordre 2 :

$$\begin{aligned}&\int_0^T -\frac{C}{2}|y(t)|^2 - f(t,y(t)) + |y'(t)|^2 dt \\ \leq &\int_0^T \frac{C}{2}|z(t)|^2 - f(t,z(t)) - Cy(t)\cdot z(t) + z'(t)\cdot y'(t)dt,\end{aligned}$$

d'où l'on déduit aisément :

$$B(y) - B(z) \leq \frac{C}{2}\int_0^T |y(t)-z(t)|^2 dt - \frac{1}{2}\int_0^T |z'(t)-y'(t)|^2 dt.$$

Et donc par l'inégalité de Poincaré :

$$B(y) - B(z) \leq \left(\frac{CT^2}{2\pi^2} - \frac{1}{2}\right)\int_0^T |z'(t)-y'(t)|^2 dt.$$

Donc si l'inégalité est vérifiée, y est bien minimiseur de B avec contrainte de conditions initiales et finales, et si l'inégalité est stricte, le minimiseur est unique. □

L'énoncé de ce théorème pourtant assez simple à démontrer peut paraître austère, mais il n'est qu'une généralisation facile du résultat suivant, qui peut du coup être vu comme un corollaire :

Corollaire 1.3.2.1. *Soit f une fonction C^2 sur $\mathbb{R}\times\Omega$ telle qu'en tout point $(t,x)\in[0,T]\times\Omega$, la différentielle spatiale seconde de f soit majorée au sens des matrices symétriques par un réel positif C. Alors les solutions de l'équation différentielle :*

$$y''(t) = -\nabla_x f(t,x)$$

partant du même point x_0 ne peuvent pas se recroiser avant l'instant $T_0 := \frac{\pi}{\sqrt{C}}$.

On peut alors énoncer le théorème principal de cette section duquel découlera le théorème d'unicité des solutions régulières dans la classe des solutions généralisées.

Théorème 1.3.2.1. *Soit η un flot généralisé incompressible joignant l'identité à la configuration γ en temps T. Supposons l'existence d'un champs p de $[0,T]\times D$ dans $\mathbb{R}$ et d'une constante positive C telles que :*

1. *pour tout t dans $[0,T]$:*

$$\begin{array}{rccl}\Phi_t : & D & \to & \mathbb{R}\\ & x & \mapsto & \frac{C}{2}|x|^2 - p(t,x)\end{array}$$

soit convexe sur $conv(D)$.

2. $$\boxed{T \leq \frac{\pi}{\sqrt{C}},} \tag{1.4}$$

3. pour η-presque tout $\omega \in \Omega(D)$, $\omega \in H^1([0,T],D)$ et sa dérivée seconde au sens des distributions est une fonction qui vérifie pour presque tout $t \in [0,T]$:

$$C\omega(t) + \omega''(t) \in \partial_- \Phi_t(\omega(t)).$$

Alors η est solution du problème généralisé. De plus, si l'inégalité dans (1.4) est stricte, cette solution est unique et pour tous chemins z_1 et z_2 dans le support de η partageant les mêmes deux extrémités, $z_1 = z_2$ (en un sens, le flot est déterministe).

Preuve : Sous les hypothèses du théorème, et en appliquant le lemme précédent, on voit que η-presque tout chemin minimise :

$$\int_0^T \left[\frac{1}{2}|\dot\omega(t)|^2 - p(t,\omega(t))\right] dt$$

parmis les chemins d'action finie partageant les mêmes deux extrémités. Soit $\tilde\eta$ un autre flot génétralisé incompressible joignant l'identité à γ en temps T avec une action finie. On peut désintégrer les mesures η et $\tilde\eta$ selon leur marginale γ, c'est à dire pour γ-presque tout $(x,y) \in D \times D$, on peut trouver des mesures de probabilité $\eta_{x,y}$ et $\tilde\eta_{x,y}$ sur $\Omega_{x,y} := \{\omega(0) = x,\, \omega(T) = y\}$ telles que pour toute fonction f η-intégrable (resp. $\tilde\eta$ intégrable), on ait :

$$\int f(\omega) d\eta(\omega) = \int_{D\times D} \int_{\Omega_{x,y}} f(\omega) d\eta_{x,y}(\omega) d\gamma(x,y)$$

(et la même formule avec $\tilde\eta$). On a alors pour γ-presque tout (x,y) :

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega_{x,y}} \int_0^T \left[\frac{1}{2}|\dot\omega(t)|^2 - p(t,\omega(t))\right] dt d\eta_{x,y}(\omega)\\ \leq &\int_{\Omega_{x,y}} \int_0^T \left[\frac{1}{2}|\dot\omega(t)|^2 - p(t,\omega(t))\right] dt d\tilde\eta_{x,y}(\omega)\end{aligned}$$

En intégrant ces inégalités par rapport à γ, on obtient :

$$\mathcal{A}(\eta) - \int\int_0^T p(t,\omega(t)) dt d\eta(\omega) \leq \mathcal{A}(\tilde\eta) - \int\int_0^T p(t,\omega(t)) dt d\tilde\eta(\omega)$$

Mais en utilisant fubini et la contrainte de non compressibilité, on voit tout de suite que les deux intégrales de cette inégalité sont égales, et donc :

$$\mathcal{A}(\eta) \leq \mathcal{A}_(\tilde\eta)$$

ce qui donne le résultat.
Si (1.4) est vérifiée, pour γ-presque tout (x,y), $\eta_{x,y}$ ne charge qu'une seule courbe (l'unique qui minimise l'intégrale du lagrangien, que l'on va noter $\omega_{x,y}$), ce qui signifie exactement que si deux chemins du support ont mêmes extrémités, alors elles sont égales. De plus, pour qu'un autre flot généralisé incompressible $\tilde\eta$ joignant l'identité à γ en temps T ait la même action que η, il faut que pour γ-presque tout (x,y) :

$$\int_0^T \left[\frac{1}{2}|\dot\omega_{x,y}(t)|^2 - p(t,\omega_{x,y}(t))\right] dt = \int\int_0^T \left[\frac{1}{2}|\dot\omega(t)|^2 - p(t,\omega(t))\right] dt d\tilde\eta_{x,y}(\omega).$$

Mais cette dernière inégalité implique que $\tilde\eta_{x,y}$ ne charge que $\omega_{x,y}$, ce qui permet de conclure. $\square$

Corollaire 1.3.2.2. *Si le champs $(v(t,x))$ est solution régulière des équations d'Euler, on peut lui associer par la méthode vu au pararaphe 1.1.2 un chemin dans l'ensemble des difféomorphismes préservant la mesure. Pour peu que le champs de pression admette une différentielle seconde spatiale majorée au sens des matrices symétriques par un scalaire $C > 0$, pour chaque $t < \frac{\pi}{\sqrt{C}}$ le flot généralisé incompressible μ_ξ associé à ce chemin est l'unique solution au problème d'Euler relaxé entre l'identité et ξ_t.*

Preuve : μ_ξ ne charge que des solutions de l'équation différentielle :

$$y''(t) = -\nabla p(t, y(t)),$$

ce qui est suffisant pour vérifier :

$$Cy(t) + y''(t) \in \partial_- \Phi_t(y(t)),$$

et on peut donc appliquer le théorème précédent. □

1.4 La pression dans le modèle généralisé

1.4.1 Un résultat d'unicité pour la pression

Dans ce paragraphes nous allons regarder en quoi on peut encore parler de champs de pression pour le problème généralisé. Nous verrons ensuite que si deux solutions généralisées η_1 et η_2 joignent l'identité à une même configuration γ, alors les champs de pression sont les mêmes.
En suivant [2], définissons la notion de flot presque-incompressible :

Définition 1.4.1.1. Un flot presque incompressible η joignant l'identité à une configuration γ est une mesure sur l'ensemble des chemins tracés dans D telle que :

1. $(e_0, e_1) \sharp \eta = \gamma$,
2. $\forall t \in [0,1],\ e_t \sharp \eta << \lambda^d \llcorner D$ et sa densité $\rho_t(x)$ est C^1 sur $[0,1] \times D$,
3. $||\rho - 1||_{C^1([0,1]\times\Omega)} \leq \frac{1}{2}$.

On dispose alors du résultat suivant :

Théorème 1.4.1.1. *Quelque soit la configuration γ du fluide, il existe un unique élément p dans le dual de $C^1([0,1] \times D) \cap \{\int_D f(t,x)dx = 0\}$ tel que pour tout flot presque-incompressible η_{test} joignant l'identité à γ :*

$$\mathcal{A}(\eta_{opt}) + \langle p, \rho - 1 \rangle \leq \mathcal{A}(\eta_{test}),$$

où η_{opt} est n'importe quelle solution de l'équation d'Euler généralisée joignant l'identité à γ.

Preuve : Définissons sur l'ensemble des fonctions densité de flots presque incompressibles joignant l'identité à γ la fonction :

$$\tilde{\mathcal{A}}(\rho) := \inf_{\eta_{test}} \{\mathcal{A}(\eta_{test})\},$$

où l'inf est pris sur tous les flots presque incompressibles η_{test} joignant l'identité à γ en ayant pour densité ρ. $\tilde{\mathcal{A}}$ est évidemment convexe et semi-continue inférieurement pour la norme $C^1([0,1]\times D)$.
Montrons qu'elle est bornée au voisinage de 1.
[7] nous permet, pour tout ρ tel que $\rho-1$ soit inférieur à un certain ϵ en norme C^1, de construire par une méthode très proche de celle développée au 3.3 un chemin lipschitz de difféormorphismes (g_t^ρ) tel que :

$$\begin{gathered}\forall t\in[0,1],\ g_t^\rho \sharp \lambda^d = \rho(t,\cdot)\lambda^d,\\ \forall t\in[0,1],\ \|g_t^\rho - 1\|_{C^1} \le C(d)\|\rho-1\|_{C^1},\\ \mathrm{Lip}(g^\rho) \le C(d)\|\rho-1\|_{C^1}.\end{gathered}$$

Si η_{opt} est une solution généralisée de l'équation d'Euler entre l'identité et γ, on peut alors définir le flot presque incompressible de densité ρ :

$$\nu^\rho := G\sharp\eta,$$

où

$$\begin{array}{cccc} G: & \Omega(D) & \to & \Omega(D) \\ & \omega & \mapsto & [t\mapsto g_t^\rho(t,\omega(t))] \end{array}.$$

Or, si on calcule l'action de ν^ρ :

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{A}}(\rho) \le \mathcal{A}(\nu^\rho) &= \frac{1}{2}\int_{\Omega(D)}\int_0^1 |\partial_t g_t^\rho(\omega(t)) + \nabla_x g_t(\omega(t))\cdot\dot\omega(t)|^2 dt\eta_{opt}(d\omega)\\ &\le C(d)^2\|\rho-1\|_{C^1}^2(1+\mathcal{A}(\eta_{opt})).\end{aligned}$$

Donc $\tilde{\mathcal{A}}$ est bien bornée au voisinage de 1. Donc par le théorème d'Hahn-Banach, la sous différentielle de $\tilde{\mathcal{A}}$ est non vide en 1, ce qui nous donne l'existence de p tel que pour tout ρ densité de flot presque incompressible et tout η_{opt} solution généralisée de l'équation d'Euler entre l'identité et γ :

$$\mathcal{A}(\eta_{opt}) + \langle p|\rho-1\rangle \le \tilde{\mathcal{A}}(\rho). \tag{1.5}$$

Pour montrer l'unicité de p, on choisit $h\in C_c^\infty(]0,1[)$ et $w\in C^\infty(D,\mathbb{R}^d)$ tangent au bord de D, et on considère la famille de chemins de difféomorphismes :

$$g_t^\delta(x) := \exp_{\delta h(t)}(w)(x).$$

On écrit alors l'inégalité variationnelle (1.5) pour :

$$\rho_t^\delta(x) := \frac{dg_t^\delta\sharp\lambda^d}{d\lambda^d}(x) = \det(dg_t^{\delta^{-1}}(x)).$$

Si η_{opt} est solution généralisée de l'équation d'Euler entre l'identité et γ et :

$$\begin{array}{cccc} G^\delta: & \Omega(D) & \to & \Omega(D) \\ & \omega & \mapsto & \left[t\mapsto g_t^\delta(t,\omega(t))\right] \end{array},$$

alors :

$$\mathcal{A}(\eta_{opt}) + \langle p|\rho^\delta - 1\rangle \leq \tilde{\mathcal{A}}(\rho^\delta) \leq \mathcal{A}(G^\delta \sharp \eta_{opt})$$
$$= \frac{1}{2}\int_{\Omega(D)}\int_0^1 |\partial_t g_t^\delta(\omega(t)) + \nabla_x g_t^\delta(\omega(t)) \cdot \dot{\omega}(t)|^2 dt\eta_{opt}(d\omega).$$

En utilisant la même méthode que celle qui sera détaillée au 3.4.5, on obtient lorsque δ tend vers 0 (par un simple développement de Taylor) :

$$\langle p|h\,\mathrm{div}(w)\rangle = -\int_{\Omega(D)}\int_0^1 \langle\dot{\omega}(t)|h'(t)w(\omega(t)) + h(t)dw(\omega(t)) \cdot \dot{\omega}(t)\rangle dt\eta_{opt}(d\omega),$$

ce qui suffit à carcatériser p comme l'unique distribution (à l'ajout d'une fonction ne dépendant que du temps près) vérifiant pour tout champ de vecteurs lisse $w(t,x)$ à support compact dans $]0,1[\times\mathring{D}$ et quelque soit le η_{opt} choisi :

$$\langle p|\,\mathrm{div}(w)\rangle = -\int_{\Omega(D)}\int_0^1 \langle\dot{\omega}(t)|\frac{d}{dt}w(t,\omega(t))\rangle dt\eta_{opt}(d\omega). \tag{1.6}$$

□

1.4.2 Un modèle équivalent pour l'équation d'Euler

Il existe un autre modèle pour la construction de solutions généralisées de l'équation d'Euler, faisant intervenir un champ de vitesses. On peut même montrer qu'il y a une correspondance entre les solutions obtenues avec ce second modèle (que l'on appellera euleriennes), et celles obtenues avec le précédent (que l'on appellera lagrangiennes). Ceci a des conséquences intéressantes sur la régularité du champs de pression, mais on ne va pas s'y intéresser ici. Notre but ici est essentiellement de montrer que la pression construite précédemment est solution au sens des distributions d'une équation qui coïncide avec l'équation d'Euler classique dès qu'on interdit aux particules de se croiser dans un sens que l'on développera à la remarque 1.4.3.1.

Commençons par décrire ce modèle. On se donne une configutation γ et on tente de résoudre l'équation d'Euler entre l'identité et γ en temps 1. L'idée est de définir une famille de mesures indexées par le temps et un champ de vecteurs mesurable sur $[0,1] \times D$ *par particule*, disons (μ_t^x) et v^x solutions de l'équation de continuité au sens des distributions :

$$\partial_t\mu_t^x + \mathrm{div}\, v^x\mu_t^x = 0.$$

On dit alors que la famille de couples $(\mu^x, v^x)_{x\in D}$ est admissible et on note

$(\mu^x, v^x)_{x\in D} \in \mathrm{Adm}_e(Id, \gamma)$ si :

$$\forall t \in [0,1],\ x \mapsto \mu_t^x \text{ est mesurable,} \tag{1.7}$$

$$v \text{ est mesurable en } x,\ t \text{ et } y, \tag{1.8}$$

$$\forall t \in [0,1],\ \int_D \mu_t^x dx = \lambda^d, \tag{1.9}$$

$$\partial_t \mu_t^x + \operatorname{div} v^x \mu_t^x = 0, \tag{1.10}$$

$$\forall x \in D,\ \mu_0^x = \delta_x, \tag{1.11}$$

$$\forall \varphi \in C^0(D \times D),\ \int_D \int_D \varphi(x,y)\mu_1^x(dy)dx = \int_{D\times D} \varphi(x,y)\gamma(d(x,y)), \tag{1.12}$$

$$\mathcal{A}_e(((\mu^x, v^x))_{x\in D}) := \frac{1}{2}\int_0^1 \int_D \int_D |v^x(t,y)|^2 \mu_t^x(dy)dxdt < \infty. \tag{1.13}$$

Remarque 1.4.2.1

- (1.7) *signifie que pour tout t et toute fonction mesurable positive φ sur D, $x \mapsto \int_D \varphi(y)\mu_t^x(dy)$ est mesurable.*
- (1.12) *se réécrit plus synthétiquement $\lambda^d \otimes \mu_1^x = \gamma$.*
- *On peut construire une relation d'équivalence entre les familles de couples. Deux familles $(\mu_1^x, v_1^x)_{x\in D}$ et $(\mu_2^x, v_2^x)_{x\in D}$ seront dites équivalentes si pour tout t et presque tout x, $\mu_1^x = \mu_2^x$ et si pour presque tout t, x, et μ_1^x- presque tout y, $v_1 = v_2$.*

On dit alors que la famille $(\mu^x, v^x)_{x\in D}$ est une solution eulérienne généralisée de l'équation d'Euler entre l'identité et γ en temps 1 si elle minimise l'action $\mathcal{A}_e$ dans la classe des familles admissibles.
On a alors le résultat intéressant suivant :

Théorème 1.4.2.1. *On a :*

$$\min_{\eta\in \mathrm{Adm}(Id,\gamma)} \mathcal{A}(\eta) = \inf_{(\mu^x,v^x)_{x\in D}\in \mathrm{Adm}_e(Id,\gamma)} \mathcal{A}_e((\mu^x, v^x)_{x\in D}). \tag{1.14}$$

Plus précisément, pour chaque flot (lagrangien) généralisé incompressible optimal $\eta \in \mathrm{Adm}(Id,\gamma)$, il existe une unique famille (eulérienne, à équivalence près) $\mathcal{V}(\eta) = (\mu^x, v^x)_{x\in D} \in \mathrm{Adm}_e(Id, \gamma)$ de même action naturellement associée à η dans le sens où pour η-presque tout chemin ω et presque tout t :

$$\dot\omega(t) = v^{\omega(0)}(t, \omega(t)). \tag{1.15}$$

*En particulier, l'*inf *à droite est un* min *et les solutions sont "les mêmes".*
Réciproquement, pour chaque famille $(\mu^x, v^x)_{x\in D} \in \mathrm{Adm}_e(Id,\gamma)$ optimale, il existe $\eta \in \mathrm{Adm}(Id,\gamma)$ tel que $(\mu^x, v^x)_{x\in D} = \mathcal{V}(\eta)$, mais ce η n'est en général pas unique.

On va avoir besoin du lemme suivant liant flots généralisés et solutions de l'équation de continuité.

Lemme 1.4.2.1. *Soit η une mesure de probabilité sur $\Omega(D)$ avec :*

$$\mathcal{A}(\eta) < \infty.$$

En posant $\mu_t := e_t \sharp \eta$ et $m_t := e_t \sharp \dot{\omega}(t)\eta$, on obtient :

1. *pour presque tout t, $m_t = v(t,\cdot)\mu_t$ est absolument continue par rapport à μ_t,*
2. *au sens des distributions :*

$$\partial_t \mu_t + \operatorname{div}(v(t,\cdot)\mu_t) = 0$$

3. $$\mathcal{A}(\mu, v) := \frac{1}{2}\int_0^T \int_D |v(t,x)|^2 \mu_t(dx)dt \leq \mathcal{A}(\eta).$$

Preuve : L'absolue continuité est une conséquence de l'action finie, puisque alors pour presque tout t, $\omega \mapsto \dot{\omega}(t)$ est η intégrable.
Soit $\varphi \in C_c^\infty(]0,1[\times D)$ et $x \in D$. On a :

$$\begin{aligned}
&\int_{]0,1[\times D} \left[\partial_t \varphi(t,x) + \nabla\varphi(t,x)\cdot v(t,x)\right] \mu_t(dx)dt \\
&= \int_0^1 \int \left[\partial_t \varphi(t,\omega(t)) + \nabla\varphi(t,\omega(t))\dot{\omega}(t)\right] \eta(d\omega)dt \\
&= \int_0^1 \frac{d}{dt}\left[\int \varphi(t,\omega(t))\eta(d\omega)\right] dt = 0.
\end{aligned}$$

Enfin, si on désintègre $\eta = \mu_t(dx) \otimes \eta^{t,x}$ par rapport à e_t, on se rend compte que :

$$v(t,x) = \int_{\Omega(D)} \dot{\omega}(t)\eta^{t,x}(d\omega).$$

En particulier :

$$|v(t,x)|^2 \leq \int_{\Omega(D)} |\dot{\omega}(t)|^2 \eta^{t,x}(d\omega).$$

En conséquence :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_0^1 \int_D |v(t,x)|^2 \mu_t(dx)dt &\leq \frac{1}{2}\int_0^1 \int_D \int_{\Omega(D)} |\dot{\omega}(t)|^2 \eta^{t,x}(d\omega)\mu_t(dx)dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 \int_{\Omega(D)} |\dot{\omega}(t)|^2 \eta(d\omega)dt \\
&= \mathcal{A}(\eta).
\end{aligned}$$

Preuve du théorème : Soit η un flot généralisé incompressible joignant l'identité à γ en temps 1, d'action finie. On désintègre la mesure η selon l'application mesurable e_0. Ceci nous donne une famille de mesures de probabilité sur $\Omega(D)$ indexées par l'espace que l'on note η_0^x et qui vérifient :

$$\lambda^d \otimes \eta_0^x = \eta.$$

Posons alors :

$$\mu_t^x := e_t \sharp \eta_0^x,$$
$$m_t^x := e_t \sharp \dot{\omega}(t)\eta_0^x.$$

m_t^x est alors absolument continue par rapport à μ_t^x, on note $v^x(t,\cdot)$ sa densité.
On a facilement (1.7), (1.9), (1.11) et (1.12), (1.10) et (1.13) sont des conséquences du lemme 1.4.2.1.
Donc $(\mu^x, v^x)_{x\in D}$ est bien une solution généralisée eulérienne de l'équation d'Euler, d'action plus petite que η.
Mais alors si on montre que pour toute famille $(\mu^x, v^x)_{x\in D} \in \mathrm{Adm}_e(Id,\gamma)$, il existe $\eta \in \mathrm{Adm}(Id,\gamma)$ telle que :

$$\int_0^1 \int_{\Omega(D)} |\dot{\omega}(t)|^2 \eta(d\omega)dt \leq \int_0^1 \int_D |v^x(t,y)|^2 \mu_t^x(dy)dt,$$

on aura le résultat du théorème. Néanmoins, la construction est plus complexe et nécessite des résultats fins sur les solutions de l'équation de continuité (1.10). Ces résultats peuvent être trouvés dans un cadre général dans [3, 1, 8], ici on va simplement redémontrer ce dont on a besoin.

Construction réciproque

Dans ce paragraphe, on se donne donc $(\mu^x, v^x)_{x\in D} \in \mathrm{Adm}_e(Id,\gamma)$ et on veut construire $\eta \in \mathrm{Adm}(Id,\gamma)$ d'action plus petite. L'idée est de se dire que si v^x était lisse, alors (1.10) impliquerait nécéssairement que :

$$\mu_t^x = \delta_{X(t,x)}$$

où $X(\cdot,x)$ est solution de l'équation différentielle ordinaire :

$$X(0,x) = x,$$
$$\dot{X}(t,x) = v^x(t, X(t,x)).$$

$\eta := X(\cdot,x) \sharp \lambda^d$ conviendrait alors. Le "seul" problème est donc de gérer les irrégularité de v^x et la non unicité des solutions de l'équation différentielle associée. On va naturellement le faire en régularisant v^x.
On va utiliser le théorème de Cauchy-Lipschitz : :

Théorème 1.4.2.2. *Soit v un champ de vitesses dans $L^1([0,T], W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d))$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, il existe une unique solution L^1_{loc} notée $(X_t(x))$ solution de :*

$$X_0(x) = x,$$
$$\dot{X}_t(x) = v(t, X_t(x)),$$

où la deuxième équation peut être prise soit au sens des distributions, soit pour presque tout t. Cette solution est absolument continue et définie pour tout $t \in [0,T]$.
De plus on a l'estimation de stabilité :

$$|X_t(x) - X_t(y)| \leq |x-y| \exp\left(\int_0^t \mathrm{Lip}(v(\tau,\cdot))d\tau\right).$$

On revient à notre problème, on fixe $x \in D$ et on voit les μ_t^x et $v^x(t,\cdot)$ comme des mesures et des champs de vecteurs sur $\mathbb{R}^d$ tout entier (en les prolongeant par 0). On choisit un noyau régularisant ρ^ϵ strictement positif sur tout $\mathbb{R}^d$. On note alors $\mu_t^{x,\epsilon}$ la densité de $\rho^\epsilon * \mu_t^x$ et $v^{x,\epsilon}(t,\cdot)$ la densité de $\frac{\rho^\epsilon * (v^x(t,\cdot)\mu_t^x)}{\mu_t^{x,\epsilon}}$ (en remarquant que $\mu_t^{x,\epsilon}$ est partout strictement positive). Alors $v^{x,\epsilon}$ satisfait les hypothèses de 1.4.2.2 ce qui nous donne un flot $X^{x,\epsilon}$. On montre alors le :

Lemme 1.4.2.2. *On a pour presque tout t : $\mu_t^{x,\epsilon} = X_t^{x,\epsilon} \sharp \mu_0^{x,\epsilon}$.*

Preuve : On va en fait montrer qu'étant donnée $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$:

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(y)(X_t^{x,\epsilon})^{-1} \sharp \mu_t^{x,\epsilon}(dy)$$

est une constante. C'est un simple calcul en remarquant que $(\mu^{x,\epsilon}, v^{x,\epsilon})$ est solution de l'équation de continuité. En effet, une telle application est absolument continue en t et pour presque tout t :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^d} &\varphi(y)(X_t^{x,\epsilon})^{-1} \sharp \mu_t^{x,\epsilon}(dy) \\
&= \frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^d} \varphi((X_t^{x,\epsilon})^{-1}(y))\mu_t^{x,\epsilon}(dy) \\
&= \langle \partial_t \mu_t^{x,\epsilon} | \varphi \circ (X_t^{x,\epsilon})^{-1}\rangle + \langle \mu_t^{x,\epsilon} | \partial_t(\varphi \circ (X_t^{x,\epsilon})^{-1})\rangle \\
&= -\langle \mathrm{div}(v^{x,\epsilon}(t,\cdot)\mu_t^{x,\epsilon}) | \varphi \circ (X_t^{x,\epsilon})^{-1}\rangle + \langle \mu_t^{x,\epsilon} | \partial_t(\varphi \circ (X_t^{x,\epsilon})^{-1})\rangle \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} [v^{x,\epsilon}(t,y) \cdot \nabla(\varphi((X_t^{x,\epsilon})^{-1}(y))) + \partial_t(\varphi((X_t^{x,\epsilon})^{-1}(y)))]\mu_t^{x,\epsilon}(dy) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

car des manipulations simples sur le flot montrent que :

$$\begin{aligned}
v^{x,\epsilon}(t,y)\cdot &\nabla(\varphi((X_t^{x,\epsilon})^{-1}(y))) + \partial_t(\varphi((X_t^{x,\epsilon})^{-1}(y))) \\
&= [v^{x,\epsilon}(t,y) D(X^{x,\epsilon})^{-1}(y) + \partial_t (X^{x,\epsilon})^{-1}(y)] \cdot \nabla\varphi((X^{x,\epsilon})^{-1}(y)) \\
&= 0 \cdot \varphi((X^{x,\epsilon})^{-1}(y)).
\end{aligned}$$

□

On pose alors :

$$\begin{array}{rccl} Y^{x,\epsilon} : & \mathbb{R}^d & \to & \Omega(\mathbb{R}^d) \\ & y & \mapsto & [t \mapsto X_t^{x,\epsilon}(y)] \end{array}$$

et :

$$\eta^{x,\epsilon} := Y^{x,\epsilon} \sharp \mu_0^{x,\epsilon}.$$

Il est possible de voir que la mesurabilité en x de μ^x et v^x donne de la mesurabilité en x des $\eta^{x,\epsilon}$ via la construction dans Cauchy-Lipshitz qui est une convergence sans extraction). On peut donc définir la mesure $\eta^\epsilon := \lambda^d \llcorner D \otimes \eta^{x,\epsilon}$, c'est à dire la mesure sur l'ensemble des chemins de $\mathbb{R}^d$ définie par dualité contre toute fonction φ continue et bornée sur $\Omega(\mathbb{R}^d)$ par :

$$\int_{\Omega(\mathbb{R}^d)} \varphi(\omega)\eta^\epsilon(d\omega) = \int_D \int_{\Omega(\mathbb{R}^d)} \varphi(\omega)\eta^{x,\epsilon}(d\omega)dx.$$

On montre maintenant qu'à extraction près, η^ϵ converge étroitement vers un η vérifiant toutes les propriétés que l'on souhaite.

Lemme 1.4.2.3. *$(\eta^\epsilon)_\epsilon$ est tendue. Si on prend η une valeur d'adhérence, et (ϵ_n) telle que η^{ϵ_n} converge étroitement vers η, on a :*

1. *η est à support dans $\Omega(D)$,*
2. *si on note $\eta = \lambda^d \otimes \eta^x$ la décomposition de η dans sa désintégration par rapport à e_0, on a pour presque tout x :*
$$e_t \sharp \eta^x = \mu_t^x,$$
3. *$e_t \sharp \eta = \lambda^d$,*
4. *$\liminf \int_{\Omega(\mathbb{R}^d)} \int_0^1 |\dot\omega(t)|^2 dt\eta^{\epsilon_n}(d\omega) \geq \int_{\Omega(D)} \int_0^1 |\dot\omega(t)|^2 dt\eta(d\omega)$.*

Preuve : Soit $\delta > 0$.

D'abord, $\mu_0^\epsilon := \int_D \mu_0^{x,\epsilon} dx$ est tendue (constater par exemple qu'elle converge étroitement vers $\lambda \llcorner D$). On choisit donc K un compact de $\mathbb{R}^d$ tel que pour tout ϵ, $\mu_0^\epsilon(\mathbb{R}^d \backslash A) \leq \delta$.

On a d'après 1.4.2.2 :

$$\int_{\Omega(\mathbb{R}^d)} \int_0^1 |\dot\omega(t)|^2 dt\eta^\epsilon(d\omega) \leq \int_0^1 \int_D \int_D |v^x(t,y)|^2 \mu_t^x(dy)dxdt.$$

Donc il existe M tel que pour tout ϵ, $\eta^\epsilon(\{\int_0^1 |\dot\omega(t)|^2 dt > M\}) \leq \delta$. Donc pour tout ϵ :

$$\eta^\epsilon(\{\int_0^1 |\dot\omega(t)|^2 dt > M\} \cup \{\omega(0) \in \mathbb{R}^d \backslash A\}) \leq 2\delta.$$

Or l'ensemble en question a un complémentaire compact dans $\Omega(\mathbb{R}^d)$ (en passant au complémentaire et en utilisant le théorème d'Ascoli), donc (η^ϵ) est tendue (ceci est en fait presque une conséquence directe de 1.2.3.1, mais il faut tout de même faire attention car les chemins ne sont pas tracés dans un compact). On peut donc en extraire (η^{ϵ_n}) une suite sonvergeant étroitement vers une certain η.

On va alors commencer par montrer 2, 3 et 1 en découleront facilement. Pour tout n, tout t et presque tout x, il est facile de voir que :

$$\begin{aligned}(e_0, e_t) \sharp \eta^{\epsilon_n} &= \lambda^d \otimes (e_t \sharp \eta^{x,\epsilon_n}) \\ &= \lambda^d \otimes \mu_t^{x,\epsilon_n}.\end{aligned}$$

En passant à la convergence étroite :

$$(e_0, e_t) \sharp \eta = \lambda^d \otimes \mu_t^x.$$

Mais alors par unicité de la désintégration, comme on a toujours :

$$(e_0, e_t) \sharp \eta = \lambda^d \otimes (e_t \sharp \eta^x),$$

on obtient bien 2. 3 est alors immédiat.

Mais maintenant dans $\Omega(\mathbb{R}^d)$:

$$\begin{aligned}\Omega(\mathbb{R}^d) \backslash \Omega(D) &= \cup_{t \in [0,1]} \{\omega(t) \in \mathbb{R}^d \backslash D\} \\ &= \cup_{t \in [0,1] \cap \mathbb{Q}} \{\omega(t) \in \mathbb{R}^d \backslash D\}.\end{aligned}$$

Et donc :

$$\eta(\Omega(\mathbb{R}^d)\backslash\Omega(D)) \leq \sum_{[0,1]\cap\mathbb{Q}} \eta(\{\omega(t) \in \mathbb{R}^d\backslash D\})$$
$$\leq \sum_{[0,1]\cap\mathbb{Q}} \lambda^d \llcorner D(\{x \in \mathbb{R}^d\backslash D\}) = 0,$$

d'où 1.
4 est une conséquence directe de la semi-continuité inférieure de l'action 1.2.3.1. $\square$

Fin de la preuve du théorème 1.4.2.1

η est un flot généralisé, incompressible grâce à (1.9), joignant l'identité à γ grâce à (1.12), et d'action plus petite que $(\mu^x, v^x)_{x\in D}$ grâce à 4. On obtient donc la première partie du théorème à savoir (1.14).
En conséquence, si le flot η est optimal, on ne peut pas avoir :

$$\mathcal{A}((\mu^x, v^x)_{x\in D}) < \mathcal{A}(\eta),$$

sinon on pourrait partir de $((\mu^x, v^x))_{x\in D}$ pour construire un flot généralisé incompressible joignant l'identité à γ d'action plus petite que η. Donc :

$$\mathcal{A}((\mu^x, v^x)_{x\in D}) = \mathcal{A}(\eta).$$

En suivant le calcul, on voit que cette égalité est vrai si et seulement si pour presque tout t, x et μ_t^x-presque tout y :

$$|v^x(t,y)|^2 = \left|\int_{\Omega(D)} \dot{\omega}(t)\eta_{0,t}^{x,y}(d\omega)\right|^2 = \int_{\Omega(D)} |\dot{\omega}(t)|^2 \eta_{0,t}^{x,y}(d\omega),$$

ce qui implique que pour presque tout t et x, μ_t^x-presque tout y et $\eta_{0,t}^{x,y}$-presque tout ω :

$$\dot{\omega}(t) = v^x(t,y) = v^{\omega(0)}(t,\omega(t)).$$

En conséquence, par le théorème de Fubini et parce que pour tout t :

$$\eta = \int_D \int_D \eta_{0,t}^{x,y} \mu_t^x(dy)dx,$$

on obtient (1.15) pour η-presque tout chemin et presque tout t. Mais ceci suffit à caractériser v_t^x sur le support de μ_t^x et donne donc l'unicité à équivalence près.
Enfin, si on part d'une famille $(\mu^x, v^x)_{x\in D} \in \mathrm{Adm}(Id, \gamma)$ optimale et que la construction précedente nous donne η, alors $\mathcal{V}(\eta) = (\mu^x, v^x)_{x\in D}$ (à équivalence près). C'est une conséquence directe de (1.15). $\square$

1.4.3 Equation distributionnelle vérifiée par la pression

Revenons alors à (1.6). On a vu que si η était solution (lagrangienne) généralisée de l'équation d'Euler entre l'identité et γ, on obtenait une distribution p (déterminée à l'ajout d'une fonction ne dépendant que du temps près) agissant comme multiplicateur de Lagrange associé à notre problème de minimisation. Cette distribution satisfaisait pour tout champ de vecteurs lisse w à support compact dans $]0,1[\times \mathring{D}$:

$$\langle p | \operatorname{div}(w) \rangle = - \int_{\Omega(D)} \int_0^1 \langle \dot{\omega}(t) | \frac{d}{dt} w(t, \omega(t)) \rangle dt \eta(d\omega).$$

Mais si on note $(\mu^x, v^x)_{x \in D}$ le flot eulérien associé à η et en utilisant (1.15), on obtient :

$$\begin{aligned}
&\langle p | \operatorname{div}(w) \rangle \\
&= - \int_0^1 \int_{\Omega(D)} \langle v^{\omega(0)}(t, \omega(t)) | \partial_t w(t, \omega(t)) + Dw(t, \omega(t)) \cdot v^{\omega(0)}(t, \omega(t)) \rangle \eta(d\omega) dt \\
&= - \int_0^1 \int_D \int_D \langle v^x(t, y) | \partial_t w(t, y) + Dw(t, y) \cdot v^x(t, y) \rangle \mu_t^x(dy) dx dt \\
&= - \left\langle \int_D v^x \mu^x dx \middle| \partial_t w \right\rangle - \operatorname{tr} \left(\left\langle \int_D v^x \otimes v^x \mu^x dx \middle| Dw \right\rangle \right),
\end{aligned}$$

d'où l'équation au sens des distributions :

$$\boxed{\partial_t \left(\int_D v^x \mu^x dx \right) + \mathbf{div} \left(\int_D v^x \otimes v^x \mu^x dx \right) = -\nabla p.} \tag{1.16}$$

Remarque 1.4.3.1

On introduit la notion de "vitesse macroscopique" :

Définition 1.4.3.1. La vitesse macrsocopique à l'instant t associée à un flot généralisé η est, quand elle existe, la densité de la mesure :

$$e_t \sharp \dot{\omega}(t) \eta.$$

En particulier, si η a une action finie, elle admet une vitesse macroscopique pour presque tout t.

On a alors le résultat facile suivant qui permet de relier vitesse macroscopique et flot eulérien :

Proposition 1.4.3.1. *Soit η un flot généralisé (lagrangien) d'action finie. On note $(\mu^x, v^x)_{x \in D}$ son flot eulérien associé et $(v_t)_{t \in [0,1]}$ sa vitesse macroscopique. On a pour presque tout t et presque tout y :*

$$v_t(y) dy = \int_D v^x(t, y) \mu_t^x(dy) dx.$$

Preuve : *Soit w un champ de vecteurs continu sur D et $t \in [0,1]$ en lequel η admet une vitesse macroscopique. Alors pour presque tout x, $v^x(t, y)$ est* *bien défini μ_t^x partout et :*

$$\begin{aligned}\int_D w(y)v_t(y)dy &= \int_{\Omega(D)} w(\omega(t))\cdot\dot{\omega}(t)\eta(d\omega)\\ &= \int_D\int_{\Omega(D)} w(\omega(t))\cdot\dot{\omega}(t)\eta_0^x(d\omega)dx\\ &= \int_D\int_D w(y)\cdot v^x(t,y)\mu_t^x(dy)dx.\end{aligned}$$

$\square$

Supposons maintenant que les particules ne se croisent pas. Ceci signifie qu'il existe pour presque tout t une application mesurable Φ_t préservant la mesure de Lebesgue de D telle que :

$$(e_t, e_0) \sharp \eta = (Id, \Phi_t) \sharp \lambda^d.$$

Proposition 1.4.3.2. *On a alors presque partout :*

$$v_t(y) = v^{\Phi_t(y)}(t,y),$$

et de la même façon :

$$\int_D v^x \otimes v^x \mu_t^x(dy)dx = v^{\Phi_t(y)}(t,y)\otimes v^{\Phi_t(y)}(t,y)dy = v_t(y)\otimes v_t(y)dy.$$

On voit alors que le champ v_t est solution au sens des distributions de l'équation d'Euler :

$$\partial_t v_t + \boldsymbol{div}(v_t\otimes v_t) = -\nabla p.$$

Chapitre 2

Approximation des solutions généralisées des équations d'Euler par des solutions des équations des flots multiphasiques

2.1 Introduction

2.2 Décomposition des marginales

Une notion qui va être fondamentale pour la suite est la notion de décomposition des marginales, que l'on va présenter ici dans un cadre très général, bien que les résultats seront donnés dans des cas très simples.

Définition 2.2.0.2. Dans la suite, si μ est une mesure de Radon positive sur un espace métrique X, on dira que la famille de mesures de Radon positives $(\mu_i)_{i\in[\![1,M]\!]}$ est une décomposition de μ si :

$$\sum_{i=1}^{M} \mu_i = \mu.$$

Définition 2.2.0.3. Soit μ une mesure de probabilité sur un espace métrique (X, d_X) et ν une mesure de probabilité sur un espace métrique (Y, d_Y). Soient deux familles $(\mu_i)_{i=1,\dots,M}$ et $(\nu_i)_{i=1,\dots,M}$ respectivement décompositions de μ et ν, de même cardinal, et satisfaisant :

$$\forall i \in [\![1, M]\!], \quad \mu_i(X) = \nu_i(Y). \tag{2.1}$$

On définit l'ensemble admissible du problème de transport entre μ et ν avec marginales décomposées par (μ_i) et (ν_i) comme l'ensemble des mesures de probabilité γ sur $X \times Y$ s'écrivant comme la somme de M mesures (γ_i) telles que pour tout $i \in [\![1, M]\!]$, γ_i aient pour marginales μ_i et ν_i.

L'objectif de notre démarche est de comprendre à quel point une mesure sur un espace produit est caractérisée par ses "lois marginales décomposées". Le problème est d'étudier la proximité de mesures admissibles pour des problèmes de transport à marginales décomposées communs. Etant donnée une mesure γ de probabilité sur $X \times Y$ ayant pour marginales μ et ν, on donne alors une notion de cohérence entre les familles de décomposition de de chacunes des marginales relativement à γ.

Définition 2.2.0.4. On dit que deux familles (μ_i) et (ν_i) satisfaisant les conditions de la définition 2.2.0.3 sont cohérentes relativement à γ si γ est admissible pour le problème de transport entre μ et ν avec marginales décomposées par (μ_i) et (ν_i), c'est à dire s'il existe une famille (γ_i) telle que :

$$\sum_{i=1}^{M} \gamma_i = \gamma,$$
$$\forall i \in [\![1, M]\!], \quad e_X \sharp \gamma_i = \mu_i, \quad ; \quad e_Y \sharp \gamma_i = \nu_i.$$

Remarque 2.2.0.2

Sous les conditions de ces deux définitions, le théorème de Radon-Nikodym nous permet de caractériser les familles (μ_i) et (ν_i) par leurs densité relativement à μ et ν. On aurait donc pu donner des énoncés équivalents pour des familles de fonctions mesurables à valeurs dans $[0, 1]$ et de somme 1.

Remarque 2.2.0.3

Etant donnés γ une mesure de probabilité sur $X \times Y$ et (μ_i) une famille de décomposition de sa première marginale, l'ensemble des familles (ν_i) de décomposition de sa deuxième marginale est non vide, mais en général pas unique. On peut construire une telle famille en désintégrant $\gamma = \mu \otimes \gamma_x$ selon sa première coordonnée et en définissant :

$$\nu_i := \int \gamma_x \mu_i(dx).$$

Exemple 2.2.0.1.

Si notre domaine D est soit un compact de l'espace euclidien $\mathbb{R}^d$ soit le tore de dimension d, il est naturel de construire des décompositions de la mesure de Lebesgue λ^d (que l'on suppose sans perte de généralité normalisée) de la façon suivante. On choisit une partitions de D $((C_i)_{i \in [\![1,M]\!]})$ et on définit :

$$\mu_i := \lambda^d \llcorner C_i.$$

Il est alors facile de voir que si γ est une mesure de Radon sur $D \times D$ avec pour marginales la mesure de Lebesgue, et si $(\mu_i)_{i\in[\![1,M]\!]}$ et $(\nu_i)_{i\in[\![1,M]\!]}$ sont cohérentes relativement à γ, alors pour tout i :

$$\nu_i = e_2 \sharp \mathbb{1}_{\{x\in C_i\}}\gamma = \int_D \gamma_x \mu_i(dx) = \int_{C_i} \gamma_x dx.$$

où γ_x est défini en désintégrant γ par rapport à la projection sur la première coordonnée. En effet, si on décompose γ en $(\gamma_i)_{i\in[\![1,M]\!]}$ qui satisfont :

$$e_1 \sharp \gamma_i = \mu_i,$$

alors en notant :

$$F_i = \frac{d\gamma_i}{d\gamma},$$

on obtient :

$$0 \leq F_i \leq 1,$$

$$\text{pour } \lambda^d\text{-presque tout } x, \quad \int_D F_i(x,y)\gamma_x(dy) = \mathbb{1}\{x \in C_i\}.$$

Donc nécessairement, pour γ-presque tout (x, y) :

$$F_i(x,y) = \mathbb{1}\{x \in C_i\},$$

ce qui permet de conclure.

On donne une dernière définition afin de donner une notion de "bonne suite de décompositions". *A priori*, cette définition dépend de $\gamma \in \mathcal{P}(X \times Y)$, que l'on suppose donc fixé.

Définition 2.2.0.5. On dira que $((\mu_i^n)_{i\in[\![1,M_n]\!]})_{n\in\mathbb{N}}$ est une bonne suite de décompositions de μ relativement à γ si pour toute suite $((\nu_i^n)_{i\in[\![1,M_n]\!]})_{n\in\mathbb{N}}$ de décompositions de ν telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, (μ_i^n) et (ν_i^n) soient cohérentes relativement à γ, et toute suite $(\delta^n)_{n\in\mathbb{N}}$ de plans telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, δ^n soit admissible pour le problème de transport entre μ et ν avec marginales décomposées par (μ_i^n) et (ν_i^n), alors :

$$\delta_n \to \gamma \text{ étroitement.}$$

On repasse dans le cadre euclidien en prenant $X = Y = D$ un espace compact de $\mathbb{R}^d$ ou le tore de dimension d, et $\mu = \nu = \lambda^d$.
On peut montrer le théorème suivant :

Théorème 2.2.0.1. *Soit $\gamma \in \mathcal{P}(D \times D)$ ayant pour marginales la mesure de Lebesgue. Soit une suite $((\mu_i^n)_{i\in[\![1,M_n]\!]})_{n\in\mathbb{N}}$ de décompositions de λ^d induites comme dans l'exemple 2.2.0.1 par des partitions $((C_i^n)_{i\in[\![1,M_n]\!]})_{n\in\mathbb{N}}$ satisfaisant :*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{i\in[\![1,M_n]\!]} \operatorname{Diam} C_i^n = 0, \tag{2.2}$$

$$\forall n \in \mathbb{R}^n,\ \forall i \in [\![1, M_n]\!], \quad \lambda^d(\bar{C}_i^n \backslash \mathring{C}_i^n) = 0, \tag{2.3}$$

$$\lambda^d(C_i^n) \geq \frac{1}{M} \operatorname{Diam}(C_i^n)^d, \tag{2.4}$$

pour un certain $M > 0$. On suppose de plus que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $i_1, \dots, i_k \in [\![1, M_{n+1}]\!]$ tels que :

$$C_i^n = \bigcup_{j=1}^{k} C_{i_j}^{n+1} \tag{2.5}$$

(on dit que la famille de partitions est emboîtée). Alors $((\mu_i^n)_{i\in[\![1,M_n]\!]})_{n\in\mathbb{N}}$ est une bonne suite de décomposition de λ^d relativement à γ.

Preuve : Premièrement, étudions la famille des $(\gamma_x)_{x\in D}$. Si $\varphi \in C^0(D)$, l'application de D dans $\mathbb{R}$ définit par :

$$F_\varphi : x \mapsto \int_D \varphi(y)\gamma_x(dy)$$

est intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue, donc presque tout x est un point de Lebesgue de F_φ. Mais comme $C^0(D)$ est séparable, presque tout x de D est point de Lebesgue de tous les F_{φ_n} avec $\{\varphi_n\}$ dense dans $C^0(D)$. Il est alors facile de voir qu'en fait, x est point de Lebesgue de tous les F_φ. On dit alors que x est un point de Lebesgue de (γ_x) et on note $x \in \mathrm{Leb}(\gamma_x)$.
D'après l'exemple 2.2.0.1, si $(\mu_i^n)_i$ est induite par une partition, $(\nu_i^n)_n$ est prescrite et vaut :

$$\nu_i^n = \int_{C_i^n} \gamma_x dx.$$

Soit :

$$\bar{x} \in \mathrm{Leb}(\gamma_x)$$

qui est un ensemble de mesure pleine dans D. On choisit alors la suite $(i_n(\bar{x}))$ telle que $\bar{x} \in C^n_{i_n(\bar{x})}$. Montrons que :

$$\frac{\nu^n_{i_n(\bar{x})}}{\lambda^d(C^n_{i_n(\bar{x})})} \to \gamma_{\bar{x}} \text{ étroitement.}$$

Soit $\varphi \in C^0(D)$,

$$\frac{1}{\lambda^d(C^n_{i_n(\bar{x})})} \int \varphi(y)\nu^n_{i_n(\bar{x})}(dy) = \frac{1}{\lambda^d(C^n_{i_n(\bar{x})})} \int_{C^n_{i_n(\bar{x})}} \int_D \varphi(y)\gamma_x(dy)dx.$$

Comme x est un point de Lebesgue de (γ_x), par (2.2) et (2.4) :

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{\lambda^d(C^n_{i_n(\bar{x})})} \int_{C^n_{i_n(\bar{x})}} \int_D \varphi(y)\gamma_x(dy)dx - \int_D \varphi(y)\gamma_{\bar{x}}(dy)\right| \\
&\qquad\le \frac{1}{\lambda^d(C^n_{i_n(\bar{x})})} \int_{C^n_{i_n(\bar{x})}} \left|\int_D \varphi(y)\gamma_x(dy) - \int_D \varphi(y)\gamma_{\bar{x}}(dy)\right| dx \\
&\qquad\le \frac{M}{\mathrm{Diam}(C^n_{i_n(\bar{x})})^d} \int_{B(\bar{x},\mathrm{Diam}(C^n_{i_n(\bar{x})}))} \left|\int_D \varphi(y)\gamma_x(dy) - \int_D \varphi(y)\gamma_{\bar{x}}(dy)\right| dx \\
&\qquad\to 0.
\end{aligned}$$

Ce calcul permet donc de conclure quand à la convergence :

$$\frac{1}{\lambda^d(C^n_{i_n(\bar{x})})} \int \varphi(y)\nu^n_{i_n(\bar{x})}(dy) \to \int_D \varphi(y)\gamma_{\bar{x}}(dy), \tag{2.6}$$

ce qui est exactement le résultat souhaité.
D'autre part, soit (δ^n) une suite de plans telle que pour chaque n, δ^n soit admissible pour le problème de transport entre λ^d et λ^d décomposées par $(\mu_i^n)_i$ et $(\nu_i^n)_i$, et soit δ une valeur d'adhérence de (δ^n) pour la convergence étroite. Comme la famille de partition est emboitée, pour chaque n, δ est admissible pour le problème de transport entre λ^d et λ^d décomposée par $(\mu_i^n)_i$ et $(\nu_i^n)_i$. En effet, si N est fixé dans $\mathbb{N}$, pour tout $n \geq N$, il existe (par réccurence sur n en utilisant (2.5)) $i_1, \dots, i_k \in [\![1, M_n]\!]$ tels que :

$$C_i^N = \bigcup_{j=1}^{k} C_{i_j}^n.$$

Alors :

$$\mu_i^N = \mu_{i_1}^n + \cdots + \mu_{i_k}^n.$$

D'après la forme des ν_i^n, il est alors clair que :

$$\nu_i^N = \nu_{i_1}^n + \cdots + \nu_{i_k}^n.$$

Mais alors :

$$\begin{aligned} e_2 \sharp \mathbb{1}_{\{x \in C_i^N\}} \delta^n &= \sum_{j=1}^{k} e_2 \sharp \mathbb{1}\{x \in C_{i_j}^n\} \delta^n \\ &= \sum_{j=1}^{k} \nu_{i_j}^n = \nu_i^N. \end{aligned}$$

L'admissibilité de δ est alors une conséquence du théorème de portemanteau en utilisant le fait que λ^d ne charge pas la bord de C_i^N par (2.3). Alors pour les mêmes raisons que lorsque l'on travaillait avec γ, presque partout, $\frac{1}{\lambda^d(C_{i_n(\bar{x})})} \nu_{i_n(\bar{x})}^n$ converge étroitement vers $\delta_{\bar{x}}$. Donc presque partout, $\gamma_{\bar{x}} = \delta_{\bar{x}}$ et donc $\gamma = \delta$, ce qui permet de conclure quant à la convergence étroite de (δ^n) vers γ. □

On peut formuler un résultat analogue en remarquant que les grandeurs dont on cherche à établir la convergence sont des martingales.

Théorème 2.2.0.2. *Soit toujours $\gamma \in \mathcal{P}(D \times D)$ ayant pour marginales la mesure de Lebesgue et soit toujours $((\mu_i^n)_{i \in [\![1, M_n]\!]})_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de décompositions de λ^d associée à une suite $((C_i^n)_{i \in [\![1, M_n]\!]})_{n \in \mathbb{N}}$ emboîtée de partitions finies de D. Cette fois, on garde l'hypothèse (2.3) et on fait simplement l'hypothèse supplémentaire que $((C_i^n)_{i \in [\![1, M_n]\!]})_{n \in \mathbb{N}}$ engendre la tribu borélienne de D. Alors $((\mu_i^n)_{i \in [\![1, M_n]\!]})_{n \in \mathbb{N}}$ est une bonne suite de décomposition de λ^d relativement à γ.*

Preuve : On note $\mathcal{B}_n$ la tribu engendrée par $(C_i^n)_{i \in [\![1, M_n]\!]}$.
De la même façon que pour le théorème précédent, grâce à (2.3), si une suite (δ^n) est telle que pour chaque n, δ_n soit admissible pour le problème de transport de λ^d à λ^d décomposées par (μ_i^n) et (ν_i^n), et si δ est une limite étroite de (δ^n), alors δ est également admissible pour le problème de transport de λ^d à λ^d décomposées pas (μ_i^n) et (ν_i^n). Il suffit donc de montrer qu'il n'existe qu'une

seule telle mesure dans $\mathcal{P}(D \times D)$. Mais si on prend $\varphi \in C^0(D)$, on a alors pour tout n :

$$\mathbb{E}\left[\int_D \varphi(y)\gamma_x(dy)\middle|\mathcal{B}_n\right] = \mathbb{E}\left[\int_D \varphi(y)\delta_x(dy)\middle|\mathcal{B}_n\right],$$

et les théorèmes classiques de convergence des martingales permettent de conclure.

□

2.3 Description du problème

Maintenant que l'on sait décomposer des marginales, on peut décrire ce que l'on entend par "approcher un flot généralisé par des solutions des équations des flots mutliphasiques". Si γ est une configuration d'un fluide sur un domaine compact D de $\mathbb{R}^d$ ou le tore de dimension d, et si $(\rho_{i,0})_i$ et $(\rho_{i,T})_i$ sont des décompositions de la mesure de Lebesgue cohérentes relativement à γ, on peut s'interroger sur les liens entre solution généralisé de l'équation d'Euler entre l'identité et γ et solution des equations des flots multiphasiques joignant $(\rho_{i,0})_i$ à $(\rho_{i,T})_i$.
On peut naturellement comparer leurs actions mais on peut aller plus loin : à une famille solution des équations des flots multiphasiques, on peut associer un flot généralisé incompressible. En effet, si (ρ_i, v_i) est solution des équations des flots multiphasiques, par un analogue direct de ce qui est fait dans la construction réciproque de la preuve du théorème 1.4.2.1, on peut associer à chaque couple (ρ_i, v_i) une mesure η_i sur $\Omega(D)$ tel que :

$$\begin{gathered} e_t \sharp \eta_i = \rho_i(t,\cdot), \\ \eta_i - \text{presque tout } \omega \in \Omega(D) \text{ est dans } AC^2(0,T) \text{ et } \dot{\omega} = v_i(t,\omega), \\ \mathcal{A}(\eta_i) \le \mathcal{A}(\rho_i, v_i). \end{gathered}$$

On appelle ces η_i des **représentants** de (ρ_i, v_i). Si on définit :

$$\eta := \sum_{i=1}^{M} \eta_i,$$

η est un flot généralisé incompressible.
Réciproquement, on vera dans la preuve du théorème 2.4.1.1 que le lemme 1.4.2.1 permet d'associer à un flot généralisé incompressible et à des familles de décomposition de λ^d cohérentes relativement à la configuration finale de ce flot une famille de couples admissible pour le problème des flots multiphasique joignant ces deux décompositions.

2.4 Résultats de type Γ-convergence

2.4.1 Discrétisation et réduction de l'action

On montre ici qu'en discrétisant le problème comme expliqué au 2.3, l'action optimale est plus petite que celle des solutions de l'équation d'Euler entre Id et γ. Ceci se comprend très bien puisque les équations des flots multiphasiques ne prescrivent pas la position finales des particules comme le fait γ, elles ne prescrivent que des sortes de lois marginales partielles, qui sont beaucoup plus souples.

Théorème 2.4.1.1. *Soit γ une configuration d'un fluide sur un domaine compact $D \subset \mathbb{R}^d$ et η un flot généralisé incompressible joignant l'identité à γ. Soient $(\rho_{i,0})_{i \in [\![1,M]\!]}$ et $(\rho_{i,T})_{i \in [\![1,M]\!]}$ des familles de décomposition de λ^d cohérentes relativement à γ. Si $(\rho_i, v_i)_i$ est solution des équations des flots multiphasiques entre $(\rho_{i,0})_i$ et $(\rho_{i,T})_i$:*

$$\sum_{i=1}^{M} \mathcal{A}(\rho_i, v_i) \leq \mathcal{A}(\eta).$$

Preuve : Si l'action de η est infinie, il n'y a rien à montrer. Sinon, soit $(\gamma_i)_i$ telle que :

$$\gamma = \sum_{i=1}^{M} \gamma_i,$$
$$\forall i \in [\![1, M]\!], \quad e_1 \sharp \gamma_i = \rho_{i,0} \quad ; \quad e_2 \sharp \gamma_i = \rho_{i,T}.$$

Pour chaque i, on définit également F_i les densité de γ_i par rapport à γ :

$$\gamma_i(dx, dy) = F_i(x, y)\gamma(dx, dy).$$

On définit alors η_i par la formule :

$$\eta_i(d\omega) := F_i\big(\omega(0), \omega(T)\big)\eta(d\omega).$$

On a alors :

$$\sum_{i=1}^{M} \eta_i = \eta,$$
$$e_0 \sharp \eta_i = \rho_{i,0} \quad ; \quad e_T \sharp \eta_i = \rho_{i,T},$$
$$\mathcal{A}(\eta_i) < \infty,$$

donc d'après le lemme 1.4.2.1, si on définit $\rho_i(t, \cdot) =: e_t \sharp \eta_i$ et v_i la vitesse macroscopique de η_i, on a au sens des distributions :

$$\partial_t \rho_i + \operatorname{div}(\rho_i v_i) = 0,$$

et :

$$\mathcal{A}(\rho_i, v_i) \leq \mathcal{A}(\eta_i).$$

Mais comme η est incompressible, et que η_i a les bonnes marginales, $(\rho_i, v_i)_i$ est admissible pour le problème des flots multiphasiques entre $(\rho_{i,0})_i$ et $(\rho_{i,T})_i$, ce qui donne le résultat. □

2.4.2 Bonne suite de décompositions et approximation du flot

On va maintenant montrer qu'en choisissant correctement des familles de conditions initiales et finales, on peut construire des solutions généralisées à l'équation d'Euler joignant l'identité à γ comme limite de solutions aux équations des flots multiphasiques. On se place toujours sur un domaine D compact de $\mathbb{R}^d$.

Théorème 2.4.2.1. *Soient $((\rho^n_{i,0})_{i\in[\![1M_n]\!]})_{n\in\mathbb{N}}$ et $((\rho^n_{i,T})_{i\in[\![1M_n]\!]})_{n\in\mathbb{N}}$ des suites de décompositions de λ^d cohérentes relativement à γ, avec $((\rho^n_{i,0})_i)_n$ une bonne suite de décomposition de λ^d relativement à γ. Pour chaque $n\in\mathbb{N}$, on choisit $(\rho^n_i, v^n_i)_i$ une famille de couples solutions des équations des flots multiphasiques entre $(\rho^n_{i,0})_i$ et $(\rho^n_{i,T})_i$ et $(\eta^n_i)_i$ une famille de représentants de $(\rho^n_i, v^n_i)_i$. On note $(\eta^n)_n$ la suite de flots généralisés incompressibles associés à ces familles :*

$$\eta^n := \sum_{i=1}^{M_n} \eta^n_i.$$

Alors $(\eta^n)_n$ est tendue et toute valeur d'adhérence η de $(\eta^n)_n$ pour la convergence étroite est solution généralisée de l'équation d'Euler entre l'identité et γ.

Preuve : D'après le théorème 2.4.1.1,

$$\mathcal{A}(\eta^n) = \sum_{i=1}^{M_n} \mathcal{A}(\rho^n_i, v^n_i)$$

est uniformément bornée par l'action de n'importe quel flot généralisé incompressible joignant l'identité à γ. On peut donc utiliser le théorème 1.2.3.1 pour déduire la tension de $(\eta^n)_n$. On obtient de plus par semi-continuité inférieure de l'action que pour tout flot généralisé incompressible $\tilde{\eta}$ entre l'identité et γ :

$$\mathcal{A}(\eta) \leq \mathcal{A}(\tilde{\eta}).$$

Donc si on montre que η joint l'identité à γ, on aura prouvé que η est solution généralisée de l'équation d'Euler entre l'identité et γ. Mais pour chaque n, $(e_0, e_T)\,\sharp\,\eta^n$ est admissible pour le problème de transport entre λ^d et λ^d décomposées par $(\rho^n_{i,0})_i$ et $(\rho^n_{i,T})$ qui sont cohérentes relativement à γ. Comme $((\rho^n_{i,0})_i)_n$ est une bonne suite de décomposition de λ^d remativement à γ, $(e_0, e_T)\,\sharp\,\eta^n$ converge étroitement vers γ. Mais la continuité de (e_0, e_T) assure également que $(e_0, e_T)\,\sharp\,\eta^n$ converge étroitement vers $(e_0, e_T)\,\sharp\,\eta$, ce qui donne le résultat.

□

Chapitre 3

Equation des flots multiphasiques avec bruit

3.1 Introduction

Dans [5], Brenier étudie les équations dites des flots multiphasiques : il considère un nombre fini $M > 1$ de "phases" de liquide dans un domaine $D \subset \mathbb{R}^d$. Il suppose ces phases suffisamment mélangées pour que la densité de chaque phase soit strictement positive en chaque point. Ces phases sont représentées par leurs champs scalaires de densité $(\rho_i)_{i=1,\ldots,M}$ et leurs champs vectoriels de vitesse $(v_i)_{i=1,\ldots,M}$ que l'on suppose solutions des équations suivantes :

$$\sum_{i=1}^{M} \rho_i \equiv 1,$$
$$\partial_t \rho_i + \operatorname{div}(\rho_i v_i) = 0,$$
$$\partial_t v_i + (v_i \cdot \nabla) v_i = -\nabla p,$$

où p, la pression, est un champs scalaire prescrit par les équations (l'hypothèse importante est que toutes les phases ont la même pression). L'article consiste à construire des solutions de ces équations comme minimiseurs de la fonctionnelle :

$$\sum_{i=1}^{M} \mathcal{A}(\rho_i, v_i) = \sum_{i=1}^{M} \frac{1}{2} \int_Q |v_i|^2 \rho_i$$

parmis les M-uplet $(\rho_i, v_i)_i$ tels que les ρ_i soient déterminés à l'instant initial et à l'instant final, et qu'ils soient transportés par les champs de vitesse v_i par :

$$\partial_t \rho_i + \operatorname{div}(\rho_i v_i) = 0.$$

Brenier étudie ensuite la régularité de telles solutions, leur unicité et leur stabilité sous l'hypothèse d'une minoration uniforme des ρ_i, c'est à dire sous l'hypothèse qu'il existe $r > 0$ tel que pour tout i et presque tout t et x :

$$\rho_i(t,x) \geq r.$$

Ici, on va reprendre sa démarche en ajoutant aux équations un bruit. On prend toujours M phases de fluide se déplaçant dans un domaine D de l'espace (en fait on choisira toujours $D = \mathbb{T}^d$), mais on cherche cette fois des solutions des équations que l'on appellera multiphasiques avec bruit :

$$\sum_{i=1}^{M} \rho_i \equiv 1, \tag{3.1}$$

$$\partial_t \rho_i + \operatorname{div}(\rho_i v_i) + \nu \Delta \rho_i = 0, \tag{3.2}$$

$$\partial_t v_i + (v_i \cdot \nabla) v_i - \nu \boldsymbol{\Delta} v_i = -\nabla p. \tag{3.3}$$

Cette dernière équation apparait naturellement lorsque l'on minimise l'action :

$$\sum_{i=1}^{M} \mathcal{A}(\rho_i, v_i) = \sum_{i=1}^{M} \frac{1}{2} \int_Q |v_i|^2 \rho_i$$

parmis les M-uplet $(\rho_i, v_i)_i$ tels que les ρ_i soient déterminés à l'instant initial et à l'instant final, et qu'ils soient transportés par les champs de vitesse v_i par :

$$\partial_t \rho_i + \operatorname{div}(\rho_i v_i) + \nu \Delta \rho_i = 0.$$

Remarque 3.1.0.1

A vrai dire, l'équation qui apparaît est :

$$\partial_t v_i + \frac{1}{2} \nabla |v_i|^2 - \nu \nabla \operatorname{div} v_i = -\nabla p,$$

mais cette dernière coïncide avec (3.3) dès lors que v_i est un gradient, ce qui est automatiquement le cas lorsque l'on construit des solutions en minimisant l'action, comme on le verra plus tard.

Dans ce cadre, il est plus difficile de savoir quels sont les conditions initiales et finales atteignables, c'est à dire pour quels ρ_i^0 et ρ_i^T il existe un champs de vitesse v_i et un champs scalaire ρ_i tels que $\partial_t \rho_i + \operatorname{div}(\rho_i v_i) + \nu \Delta \rho_i = 0$ soit vérifié, $\rho_i|_{t=0} = \rho_i^0$ et $\rho_i|_{t=T} = \rho_i^T$, et :

$$\frac{1}{2} \int_Q |v_i|^2 \rho_i < \infty.$$

On ne se posera pas la question ici et on ne considèrera que des conditions initiales et finales que l'on aura supposées atteignables.

3.2 Recherche de solutions comme minimiseurs d'un problème variationnel

3.2.1 Minimisation de l'action avec contraintes

On voit les solutions comme minimiseurs d'un problème variationnel avec contraintes. Etant données des conditions initiales et des conditions finales $(\rho_i^0)_i$ et $(\rho_i^T)_i$ mesurables et positives satisfaisant :

$$\sum_{i=1}^{M} \rho_i^0 = \sum_{i=1}^{M} \rho_i^T \equiv 1,$$

notre objectif dans un premier temps est de trouver un M-uplet de couples (ρ_i, v_i) de fonctions L^1_{loc} sur $Q := [0,T] \times \mathbb{T}^d$ ($\rho_i \geq 0$, v_i à valeurs vectorielles) qui minimisent la fonctionnelle :

$$\sum_{i=1}^{M} \mathcal{A}(\rho_i, v_i) := \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{M} \int_Q |v_i|^2 \rho_i$$

parmis les M-uplet vérifiant :

$$\sum_{i=1}^{M} \rho_i \equiv 1, \tag{3.4}$$

$$\forall i, \quad \partial_t \rho_i + \operatorname{div}(\rho_i v_i) + \nu \Delta \rho_i = 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(]0,T[\times \mathbb{T}^d), \tag{3.5}$$

$$\forall i, \quad \rho_i|_{t=0} = \rho_i^0 \quad \text{et} \quad \rho_i|_{t=T} = \rho_i^T. \tag{3.6}$$

Remarque 3.2.1.1

- (3.4) *associé au fait que les ρ_i sont pris positifs implique qu'ils sont L^∞, donc $\rho_i v_i$ est bien une distribution et* (3.5) *a bien un sens.*
- (3.4) *et* (3.5) *impliquent que dès que le couple (ρ_i, v_i)* ***a une action finie****, on peut supposer quitte à choisir le bon représentant :*

$$\rho \in C^{\frac{1}{2}}(]0,T[, H^{-2}(\mathbb{T}^d)).$$

Les termes de bords (3.6) *ont alors un sens.*

L'argument principal de cette première étape est de voir $\mathcal{A}$ comme une fonctionnelle convexe et semi-continue inférieurement. Tout d'abord, étendons le domaine de $\mathcal{A}$ de la façon suivante :

$$\begin{array}{llll} \tilde{\mathcal{A}}: & \mathcal{M}(Q) \times \overrightarrow{\mathcal{M}}(Q) & \to & \mathbb{R} \\ & (\rho, m) & \mapsto & \begin{cases} \frac{1}{2} \int_Q |v|^2 \rho & \text{si } \rho \geq 0,\ m \ll \rho \text{ et } v := \frac{dm}{d\rho} \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}, \end{array}$$

où $\mathcal{M}(Q)$ désigne l'ensemble des mesures de Radon sur Q et $\overrightarrow{\mathcal{M}(Q)}$ désigne les mesures de Radon à valeur vectorielle sur Q. Il est clair que lorsque $\mathcal{A}$ est défini :

$$\mathcal{A}(\rho, v) = \tilde{\mathcal{A}}(\rho dtdx, v\rho dtdx)$$

de sorte qu'à partir de maintenant, on ne différenciera plus $\mathcal{A}$ et $\tilde{\mathcal{A}}$ et ρ pourra selon la situation désigner une fonction ou une mesure.
Il est en fait naturel de travailler dans ce cadre (les mesures plutôt que le fonctions) car on a une proposition :

Proposition 3.2.1.1. *Pour tout* $(\rho, m) \in \mathcal{M}(Q) \times \overrightarrow{\mathcal{M}}(Q)$ *:*

$$\mathcal{A}(\rho, m) = \sup \int_Q \varphi\rho + \vec{\psi} \cdot m$$

où le sup est pris sur l'ensemble des fonctions $\varphi \in C^0(Q, \mathbb{R})$ *et* $\vec{\psi} \in C^0(Q, \mathbb{R}^d)$ *qui vérifient l'inégalité :*

$$\forall (t,x) \in Q, \quad \varphi(t,x) + \frac{1}{2}|\vec{\psi}(t,x)|^2 \leq 0.$$

Les mesures sont donc en quelque sorte l'espace avec la topologie la plus faible qui fasse de $\mathcal{A}$ une fonctionnelle convexe et semi-continue inférieurement. On verra en plus par la suite que les minimiseurs que l'on obtient sous contraintes (contraintes qui d'ailleurs sont encore bien définiees dans le cadre des mesures) sont des fonctions, donc l'extention n'a pas de conséquence significative quant aux solutions qu'lle fournit. Le dernier avantage (le vrai avantage en fait) à utiliser ce cadre plus vaste est de se placer dans le dual de fonctions lisses. On verra par la suite que ceci nous permettra d'interpréter ce problème comme un problème dual et ainsi d'avoir un résultat d'existence presque gratuitement.

Preuve : *Si* $m = v\rho$ *avec* $\rho \geq 0$

Soient $\varphi \in C^0(Q, \mathbb{R})$ et $\vec{\psi} \in C^0(Q, \mathbb{R}^d)$ qui vérifient l'inégalité :

$$\forall (t,x) \in Q, \quad \varphi(t,x) + \frac{1}{2}|\vec{\psi}(t,x)|^2 \leq 0.$$

Alors :

$$\begin{aligned}\int_Q \varphi\rho + \vec{\psi} \cdot m &\leq \int_Q \left[-\frac{1}{2}|\vec{\psi}|^2 + \vec{\psi} \cdot v \right] \rho \\ &= \frac{1}{2} \int_Q \left[|v|^2 - |v - \vec{\psi}|^2 \right] \rho \leq \frac{1}{2} \int_Q |v|^2 \rho.\end{aligned}$$

On obtient alors le résultat annoncé en régularisant $\varphi(t,x) := -\frac{1}{2}|v(t,x)|^2$ et $\vec{\psi}(t,x) := v(t,x)$.

Si on n'a pas $\rho \geq 0$

Il existe alors φ continue et négative sur Q telle que :

$$\int_Q \varphi\rho > 0.$$

On a alors le résultat en considérant la suite $\varphi_n := n\varphi$ et $\vec{\psi}_n := 0$.

Si on n'a pas $m \ll \rho$

On peut alors trouver pour chaque n un $\vec{\psi}_n \in C^0(Q, \mathbb{R}^d)$ tel que :

$$\int_Q \vec{\psi}_n \cdot m \geq n,$$
$$\int_Q -\frac{1}{2}|\vec{\psi}_n|^2 \rho \leq 1,$$

ce qui donne aisément le résultat. □

Les contraintes (3.4) et (3.5) se réécrivent naturellement pour les M-uplets de couples de mesures $(\rho_i, m_i)_i$:

$$\sum_{i=1}^{M} \rho_i = dtdx, \tag{3.7}$$

$$\forall i, \quad \partial_t \rho_i + \operatorname{div}(m_i) + \nu \Delta \rho_i = 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(]0,T[\times \mathbb{T}^d), \tag{3.8}$$

$$\forall i, \quad \rho_i|_{t=0} = \rho_i^0 \quad \text{et} \quad \rho_i|_{t=T} = \rho_i^T, \tag{3.9}$$

(3.9) ayant toujours un sens **pour les couples d'action finie**.
Supposons l'existence d'un M-uplet $((\bar{\rho}_i, \bar{m}_i))_i$ admissible (admissible signifie ici que le M-uplet satisfait les contraintes (3.7) (3.8) (3.9) et a une action finie). Alors pour tout M-uplet $(\rho_i, m_i)_i$ d'action finie, le fait de satisfaire (3.7), (3.8) et (3.9) est équivalent à ce que :

$$\forall p \in C^0(Q), (\phi_i) \in (C^2(Q))^M,$$
$$\sum_{i=1}^{M} \int_Q [\partial_t \phi_i + p - \nu \Delta \phi_i] (\rho_i - \bar{\rho}_i) + \int_Q \nabla \phi_i \cdot (m_i - \bar{m}_i) = 0. \tag{3.10}$$

Cette contrainte est donc affine (donc convexe) et fermée pour la topologie de la convergence étroite. Il est donc naturel de poser la fonction convexe et semi-continue inférieurement lui correspondant (la fonction indicatrice associée à la contrainte en fait) :

$$\begin{array}{rccl} \mathcal{C}: & \left(\mathcal{M}(Q) \times \overrightarrow{\mathcal{M}}(Q)\right)^M & \to & \mathbb{R} \\ & (\rho_i, m_i)_i & \mapsto & \begin{cases} 0 & \text{si (3.10) est satisfaite,} \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases} \end{array}$$

Et en fait, étant donné la forme de la contrainte, il est facile de voir que :

$$\mathcal{C}((\rho_i, m_i)_i) = \sup \sum_{i=1}^{M} \int_Q [\partial_t \phi_i + p - \nu \Delta \phi_i] (\rho_i - \bar{\rho}_i) + \int_Q \nabla \phi_i \cdot (m_i - \bar{m}_i),$$

où le sup est pris sur l'ensemble des fonctions p continues et ϕ_i de régularité C^2.

3.2.2 Résolution du problème dual

Notre problème s'est donc ramené à celui de la minimisation dans

$$\left(\mathcal{M}(Q) \times \overrightarrow{\mathcal{M}}(Q)\right)^M = \left[\left(C^0(Q,\mathbb{R}) \times C^0(Q,\mathbb{R}^d)\right)^M\right]^*$$

de la fonctionnelle :

$$\left[\sum_{i=1}^{M} \mathcal{A}(\rho_i, m_i)\right] + \mathcal{C}((\rho_i, m_i)_i). \tag{3.11}$$

Or on remarque que cette fonctionnelle est exactement $A^* + C^*$ où A et C sont des fonctionnelles convexes sur $\left(C^0(Q,\mathbb{R}) \times C^0(Q,\mathbb{R}^d)\right)^M$ valant respectivement :

$$A((a_i,b_i)_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } \forall i,\ a_i + \frac{1}{2}|b_i|^2 \leq 0 \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

et

$$C((a_i,b_i)_i) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{M} \int_Q a_i \bar{\rho}_i + \int_Q b_i \cdot \bar{m}_i & \text{si } (a_i,b_i)_i \in E \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

où

$$E := \{(\partial_t \phi_i + p - \nu\Delta\phi_i, \nabla\phi_i)_i,\ (\phi_i) \in (C^2(Q))^M,\ p \in C^0(Q)\}.$$

De plus, si on choisit pour chaque i, $a_i = -1$ et $b_i = 0$, alors A est continue et C est fini en $(a_i,b_i)_i$.
On peut donc utiliser le théorème de Fenchel-Rockafellar exposé au chapitre 1 de [6] et affirmer que :

- L'infimum dans (3.11) est atteint pour un certain M-uplet $(\rho_i^{opt}, m_i^{opt})_i$.
-

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{M} \mathcal{A}(\rho_i^{opt}, m_i^{opt}) &= \min_{\left(\mathcal{M}(Q)\times\overrightarrow{\mathcal{M}}(Q)\right)^M} A^*(\rho_i,m_i)_i + C^*((\rho_i,m_i)i) \\ &= \sup_{(C^0(Q,\mathbb{R})\times C^0(Q,\mathbb{R}^d))^M} -A((a_i,b_i)_i) - C((-a_i,-b_i)_i) \\ &= \sup_F \int_Q a_i\bar{\rho}_i + \int_Q b_i \cdot \bar{m}_i = \sup_F \int_Q a_i \rho_i^{opt} + \int_Q b_i \cdot m_i^{opt}\end{aligned}$$

où :

$$F := \{(\partial_t\phi_i + p - \nu\Delta\phi_i, \nabla\phi_i)_i,\ \phi_i \in C^2(Q),\ p \in C^0(Q) \\ \text{et } \partial_t\phi_i + p - \nu\Delta\phi_i + \frac{1}{2}|\nabla\phi_i|^2 \leq 0\}.$$

On a donc trouvé un M-uplet $(\rho_i^{opt}, m_i^{opt})_i$ (que l'on notera par la suite $(\rho_i, m_i)_i$) qui en tant que minimiseur de $\mathcal{A}$ dans l'ensemble des mesures est un bon candidat pour résoudre notre problème. Il satisfait la propriété suivante :

Propriété 3.2.2.1. Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $(\phi_i^\epsilon)_i \in C^2(Q)^M$ et $p^\epsilon \in C^0(Q)$ tels que :

$$\partial_t \phi_i^\epsilon + p^\epsilon - \nu\Delta\phi_i^\epsilon + \frac{1}{2}|\nabla\phi_i^\epsilon|^2 \leq 0, \tag{3.12}$$

$$\sum_{i=1}^{M} \int_Q [\partial_t\phi_i^\epsilon + p^\epsilon - \nu\Delta\phi_i^\epsilon]\rho_i + \int_Q \nabla\phi_i^\epsilon \cdot m_i \geq \sum_{i=1}^{M} \mathcal{A}(\rho_i, m_i) - \epsilon,$$

et cette dernière inégalité se réécrit :

$$\boxed{\sum_{i=1}^{M} \frac{1}{2}\int_Q |v_i - \nabla\phi_i^\epsilon|^2\rho_i + \int_Q |\partial_t\phi_i^\epsilon + p^\epsilon + \frac{1}{2}|\nabla\phi_i^\epsilon|^2 - \nu\Delta\phi_i^\epsilon|\rho_i \leq \epsilon} \tag{3.13}$$

On dit alors que la famille de couples $(\rho_i, v_i)_i$ est une **solution variationnelle des équations des flots multiphasiques avec bruit** ν.

Remarque 3.2.2.1

En notant :

$$f(t) := \int_{\mathbb{T}^d} p^\epsilon(t, \cdot)$$

et quitte à remplacer p^ϵ par $p^\epsilon - f(t)$ et ϕ_i^ϵ par $\phi_i^\epsilon + \int_0^t f(s)ds$, on peut supposer que les intégrales spatiales des p_ϵ sont nulles.

Notre objectif est désormais de montrer que le M-uplet $(\rho_i, m_i)_i$ satisfait les équations souhaitées. Pour cela, on va commencer par chercher de la compacité sur les multiplicateurs de Lagranges approchés p^ϵ et ϕ_i^ϵ, et ce en les évaluant sur des flots modifiés.

3.2.3 Régularité Sobolev de la racine des densités

Proposition 3.2.3.1. *Soient ρ et v deux fonctions L^1_{loc} sur $]0, T[\times\mathbb{T}^d$ respectivement à valeurs dans $[0, 1]$ et $\mathbb{R}^d$ vérifiant :*

$$\partial_t\rho + \operatorname{div}(v\rho) + \nu\Delta\rho = 0 \textit{ au sens des distributions,}$$
$$\mathcal{A}(\rho, v) < \infty.$$

Alors $\sqrt{\rho} \in L^2([0, T], H^1(\mathbb{T}^d))$ et :

$$\boxed{2\nu \int_Q |\nabla\sqrt{\rho}|^2 \leq \frac{1}{e} + \frac{1}{\nu}\mathcal{A}(\rho, v)).} \tag{3.14}$$

Si de plus, il existe $r > 0$ tel que $\rho \geq r$, alors :

$$\nabla\sqrt{\rho} = \frac{1}{2}\frac{\nabla\rho}{\sqrt{\rho}} \tag{3.15}$$

et on peut substituer le membre de gauche par celui de droite dans (3.14).

Preuve : Si ρ et v sont lisse et si ρ est strictement positif, on a :

$$\begin{aligned}
\partial_t \int_{\mathbb{T}^d} \rho \log \rho &= \int_{\mathbb{T}^d} \partial_t \rho (1+\log \rho) \\
&= -\int_{\mathbb{T}^d} (\mathrm{div}(\rho v) + \nu \Delta \rho)(1+\log\rho) \\
&= \int_{\mathbb{T}^d} (\rho v + \nu \nabla \rho) \cdot \frac{\nabla \rho}{\rho} \\
&= \int_{\mathbb{T}^d} 2\sqrt{\rho} v \cdot \frac{1}{2}\frac{\nabla\rho}{\sqrt{\rho}} + 4\nu \int_{\mathbb{T}^d} \left|\frac{1}{2}\frac{\nabla \rho}{\sqrt{\rho}}\right|^2 \\
&= 2\int_{\mathbb{T}^d} \frac{1}{\sqrt{2\nu}} \sqrt{\rho} v \cdot \sqrt{2\nu} \nabla \sqrt{\rho} + 4\nu \int_{\mathbb{T}^d} |\nabla\sqrt{\rho}|^2 \\
&\geq -\frac{1}{2\nu}\int_{\mathbb{T}^d} |v|^2 \rho - 2\nu \int_{\mathbb{T}^d} |\nabla \sqrt{\rho}|^2 + 4\nu \int_{\mathbb{T}^d} |\nabla\sqrt{\rho}|^2,
\end{aligned}$$

c'est à dire :

$$2\nu \int_{\mathbb{T}^d} |\nabla\sqrt{\rho}|^2 \leq \frac{1}{2\nu}\int_{\mathbb{T}^d} |v|^2\rho + \partial_t \int_{\mathbb{T}^d} \rho\log\rho.$$

En intégrant entre 0 et T, on obtient donc en tenant compte du fait que $-\frac{1}{e} \leq \rho \log \rho \leq 0$ car ρ est à valeur dans $[0, 1]$:

$$\begin{aligned}
2\nu \int_Q |\nabla\sqrt{\rho}|^2 &\leq \frac{1}{\nu}\mathcal{A}(\rho, v) + \left[\int_{\mathbb{T}^d} \rho \log\rho\right]_0^T \\
&\leq \frac{1}{\nu}\mathcal{A}(\rho, v) + \frac{1}{e},
\end{aligned}$$

ce qui donne (3.14) dans le cas lisse.
Si (ρ, v) n'est plus lisse, en considérant $\tau_\epsilon = \frac{1}{\epsilon^d}\tau(\frac{\cdot}{\epsilon})$ une approximation de l'unité **partout strictement positive** et paire, on définit :

$$\begin{aligned}
\rho_\epsilon &:= \rho * \tau_\epsilon, \\
v_\epsilon &:= \frac{(\rho v) * \tau_\epsilon}{\rho * \tau_\epsilon},
\end{aligned}$$

qui est bien licite car τ étant strictement positif partout, et la masse étant conservée, ρ_ϵ est minoré par un réel strictement positif sur $[0, T] \times \mathbb{T}^d$. On a alors :

$$\partial_t \rho_\epsilon + \mathrm{div}(\rho_\epsilon v_\epsilon) + \nu \Delta \rho_\epsilon = 0.$$

On a donc d'après ce qui a été fait au dessus :

$$2\nu \int_Q |\nabla \sqrt{\rho_\epsilon}|^2 \leq \frac{1}{\nu}\mathcal{A}(\rho_\epsilon, v_\epsilon) + \frac{1}{e}. \tag{3.16}$$

Or si $\varphi \in C^0(Q)$ et $\vec{\psi} \in C^0(Q, \mathbb{R}^d)$ sont tels que ponctuellement :

$$\varphi + \frac{1}{2}|\vec{\psi}|^2 \leq 0,$$

alors on a aussi par l'inégalité de Jensen :

$$\varphi * \tau_\epsilon + \frac{1}{2}|\vec{\psi} * \tau_\epsilon|^2 \leq \varphi * \tau_\epsilon + \frac{1}{2}|\vec{\psi}|^2 * \tau_\epsilon \leq 0.$$

En conséquence :

$$\int_Q [\varphi + \vec{\psi} \cdot v^\epsilon]\rho^\epsilon = \int \varphi * \tau_\epsilon \rho + \vec{\psi} * \tau_\epsilon \cdot m$$
$$\leq \mathcal{A}(\rho, v).$$

En passant au sup sur $(\phi, \vec{\psi})$, on obtient :

$$\mathcal{A}(\rho_\epsilon, v_\epsilon) \leq \mathcal{A}(\rho, v).$$

Mais alors en particulier, d'après 3.16, $(\sqrt{\rho^\epsilon})_\epsilon$ est borné dans $L^2([0,T], H^1(\mathbb{T}^d))$. Mais comme on a la convergence de $\sqrt{\rho_\epsilon}$ vers $\sqrt{\rho}$ presque partout, on l'a aussi dans $L^2([0,T], H^1(\mathbb{T}^d))$ faible. En particulier, en reprenant (3.16) :

$$\begin{aligned} 2\nu \int_Q |\nabla\sqrt{\rho}|^2 &\leq \liminf_{\epsilon\to 0} 2\nu \int_Q |\nabla\sqrt{\rho_\epsilon}|^2 \\ &\leq \liminf_{\epsilon\to 0} \frac{1}{\nu}\mathcal{A}(\rho_\epsilon, v_\epsilon) + \frac{1}{e} \\ &\leq \frac{1}{\nu}\mathcal{A}(\rho, v) + \frac{1}{e} \end{aligned}$$

ce qui donne le résultat.
(3.15) découle aisément du fait général suivant : si $\sqrt{\rho} \in H^1(\mathbb{T}^d)$, alors il existe $q > 1$ tel que $\rho \in W^{1,q}(\mathbb{T}^d)$ et :

$$\nabla\rho = 2\sqrt{\rho}\,\nabla\sqrt{\rho}.$$

En effet, en notant :

$$\rho_\epsilon := (\sqrt{\rho} * \tau_\epsilon)^2,$$

et en remarquant que $H^1(\mathbb{T}^d)$ s'injecte de façon continue dans $L^p(\mathbb{T}^d)$ pour un certain $p > 2$, on a :

$$\int |\rho_\epsilon|^{\frac{p}{2}} = \int |\sqrt{\rho} * \tau_\epsilon|^p \leq \|\sqrt{\rho}\|_{L^p}.$$

La convergence presque partout de ρ_ϵ vers ρ permet de conclure quand à la convergence de ρ_ϵ vers ρ dans $L^{\frac{p}{2}}$ faible, et donc au sens des distribution. Or :

$$\nabla\rho_\epsilon = 2\sqrt{\rho} * \tau_\epsilon\,(\nabla\sqrt{\rho}) * \tau_\epsilon \to 2\sqrt{\rho}\,\nabla\sqrt{\rho}$$

dans $L^q(\mathbb{T}^d)$ avec :

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{2}.$$

On a donc le résultat. □

3.3 Outils : transport de mesures par des difféomorphismes

Ce paragraphe peut être vu comme une digression au sens où il relève d'une théorie à part interessante en soit dont on ne retiendra que des résultats faciles qui nous seront utiles pour la suite. [7] est un exposé plus détaillé de ce sujet. On étudie le système :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \det(\partial_x \gamma(t,x)) & = & 1 + f(t,x) \quad \text{dans } [0,T] \times \mathbb{T}^d \\ \gamma(0,\cdot) & = & Id_{\mathbb{T}^d} \\ \gamma(T,\cdot) & = & Id_{\mathbb{T}^d} \end{array} \right. \tag{3.17}$$

où f est une fonction admettant une certaine régularité hölderienne (on lui demandra typiquement d'être $W^{1,\infty}([0,T], C^{k,\alpha}(\mathbb{T}^d))$ pour un certain $k \in \mathbb{N}$ et un $0 < \alpha < 1$, et à support compact dans $]0,T[\times \mathbb{T}^d$), et vérifiant la condition de compatibilité :

$$\forall t \in [0,T], \quad \int_{\mathbb{T}^d} f(t,x)dx = 0. \tag{3.18}$$

Le théorème que l'on va démontrer est le suivant :

Théorème 3.3.0.1. *Soient $k \in \mathbb{N}$ et $0 < \alpha < 1$.*
Il existe $\epsilon > 0$ et $K > 0$ ne dépendant que de d, de k et de α tels que pour tout $f \in W^{1,\infty}([0,T], C^{k,\alpha}(\mathbb{T}^d))$ vérifiant (3.18), à support compact en temps et telle que pour chaque t, $\|f(t,\cdot)\|_{k,\alpha} < \epsilon$, il existe $\gamma \in W^{1,\infty}([0,T], \mathrm{Diff}^{k+1,\alpha}(\mathbb{T}^d))$ solution de (3.17) avec $\{t, \gamma(t,\cdot) \neq Id\}$ compact dans $]0,T[$ (où $\mathrm{Diff}^{k+1,\alpha}$ est l'ensemble des difféomorphismes de $\mathbb{T}^d$ de régularité hölderienne $k+1, \alpha$ dont l'inverse a également cette régularité). De plus, on a les estimations suivantes (pour un certain C ne dépendant que de d, k et α) :

$$\forall t \in [0,T], \quad \|\gamma(t,\cdot) - Id_{\mathbb{T}^d}\|_{k+1,\alpha} \leq C\|f(t,\cdot)\|_{k,\alpha}, \tag{3.19}$$

$$\mathrm{Lip}(\gamma) \leq C\,\mathrm{Lip}(f). \tag{3.20}$$

Avant de s'attaquer à la preuve de ce théorème, énonçons un lemme correspondant à la résolution du problème linéarisé à temps fixé :

Lemme 3.3.0.1. *Il existe une application linéaire et continue :*

$$\begin{array}{rrcl} L : & C^{k,\alpha}(\mathbb{T}^d) \cap \{g | \int_{\mathbb{T}^d} g = 0\} & \to & C^{k+1,\alpha}(\mathbb{T}^d, \mathbb{R}^d) \\ & g & \mapsto & Lg \end{array}$$

telle que :

$$\mathrm{div}(Lg) = g$$

On notera K sa constante de continuité.

Preuve : Pour g dans $C^{k,\alpha}(\mathbb{R}^d) \cap \{g | \int_{\mathbb{T}^d} g = 0\}$, on sait qu'il existe un unique $f \in C^{k+2,\alpha}(\mathbb{T}^d)$ tel que :

$$\Delta f = g,$$

$$\int_{\mathbb{T}^d} f = 0.$$

De plus $g \mapsto f$ est linéaire et continue. Il suffit donc de choisir :

$$Lg := \nabla f.$$

□

Preuve du théorème : La preuve est une application du théorème du point fixe de Picard. On commence par trouver une solution $C^{k+1,\alpha}$ au problème :

$$\det(D\gamma(x)) = 1 + f(x), \tag{3.21}$$

où f est petit dans $C^{k,\alpha}(\mathbb{T}^d)$. Ce problème se reformule :

$$\mathrm{div}(\eta(x)) = f(x) - Q(D\eta(x)) =: N(\eta)(x),$$

où $\eta(x) := \gamma(x) - x$, et si M est une matrice $d \times d$:

$$Q(M) := \det(Id + M) - 1 - tr(M).$$

C'est un polynôme en les coefficients de M, dont les monômes sont tous d'ordre au moins 2. De plus :

$$Q(M) - Q(N) = \int_0^1 DQ((1-t)N + tM)dt \cdot (M - N)$$

où les coefficient de $DQ(M)$ sont des polynômes en les coefficients de M dont les mônomes sont de degré au moins 1. Donc si M et N sont de régularité $C^{k,\alpha}$, en utilisant des inégalités classiques du type :

$$\|fg\|_{k,\alpha} \leq C(d,k,\alpha)\|f\|_{k,\alpha}\|g\|_{k,\alpha},$$

on voit que si M et N sont bornés par 1 dans $C^{k,\alpha}$, alors :

$$\|Q(M) - Q(N)\|_{k,\alpha} \leq C_Q(d,k,\alpha)(\|M\|_{k,\alpha} + \|N\|_{k,\alpha})\|M - N\|_{k,\alpha}. \tag{3.22}$$

On s'est donc ramené au problème :

$$\eta = LN\eta.$$

On fait alors les estimations suivantes pour v et w dans la boule unité de $C^{k+1,\alpha}$:

$$\begin{aligned}
\|LNv\|_{k+1,\alpha} &\leq K\|Nv\|_{k,\alpha} \\
&\leq K\|f\|_{k,\alpha} + K\|Q(Dv)\|_{k,\alpha} \\
&\leq K\|f\|_{k,\alpha} + KC_Q\|Dv\|_{k,\alpha}^2 \\
\|LNv\|_{k+1,\alpha} &\leq K\|f\|_{k,\alpha} + KC_Q\|v\|_{k+1,\alpha}^2.
\end{aligned} \tag{3.23}$$

Puis :

$$\begin{aligned}
&\|LNv - LNw\|_{k+1,\alpha} \leq K\|Q(Dv) - Q(Dw)\|_{k,\alpha} \\
&\|LNv - LNw\|_{k+1,\alpha} \leq KC_Q(\|v\|_{k+1,\alpha} + \|w\|_{k+1,\alpha})\|v - w\|_{k+1,\alpha}.
\end{aligned} \tag{3.24}$$

Alors en posant :

$$r := \min(\frac{1}{4KC_Q}, 1) \tag{3.25}$$

et en supposant :

$$\|f\|_{k,\alpha} \leq \epsilon(d,k,\alpha) := \min(\frac{r}{2K}, \frac{1}{2}), \tag{3.26}$$

par (3.23), $LN(B_r) \subset B_r$ et par (3.24), LN est $\frac{1}{2}$-lipshitz sur B_r. On peut donc trouver un point fixe η pour LN et donc une solution $Id + \eta \in C^{k+1,\alpha}$ de (3.21). De plus, on a l'estimation suivante :

$$\|\eta\|_{k+1,\alpha} \leq 2K\|f\|_{k,\alpha}. \tag{3.27}$$

Enfin, on voit que $\gamma \in \mathrm{Diff}^{k+1,\alpha}(\mathbb{T}^d)$ car c'est un difféomorphisme local nécessairement de degré 1 (car sont déterminant jacobien est strictement positif et d'intégrale 1).
On peut alors reprendre notre problème initial, avec f vérifiant toutes les hypothèses de l'énoncé avec le ϵ que l'on vient de définir. Ceci nous permet de définir pour chaque $t \in [0,T]$ un $\gamma(t,\cdot) \in \mathrm{Diff}^{k+1,\alpha}(\mathbb{T}^d)$ vérifiant :

$$\begin{gathered} \det(D_x\gamma(t,x)) = 1 + f(t,x), \\ \|\gamma(t,\cdot) - Id\|_{k+1,\alpha} \leq 2K\|f(t,\cdot)\|_{k,\alpha}. \end{gathered} \tag{3.28}$$

En particulier, l'équation (3.28) montre que $\gamma(0,\cdot) = \gamma(T,\cdot) = Id$, et même que $\{t, \gamma(t,\cdot) \neq Id\}$ est compact dans $]0,T[$. Donc γ est solution de (3.17), et il ne reste qu'à étudier sa régularité temporelle.
Soient $0 \leq s \leq t \leq T$. On a :

$$\begin{aligned} \|\gamma(t,\cdot) - \gamma(s,\cdot)\|_{k+1,\alpha} &\leq K\|\operatorname{div}\gamma(t,\cdot) - \operatorname{div}\gamma(s,\cdot)\|_{k,\alpha} \\ &\leq K\|f(t,\cdot) - f(s,\cdot\|_{k,\alpha} + \|Q(D\gamma(t,\cdot)) - Q(d\gamma(s,\cdot))\|_{k,\alpha} \\ &\leq K|t-s|\operatorname{Lip}(f) + 2KC_Q r\|\gamma(t,\cdot) - \gamma(s,\cdot)\|_{k+1,\alpha}. \end{aligned}$$

Mais comme $2KC_Q r \leq \frac{1}{2}$, on obtient :

$$\|\gamma(t,\cdot) - \gamma(s,\cdot)\|_{k+1,\alpha} \leq 2K|t-s|\operatorname{Lip}(f),$$

ce qui est exactement le résultat souhaité. □

Remarque 3.3.0.1

Le γ ainsi construit est lipshitzien par rapport aux deux variables, il est donc presque partout dérivable par rapport à t, et :

$$\|\partial_t\gamma\|_\infty \leq 2K\operatorname{Lip}(f).$$

3.4 Convergence distributionelle de la suite des pressions approchées

3.4.1 Modification spatiale des flots et première inégalité variationnelle

On veut modifier légèrement le flot $(\rho_i, m_i)_i$ par le biais de familles de difféomorphismes $(\gamma_t)_{t\in[0,T]}$. On suppose qu'il existe $a > 0$ tel que pour tout $t \in [0,a] \cup [T-a,T]$, $\gamma_t = Id_{\mathbb{T}^d}$. On pose $\Gamma(t,x) := (t, \gamma_t(x))$. On sait que :

$$\int_Q [\partial_t(\phi_i^\epsilon \circ \Gamma) - \nu\Delta(\phi_i^\epsilon \circ \Gamma) + \nabla(\phi_i^\epsilon \circ \Gamma)\cdot v_i]\,\rho_i = \int_Q [\partial_t\phi_i^\epsilon - \nu\Delta\phi_i^\epsilon + \nabla\phi_i^\epsilon \cdot v_i]\,\rho_i$$

car $\phi_i^\epsilon \circ \Gamma - \phi_i^\epsilon \in C_c^2(]0,T[\times \mathbb{T}^d)$. Cette égalité se reformule :

$$\int_Q \Big[(\partial_t \phi_i^\epsilon)\circ\Gamma - \nu(\Delta\phi_i^\epsilon)\circ\Gamma + (\nabla\phi_i^\epsilon)\circ\Gamma\cdot\Big(\partial_t\gamma + \nu\Big[\partial_x\gamma\cdot\frac{\nabla\rho_i}{\rho_i}\Big] + [\partial_x\gamma\cdot v_i]\Big)\Big]\rho_i$$
$$- \int_Q [\partial_t\phi_i^\epsilon - \nu\Delta\phi_i^\epsilon + \nabla\phi_i^\epsilon\cdot v_i]\rho_i$$
$$= -\nu\int_Q (\Delta\phi_i^\epsilon)\circ\Gamma\rho_i$$
$$= \nu\int_Q \Big[(\nabla\phi_i^\epsilon)\circ\Gamma\cdot\frac{\nabla\rho_i}{\rho_i} - \operatorname{tr}\big((D^2\phi_i^\epsilon)\circ\Gamma\times(\partial_x\gamma - Id)\big)\Big]\rho_i,$$

que l'on peut encore réécrire :

$$\int_Q [\partial_t\phi_i^\epsilon - \nu\Delta\phi_i^\epsilon + \frac{1}{2}|\nabla\phi_i^\epsilon|^2](\Gamma\sharp\rho_i - \rho_i) + \frac{1}{2}\int_Q |\nabla\phi_i^\epsilon - v_i|^2\rho_i$$
$$= \frac{1}{2}\int_Q |(\nabla\phi_i^\epsilon)\circ\Gamma - \tilde{v}_i\circ\Gamma|^2\rho_i + \frac{1}{2}\int_Q (|v_i|^2 - |\tilde{v}_i\circ\Gamma|^2)\rho_i$$
$$- \nu\int_Q \operatorname{tr}\big((D^2\phi_i^\epsilon)\circ\Gamma\times(\partial_x\gamma - Id)\big)\rho_i,$$

où on a noté :

$$\tilde{v}_i\circ\Gamma := \partial_t\gamma + \nu\Big[(\partial_x\gamma - Id)\cdot\frac{\nabla\rho_i}{\rho_i}\Big] + [\partial_x\gamma\cdot v_i]\,. \tag{3.29}$$

Or

$$\int_Q [\partial_t\phi_i^\epsilon - \nu\Delta\phi_i^\epsilon + \frac{1}{2}|\nabla\phi_i^\epsilon|^2](\Gamma\sharp\rho_i - \rho_i) + \frac{1}{2}\int_Q |\nabla\phi_i^\epsilon - v_i|^2\rho_i \leq \epsilon - \int_Q p^\epsilon(\Gamma\sharp\rho_i - \rho_i).$$

On obtient donc l'inégalité variationnelle :

$$\boxed{\begin{aligned}\int_Q (p^\epsilon\circ\Gamma - p^\epsilon)\rho_i + \frac{1}{2}\int_Q |(\nabla\phi_i^\epsilon)\circ\Gamma - \tilde{v}_i\circ\Gamma|^2\rho_i \leq \epsilon + \frac{1}{2}\int_Q (|\tilde{v}_i\circ\Gamma|^2 - |v_i|^2)\rho_i \\ + \nu\int_Q \operatorname{tr}\big((D^2\phi_i^\epsilon)\circ\Gamma\times(\partial_x\gamma - Id)\big)\rho_i.\end{aligned}} \tag{3.30}$$

3.4.2 Première application de cette inégalité, convergence faible de la différentielle des vitesses approchées

On applique cette inégalité dans le cas très simple suivant :
étant donnée une fonction h à support compact sur $]0,T[$ et un élément a de

$\mathbb{R}^d$, (3.30) appliquée à $x \mapsto x + \delta h(t) a$ donne après avoir sommé sur i et avoir remarqué qu'un tel difféomorphisme conserve la mesure :

$$\sum_{i=1}^{M} \frac{1}{2} \int_Q \left|\nabla \phi_i^\epsilon(t, x + \delta h(t)a) - \delta h'(t)a - v_i\right|^2 \rho_i$$
$$\leq \epsilon + \sum_{i=1}^{M} \frac{1}{2} \int_Q \left(|\delta h'(t)a + v_i|^2 - |v_i|^2\right) \rho_i.$$

En faisant notre hypothèse de minoration sur les ρ_i, on peut passer à la limite $\epsilon \to 0$ et obtenir :

$$\sum_{i=1}^{M} \frac{1}{2} \int_Q \left|v_i(t, x + \delta h(t)a) - \delta h'(t)a - v_i\right|^2 \rho_i$$
$$\leq \sum_{i=1}^{M} \frac{1}{2} \int_Q \left(|\delta h'(t)a + v_i|^2 - |v_i|^2\right) \rho_i.$$

En particulier, quelques soient δ, h et a :

$$\sum_{i=1}^{M} \int_Q \left(|\delta h'(t)a + v_i|^2 - |v_i|^2\right) \rho_i \geq 0,$$

c'est à dire :

$$2\delta \int_0^T h'(t)a \cdot \int_{\mathbb{T}^d} \sum_{i=1}^{M} v_i \rho_i + \delta^2 |a|^2 \int_0^T h'(t)^2 dt \geq 0.$$

D'où pour tout a et h :

$$\int_0^T h'(t)a \cdot \int_{\mathbb{T}^d} \sum_{i=1}^{M} v_i \rho_i = 0,$$

ce qui signifie exactement que $\int_{\mathbb{T}^d} \sum_{i=1}^{M} v_i \rho_i$ est une constante. En conséquence :

$$\sum_{i=1}^{M} \int_Q \left|v_i(t, x + \delta h(t)a) - \delta h'(t)a - v_i\right|^2 \rho_i \leq \delta^2 |a|^2 \int_0^T h'(t)^2 dt.$$

En choisissant $\delta_0 \in]0, \frac{T}{2}[$ et h nulle en dehors de $]\frac{\delta_0}{2}, T - \frac{\delta_0}{2}[$ et valant 1 sur $[\delta_0, T - \delta_0]$, on voit :

$$\int_{\delta_0}^{T-\delta_0} \sum_{i=1}^{M} \int_{\mathbb{T}^d} \left|v_i(t, x + \delta a) - v_i\right|^2 \rho_i \leq \delta^2 |a|^2 \int_0^T h'(t)^2 dt,$$

ce qui suffit pour conclure que :

$$\boxed{v_i \in L^2_{loc}(]0, T[, H^1(\mathbb{T}^d)),} \tag{3.31}$$

Avec l'estimation :

$$\sum_{i=1}^{M} \int_{\delta_0}^{T-\delta_0} \int_{\mathbb{T}^d} |Dv_i|^2 \rho_i dxdt \leq C_{\delta_0} \tag{3.32}$$

3.4.3 Choix d'une famille compacte de multiplicateurs de Lagrange approchés

On montre que grâce à (3.32), on peut remplacer les suites de multiplicateurs de Lagrange approchés (ϕ_i^ϵ) par des suites qui convergent fortement dans $L^2_{loc}(]0,T[, H^1(\mathbb{T}^d))$ vers v_i.
Pour cela, on choisit τ un noyau régularisant en espace et on définit :

$$\tau_\delta(x) := \frac{1}{\delta^d}\tau\left(\frac{x}{\delta}\right).$$

On va alors voir que l'on peut choisir $\delta(\epsilon)$ une fonction tendant vers 0 quand ϵ tend vers 0 et telle que, en notant :

$$\psi_i^\epsilon := \phi_i^\epsilon * \tau_{\delta(\epsilon)},$$
$$q^\epsilon := p^\epsilon * \tau_{\delta(\epsilon)},$$

on a $\psi_i^\epsilon \in C^2(Q)$, $q^\epsilon \in C^0(Q)$ et :

$$\partial_t \psi_i^\epsilon + q^\epsilon + \frac{1}{2}|\nabla \psi_i^\epsilon|^2 - \nu \Delta \psi_i^\epsilon \leq 0,$$
$$\sum_{i=1}^{M} \frac{1}{2}\int_Q |\nabla \psi_i^\epsilon - v_i|^2 \rho_i + \int_Q |\partial_t \psi_i^\epsilon + q^\epsilon + \frac{1}{2}|\nabla \psi_i^\epsilon|^2 - \nu \Delta \psi_i^\epsilon| \rho_i \underset{\epsilon \to 0}{\rightarrow} 0,$$
$$\nabla \psi_i^\epsilon \to v_i \text{ dans } L^2_{loc}(]0,T[, H^1(\mathbb{T}^d)).$$

Preuve : L'identité essentielle permettant de faire cette régularisation est la suivante. Si on choisit $\delta > 0$ et $a \in C^0(\mathbb{T}^d, \mathbb{R}^d)$, on a :

$$|a * \tau_\delta|^2 \leq |a|^2 * \tau_\delta.$$

C'est en effet une conséquence directe de l'inégalité de Jensen. Ainsi, si on fixe $\epsilon > 0$, quel que soit $\delta > 0$, on a $\phi_i^\epsilon * \tau_\delta \in C^2(Q)$, $p^\epsilon * \tau_\delta \in C^0(Q)$ et :

$$\begin{aligned}
&\partial_t(\phi_i^\epsilon * \tau_\delta) + p^\epsilon * \tau_\delta + \frac{1}{2}|\nabla(\phi_i^\epsilon * \tau_\delta)|^2 - \nu\Delta(\phi_i^\epsilon * \tau_\delta) \\
&\qquad = (\partial_t \phi_i^\epsilon) * \tau_\delta + p^\epsilon * \tau_\delta + \frac{1}{2}|(\nabla \phi_i^\epsilon) * \tau_\delta|^2 - \nu(\Delta\phi_i^\epsilon) * \tau_\delta \\
&\qquad \leq (\partial_t \phi_i^\epsilon) * \tau_\delta + p^\epsilon * \tau_\delta + \frac{1}{2}|\nabla \phi_i^\epsilon|^2 * \tau_\delta - \nu(\Delta\phi_i^\epsilon) * \tau_\delta \\
&\qquad = \left[\partial_t \phi_i^\epsilon + p^\epsilon + \frac{1}{2}|\nabla \phi_i^\epsilon|^2 - \nu\Delta\phi_i^\epsilon\right] * \tau_\delta \\
&\qquad \leq 0.
\end{aligned}$$

On a :

$$\sum_{i=1}^{M} \frac{1}{2}\int_Q |\nabla\phi_i^\epsilon * \tau_\delta - v_i|^2\rho_i + \int_Q |\partial_t\phi_i^\epsilon * \tau_\delta + p^\epsilon * \tau_\delta + \frac{1}{2}|\nabla\phi_i^\epsilon * \tau_\delta|^2 - \nu\Delta\phi_i^\epsilon * \tau_\delta|\rho_i$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{M} \frac{1}{2}\int_Q |\nabla\phi_i^\epsilon * \tau_\delta - v_i|^2\rho_i - \int_Q \left(\partial_t\phi_i^\epsilon + p^\epsilon + \frac{1}{2}|\nabla\phi_i^\epsilon|^2 - \nu\Delta\phi_i^\epsilon\right) * \tau_\delta\rho_i \\
&\quad + \frac{1}{2}\int_Q (|\nabla\phi_i^\epsilon|^2 * \tau_\delta - |\nabla\phi_i^\epsilon * \tau_\delta|^2)\rho_i \\
&\leq C\sum_{i=1}^{M}\int_Q |(\nabla\phi_i^\epsilon - v_i) * \tau_\delta|^2 + |v_i * \tau_\delta - v_i|^2 \\
&\quad + \|\partial_t\phi_i^\epsilon + p^\epsilon + \frac{1}{2}|\nabla\phi_i^\epsilon|^2 - \nu\Delta\phi_i^\epsilon\|_{L^1}\|\tau_\delta\|_{L^1} \\
&\quad + \int_Q (|\nabla\phi_i^\epsilon|^2 - |v_i|^2) * \tau_\delta + (|v_i|^2 * \tau_\delta - |v_i|^2) + (|v_i|^2 - |v_i * \tau_\delta|^2) \\
&\qquad + (|v_i * \tau_\delta|^2 - |\nabla\phi_i^\epsilon * \tau_\delta|^2) \\
&\leq C\epsilon\|\tau_\delta\|_{L^1} + \underset{\delta\to 0}{o}(1) = C\epsilon + \underset{\delta\to 0}{o}(1).
\end{aligned}$$

D'autre part, si on prend $\delta_0 \in]0, \frac{T}{2}[$:

$$\begin{aligned}
&\int_{Q_{\delta_0}} |D^2(\phi_i^\epsilon * \tau_\delta) - Dv_i|^2\rho_i \\
&\quad\leq \int_{Q_{\delta_0}} |D^2(\phi_i^\epsilon * \tau_\delta) - D(v_i * \tau_\delta)|^2\rho_i + \int_{Q_{\delta_0}} |D(v_i * \tau_\delta) - Dv_i|^2\rho_i \\
&\quad\leq \int_{Q_{\delta_0}} |(\nabla\phi_i^\epsilon - v_i) * \nabla\tau_\delta|^2\rho_i + \int_{Q_{\delta_0}} |(Dv_i) * \tau_\delta - Dv_i|^2\rho_i \\
&\quad\leq \|\nabla\tau_\delta\|_{L^1}\|\nabla\phi_i^\epsilon - v_i\|_{L^2(Q)}^2 + \int_{Q_{\delta_0}} |(Dv_i) * \tau_\delta - Dv_i|^2\rho_i \\
&\quad\leq \frac{C}{\delta}\|\nabla\phi_i^\epsilon - v_i\|_{L^2(Q)}^2 + \int_{Q_{\delta_0}} |(Dv_i) * \tau_\delta - Dv_i|^2\rho_i \\
&\quad\leq C\frac{\epsilon}{\delta} + \underset{\delta\to 0}{o}(1),
\end{aligned}$$

où les deux derniers o sont indépendants de ϵ. En conséquence, si on choisit $\delta(\epsilon)$ tel que :

$$\delta(\epsilon) \to 0,$$
$$\epsilon = \underset{\delta\to 0}{o}(\delta),$$

on a le résultat.

□

Remarque 3.4.3.1

La transformation effectuée conserve le fait que pour tout t :

$$\int_Q q^\epsilon(t,x)dx = 0.$$

Dans la suite, on réindexe la suite des $(\psi_i^\epsilon, q^\epsilon)$ et on la renomme $(\phi_i^\epsilon, p^\epsilon)$ de façon à ce que (3.13) soit valide.

3.4.4 Compacité de la suite des pressions approchées

On va désormais utiliser le théorème 3.3.0.1 pour déduire de (3.30) de la compacité séquentielle au sens des distributions sur (p^ϵ). En fait, on va montrer que pour $\delta_0 \in]0, \frac{T}{2}[$, (p^ϵ) est borné dans le dual de l'espace vectoriel normé séparable (vu comme sous espace de $C^1(Q)$) :

$$E_{\delta_0} := \{f \in C^1([0,T] \times \mathbb{T}^d) \text{ telles que } \\ \forall t \in [\delta_0, T-\delta_0], \int_{\mathbb{T}^d} f(t,\cdot) = 0, \text{ Supp}(f) \subset [\delta_0, T-\delta_0] \times \mathbb{T}^d\}$$

et donc que l'on peut extraire de (p_ϵ) une sous-suite qui converge faible-$\star$ dans le dual de E_{δ_0}.

Soit $f \in E_{\delta_0}$, proche de 0 et $0 < \alpha < 1$. $f \in W^{1,\infty}([0,T], C^{0,\alpha}(\mathbb{T}^d))$, est proche de 0 dans cet espace et ses intégrales spatiales sont nulles, donc il existe $\gamma \in W^{1,\infty}([0,T], \text{Diff}^{1,\alpha}(\mathbb{T}^d))$ solution de (3.17). Mais alors (3.30) est vérifiée, et en particulier (rappelons que $\Gamma(t,x) = (t, \gamma(t,x))$) :

$$\int_Q (p^\epsilon \circ \Gamma - p^\epsilon)\rho_i \\ \leq \epsilon + \frac{1}{2}\int_Q (|\tilde{v}_i \circ \Gamma|^2 - |v_i|^2)\rho_i + \nu \int_Q \text{tr}\left((D^2\phi_i^\epsilon) \circ \Gamma \times (\partial_x\gamma - Id)\right)\rho_i.$$

En sommant sur i et en utilisant (3.7) :

$$\int_Q p^\epsilon \circ \Gamma - p^\epsilon \\ \leq \epsilon M + \sum_{i=1}^M \frac{1}{2}\int_Q (|\tilde{v}_i \circ \Gamma|^2 - |v_i|^2)\rho_i + \nu \int_Q \text{tr}\left((D^2\phi_i^\epsilon) \circ \Gamma \times (\partial_x\gamma - Id)\right)\rho_i,$$

puis en changeant de variable dans la première intégrale :

$$\int_Q p^\epsilon f \leq \epsilon M + \sum_{i=1}^M \frac{1}{2}\int_Q (|\tilde{v}_i \circ \Gamma|^2 - |v_i|^2)\rho_i + \nu \int_Q \text{tr}\left((D^2\phi_i^\epsilon) \circ \Gamma \times (\partial_x\gamma - Id)\right)\rho_i.$$

Etudions :

$$\int_Q (|\tilde{v}_i \circ \Gamma|^2 - |v_i|^2)\rho_i = \int_Q (|\partial_t\gamma + \nu\left[(\partial_x\gamma - Id)\cdot\frac{\nabla\rho_i}{\rho_i}\right] + [\partial_x\gamma \cdot v_i]|^2 - |v_i|^2)\rho_i.$$

Les termes $\partial_t\gamma$ et $\nu\left[(\partial_x\gamma - Id)\cdot\frac{\nabla\rho_i}{\rho_i}\right]$ sont majorés en norme L^2 par quelque chose du type $Cste \times |||f|||$ où la constante dépend de la dimension, de α, et de l'action optimale (grâce à l'estimation a priori (3.14)). En conséquence, on obtient :

$$\int_Q (|\tilde{v}_i \circ \Gamma|^2 - |v_i|^2)\rho_i \leq \int_Q (|\partial_x \gamma \cdot v_i|^2 - |v_i|^2)\rho_i + Cste \times |||f|||$$
$$= \int_Q \langle (\partial_x \gamma + Id)v_i | (\partial_x \gamma - Id)v_i \rangle \rho_i + Cste \times |||f|||$$
$$\int_Q (|\tilde{v}_i \circ \Gamma|^2 - |v_i|^2)\rho_i \leq Cste \times |||f|||. \tag{3.33}$$

Etudions maintenant :

$$\int_Q \operatorname{tr}\left((D^2\phi_i^\epsilon) \circ \Gamma \times (\partial_x \gamma - Id)\right) \rho_i.$$

Il suffit d'estimer :

$$\int_Q (D^2\phi_i^\epsilon) \circ \Gamma \times (\partial_x \gamma - Id)\rho_i$$
$$= \int_Q D^2\phi_i^\epsilon(t,x)(\partial_x \gamma(t, \gamma^{-1}(t,x)) - Id)\rho_i(t, \gamma^{-1}(t,x))(1 + f(t,x)),$$

qui est facile à majorer par $Cste|||f|||$ pour $|||f|||$ petit puisqu'on a choisi $(D^2\phi_i^\epsilon)_\epsilon$ fortement compacte dans $L^2([\delta_0, T - \delta_0] \times \mathbb{T}^d)$. On obtient donc l'estimation valable lorsque $|||f|||$ est suffisamment petit :

$$\int_Q p^\epsilon f \leq \epsilon M + Cste|||f|||. \tag{3.34}$$

Comme $|||f||| \leq ||f||_{C^1}$, p_ϵ est borné dans le dual de E_{δ_0}, et comme E_{δ_0} est séparable, on peut en extraire une sous-suite qui converge dans E'_{δ_0}-$\star$. Comme on peut le faire pour chaque δ_0, une extraction diagonale nous permet d'obtenir une limite p dans le dual de la limite inductive des E_{δ_0} qui n'est autre en tant qu'ensemble que $C_c^1(]0,T[\times Q)$.

3.4.5 Equation distributionnelle vérifiée par la pression

On s'intéresse désormais aux flots de la forme :

$$\gamma_\delta(t,x) = \exp_{\delta h(t)}(w)(x)$$

où h est une fonction lisse à support compact sur $]0,T[$ et w est un champs de vecteurs lisse sur $\mathbb{T}^d$. Si $\epsilon > 0$, (3.30) est valide. La convergence faible des $D^2\phi_i^\epsilon$, la minoration des ρ_i et le fait que $\det(D_x\gamma_\delta^{-1}) - 1 \in E$ nous permettent de passer à la limite $\epsilon \to 0$ et ainsi obtenir :

$$\langle p|\det(D_x\gamma_\delta^{-1})-1\rangle+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{M}\int_Q |v_i\circ\Gamma-\tilde{v_i}\circ\Gamma|^2\rho_i$$
$$\leq \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{M}\int_Q(|\tilde{v}_i\circ\Gamma|^2-|v_i|^2)\rho_i+\nu\sum_{i=1}^{M}\int_Q \operatorname{tr}\left((Dv_i)\circ\Gamma\times(D_x\gamma_\delta-Id)\right)\rho_i,$$

et en particulier :

$$\underbrace{\langle p|\det(D_x\gamma_\delta^{-1})-1\rangle}_{:=\Phi_1(\delta)}$$
$$\underbrace{\leq \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{M}\int_Q(|\tilde{v}_i\circ\Gamma|^2-|v_i|^2)\rho_i+\nu\sum_{i=1}^{M}\int_Q \operatorname{tr}\left((Dv_i)\circ\Gamma\times(D_x\gamma_\delta-Id)\right)\rho_i\,.}_{:=\Phi_2(\delta)}$$

Les deux membres de cette inégalité sont nuls et dérivables en $\delta=0$ (on va le voir tout de suite), on peut donc conclure que leurs dérivées sont égales.

Développement de Taylor des dérivées de γ_δ

Commençons par remarquer (en constatant que les O sont réalisées par des fonctions lisses de δ, t et x ce qui permet de justifier les intervertions qui auront lieu par la suite) :

$$\gamma_\delta(t,x)=w+\delta h(t)w(x)+O(\delta^2). \tag{3.35}$$

D'autre part :

$$\partial_t D_x\exp_t(w)(x)=D_x w(\exp_t(w)(x))=Dw(\exp_t(w)(x))D_x(\exp_t(w)(x)),$$

d'où il vient aisément :

$$D_x\gamma_\delta(t,x)=Id+\delta h(t)Dw(x)+O(\delta^2). \tag{3.36}$$

En conséquence :

$$\det(D_x\gamma_\delta)=1+\delta h(t)\operatorname{div}(w)(x)+O(\delta^2),$$

et :

$$\det(D_x\gamma_\delta^{-1})-1=-\delta h(t)\operatorname{div}(w)(x)+O(\delta^2). \tag{3.37}$$

Enfin :

$$\partial_t\gamma_\delta(t,x)=\delta h'(t)w(\gamma_\delta(t,x)) \tag{3.38}$$
$$=\delta h'(t)w(x+\delta h(t)w(x)+O(\delta^2))$$
$$\partial_t\gamma_\delta(t,x)=\delta h'(t)w(x)+O(\delta^2). \tag{3.39}$$

Calcul de la dérivée de Φ_1 en 0

De (3.37), il vient :

$$\Phi_1(\delta) = \langle p|\det(D_x\gamma_\delta^{-1}) - 1\rangle = -\delta\langle p|h(t)\operatorname{div}(w)(x)\rangle + O(\delta^2).$$

Calcul de la dérivée de Φ_2 en 0

On a également très facilement pour $\delta > 0$ et par convergence dominée :

$$\begin{aligned}
&\frac{\Phi_2(\delta) - \Phi_2(0)}{\delta} = \frac{\Phi_2(\delta)}{\delta}\\
&= \frac{1}{2\delta}\sum_{i=1}^{M}\int_Q \left(\left|\partial_t\gamma_\delta + (D_x\gamma_\delta - Id)\cdot\left[\nu\frac{\nabla\rho_i}{\rho_i} + v_i\right] + v_i\right|^2 - |v_i|^2\right)\rho_i\\
&\qquad\qquad + \nu\sum_{i=1}^{M}\int_Q \operatorname{tr}\left((Dv_i)(t,\gamma_\delta)\times\frac{\partial_x\gamma_\delta - Id}{\delta}\right)\rho_i\\
&= \sum_{i=1}^{M}\int_Q \left\langle v_i\middle|h'w + hDw(\nu\frac{\nabla\rho_i}{\rho_i} + v_i)\right\rangle\rho_i + \nu\sum_{i=1}^{M}\int_Q h\operatorname{tr}(Dv_i\times Dw)\,\rho_i + o(1)\\
&= \sum_{i=1}^{M}\int_Q \left\langle v_i\middle|h'w + hDw(\nu\frac{\nabla\rho_i}{\rho_i} + v_i)\right\rangle\rho_i - \nu\sum_{i=1}^{M}\int_Q h\left\langle v_i\middle|\frac{\nabla\rho_i}{\rho_i} + \Delta w\right\rangle\rho_i.
\end{aligned}$$

Conclusion

On obtient donc :

$$\langle p|h\operatorname{div} w\rangle = -\sum_{i=1}^{M}\int_Q \left\langle v_i\middle|h'w + hDw\cdot v_i - \nu h\Delta w\right\rangle\rho_i. \tag{3.40}$$

Remarque 3.4.5.1

Des résultats classiques sur les distributions (voir [9]) nous disent que :

- *Il existe une infinité de distributions satisfaisant 3.40 pour tout h et w lisses. On note P leur ensemble.*
- *Quelque soit $\pi \in P$, le gradient de π satisfait pour chaque h et w lisses :*

$$\langle\nabla\pi|hw\rangle = \sum_{i=1}^{M}\int_Q \left\langle v_i\middle|h'w + hDw\cdot v_i - \nu h\Delta w\right\rangle\rho_i.$$

- *Ceci suffit à caractériser $\nabla\pi$ comme la distributions sur $]0,T[\times\mathbb{T}^d$ satisfaisant pour tout $\psi \in \mathcal{D}(]0,T[\times\mathbb{T}^d,\mathbb{R}^d)$:*

$$\langle\nabla\pi|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{M}\int_Q \left\langle v_i\middle|\partial_t\psi + D_x\psi\cdot v_i - \nu\Delta_x\psi\right\rangle\rho_i,$$

c'est a dire de manière équivalente :

$$-\nabla\pi = \sum_{i=1}^{M}\partial_t(\rho_i v_i) + \boldsymbol{div}(v_i\otimes v_i\,\rho_i) + \nu\Delta(\rho_i v_i).$$

— *En particulier, les éléments de P se distinguent les uns des autres par l'ajout d'une distribution ne dépendant que du temps, de sorte que si l'on impose par exemple à chaque p_ϵ de s'annuler contre les $\varphi \in \mathcal{D}(]0,T[)$ (comme c'est possible grâce à la remarque 3.2.2.1), et si l'on choisit l'élément de P qui vérifie cette même propriété (que l'on notera à nouveau p), la convergence dans le dual de E à extraction prêt devient une convergence au sens des distributions **sans extraction** (p étant entièrement caractérisé dans les distributions).*

Remarque 3.4.5.2

Mettons a nouveau en évidence la première équation que l'on obtient sur p :

$$\boxed{-\nabla p = \sum_{i=1}^{M} \partial_t(\rho_i v_i) + \boldsymbol{div}(v_i \otimes v_i\ \rho_i) + \nu \Delta(\rho_i v_i).} \tag{3.41}$$

3.5 Régularité de la pression

3.5.1 Convergence distributionnelle des potentiels vitesse approchés

Commençons par rappeler que l'on fait toujours l'hypothèse selon laquelle il existe $r > 0$ tel que pour tout i, $\rho_i \geq r$.
(3.13) montre alors que $\nabla \phi_i^\epsilon$ converge vers v_i dans L^2 et que

$$\partial_t \phi_i^\epsilon + p^\epsilon + \frac{1}{2}|\nabla \phi_i^\epsilon|^2 - \nu \Delta \phi_i^\epsilon$$

converge vers 0 dans L^1. En particulier on a la convergence au sens des distributions :

$$\partial_t \phi_i^\epsilon \to -p - \frac{1}{2}|v_i|^2 + \nu \operatorname{div} v_i.$$

De plus, depuis le début, seules les dérivées des ϕ_i^ϵ sont intervenues. Tout ce que l'on a fait est donc vrai en ajoutant une constante à chaque ϕ_i^ϵ. Etant donnée $\varphi_0 \in \mathcal{D}(]0,T[\times \mathbb{T}^d)$ positive non nulle, on peut alors imposer :

$$\int_Q \phi_i^\epsilon \varphi_0 = 0. \tag{3.42}$$

Il existe alors une unique distribution ϕ_i vérifiant :

$$\begin{aligned} \nabla \phi_i &= v_i, \\ \partial_t \phi_i &= -p - \frac{1}{2}|v_i|^2 + \nu \operatorname{div} v_i, \\ \langle \phi_i | \varphi_0 \rangle &= 0, \end{aligned}$$

et il est facile de voir que ϕ_i^ϵ converge vers ϕ_i au sens des distributions.

Remarque 3.5.1.1

On obtient donc une équation vérifiée par p "phase par phase" :

$$\boxed{\partial_t \phi_i + \frac{1}{2}|v_i|^2 - \nu \operatorname{div} v_i = -p,} \tag{3.43}$$

et donc en dérivant au sens des distributions, en utilisant le fait que v_i est un gradient et la régularité (3.31) *:*

$$\boxed{\partial_t v_i + (v_i \cdot \nabla) v_i - \nu \boldsymbol{\Delta} v_i = -\nabla p.} \tag{3.44}$$

3.5.2 Modification temporelle des flots et seconde inégalité variationnelle

On reprend la démarche suivie au 3.4.1, mais en modifiant cette fois le flot en temps. Soit η un difféomorphisme lisse de $[0,T]$, avec $\eta - Id$ à support compact dans $]0,T[$. Si ϕ est une fonction de t et de x, on note $\widetilde{\phi}(t,x) := \phi(\eta(t),x)$. On a :

$$\begin{aligned}
\int_Q \left[\partial_t \phi_i^\epsilon + \nabla \phi_i^\epsilon \cdot v_i - \nu \Delta \phi_i^\epsilon\right] \rho_i &= \int_Q \left[\eta'(t)\widetilde{\partial_t \phi_i^\epsilon} + \widetilde{\nabla \phi_i^\epsilon} \cdot v_i - \nu \widetilde{\Delta \phi_i^\epsilon}\right] \rho_i \\
&= \int_Q \eta'(t) \left[\widetilde{\partial_t \phi_i^\epsilon} + \widetilde{p}^\epsilon + \frac{1}{2}|\widetilde{\nabla \phi_i^\epsilon}|^2 - \nu \widetilde{\Delta \phi_i^\epsilon}\right] \rho_i \\
&\quad - \int_Q \left[\eta'(t)\widetilde{p}^\epsilon + \frac{\eta'(t)}{2}|\widetilde{\nabla \phi_i^\epsilon}|^2 - \widetilde{\nabla \phi_i^\epsilon} \cdot \left(v_i + (1-\eta'(t))\nu \frac{\nabla \rho_i}{\rho_i}\right)\right] \rho_i \\
&\leq - \int_Q \left[\eta'(t)\widetilde{p}^\epsilon + \frac{\eta'(t)}{2}\left|\widetilde{\nabla \phi_i^\epsilon} - \frac{v_i + \nu(1-\eta'(t))\frac{\nabla \rho_i}{\rho_i}}{\eta'(t)}\right|^2 \right. \\
&\qquad \left. - \frac{1}{2\eta'(t)}\left|v_i + \nu(1-\eta'(t))\frac{\nabla \rho_i}{\rho_i}\right|^2\right] \rho_i
\end{aligned}$$

grâce à (3.12). Or :

$$\begin{aligned}
&\int_Q \left[\partial_t \phi_i^\epsilon + \nabla \phi_i^\epsilon \cdot v_i - \nu \Delta \phi_i^\epsilon\right] \rho_i \\
&= \int_Q \left[\partial_t \phi_i^\epsilon + p^\epsilon + \frac{1}{2}|\nabla \phi_i^\epsilon|^2 - \nu \Delta \phi_i^\epsilon\right] \rho_i - \int_Q \left[p^\epsilon + \frac{1}{2}|\nabla \phi_i^\epsilon - v_i|^2 - \frac{1}{2}|v_i|^2\right] \rho_i.
\end{aligned}$$

En conséquence, en sommant sur i et en utilisant (3.13), puis en passant à la limite $\epsilon \to 0$ (on utilise ici l'hypothèse de minoration sur les ρ_i), on obtient :

$$\int_Q \eta'(t)\widetilde{p^\epsilon} - \int_Q p^\epsilon + \sum_{i=1}^M \int_Q \frac{\eta'(t)}{2} \left| \widetilde{v_i} - \frac{v_i + \nu(1-\eta'(t))\frac{\nabla \rho_i}{\rho_i}}{\eta'(t)} \right|^2 \rho_i$$
$$\leq \sum_{i=1}^M \frac{1}{2} \int_Q \left[\frac{1}{\eta'(t)} \left| v_i + \nu(1-\eta'(t)) \frac{\nabla \rho_i}{\rho_i} \right|^2 - |v_i|^2 \right] \rho_i,$$

et en changeant de variables dans la première intégrale $s = \eta(t)$:

$$\sum_{i=1}^M \int_Q \frac{\eta'(t)}{2} \left| \widetilde{v_i} - \frac{v_i + \nu(1-\eta'(t))\frac{\nabla \rho_i}{\rho_i}}{\eta'(t)} \right|^2 \rho_i$$
$$\leq \sum_{i=1}^M \frac{1}{2} \int_Q \left[\frac{1}{\eta'(t)} \left| v_i + \nu(1-\eta'(t)) \frac{\nabla \rho_i}{\rho_i} \right|^2 - |v_i|^2 \right] \rho_i. \tag{3.45}$$

En particulier :

$$\sum_{i=1}^M \frac{1}{2} \int_Q \left[\frac{1}{\eta'(t)} \left| v_i + \nu(1-\eta'(t)) \frac{\nabla \rho_i}{\rho_i} \right|^2 - |v_i|^2 \right] \rho_i \geq 0.$$

Donc si on prend h une fonction lisse à support compact dans $]0, T[$, Pour δ suffisamment petit, $Id + \delta h$ est un difféomorphisme de $[0, T]$, et on a alors :

$$\sum_{i=1}^M \frac{1}{2} \int_Q \left[\frac{1}{1+\delta h'(t)} \left| v_i - \nu \delta h'(t) \frac{\nabla \rho_i}{\rho_i} \right|^2 - |v_i|^2 \right] \rho_i \geq 0,$$

ce qui implique par un simple développement de Taylor que pour toute fonction lisse h à support compact dans $]0, T[$:

$$\sum_{i=1}^M \int_Q h'(t) \left[\frac{1}{2}|v_i|^2 + \nu v_i \cdot \frac{\nabla \rho_i}{\rho_i} \right] \rho_i = 0, \tag{3.46}$$

c'est à dire que :

$$\sum_{i=1}^M \int_{\mathbb{T}^d} \left[\frac{1}{2}|v_i|^2 + \nu v_i \cdot \frac{\nabla \rho_i}{\rho_i} \right] \rho_i = Cste. \tag{3.47}$$

Soit $\delta_0 \in]0, \frac{T}{2}[$. En reprenant (3.48) avec $\eta = Id + \delta h$ où h est une fonction lisse nulle sur $[0, \delta_0[\cup]T - \delta_0, T]$, positive et identiquement égale à 1 sur $]\delta_0, T - \delta_0[$, on a grâce à (3.46) pour δ petit :

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{M} \int_{\delta_0}^{T-\delta_0} \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}^d} |v_i(t+\delta,x) - v_i(t,x)|^2 \rho_i & \\
& \leq \delta^2 \times \frac{1}{2} \int_0^T h'(t)^2 \sum_{i=1}^{M} \left\| v_i + \nu \frac{\nabla \rho_i}{\rho_i} \right\|^2_{L^2(\rho_i dx)} dt \\
& \leq \delta^2 \times \|h'^2\|_{L^\infty([0,T])} \sum_{i=1}^{M} \left\| v_i + \nu \frac{\nabla \rho_i}{\rho_i} \right\|^2_{L^2(\rho_i dxdt)} \\
& \leq \delta^2 \times C_{\delta_0} \left(1 + \sum_{i=1}^{M} \mathcal{A}(\rho_i, v_i) \right), \qquad (3.48)
\end{aligned}
$$

grâce à (3.14). Ceci implique que l'on ait :

$$
\boxed{\partial_t v_i \in L^2_{loc}(]0,T[, L^2(\mathbb{T}^d)),} \qquad (3.49)
$$

et l'estimation :

$$
\sum_{i=1}^{M} \int_{\delta_0}^{T-\delta_0} \int_{\mathbb{T}^d} |\partial_t v_i|^2 \rho_i dxdt \leq C_{\delta_0} \left(1 + \sum_{i=1}^{M} \mathcal{A}(\rho_i, v_i) \right). \qquad (3.50)
$$

Remarque 3.5.2.1

Cette estimation suffit pour affirmer que $\partial_t \phi_i$ est une fonction pour chaque i, et donc que (3.43) a un sens presque partout. En effet, le lemme 3.5.2.1 ci-dessous (qui se prouve aisément par régularisation et caractérisation de $H^1(\mathbb{T}^d)$ en termes de séries de Fourier) s'applique et on obtient pour tout $\delta_0 \in]0, \frac{T}{2}[$, ν suffisamment petit et en notant $Q_{\delta_0} := [\delta_0, T-\delta_0] \times \mathbb{T}^d$:

$$
\begin{aligned}
\|\partial_t \phi_i\|^2_{L^2(Q_{\delta_0})} &\leq \left(\|\partial_t v_i\|^2_{L^2(Q_{\delta_0})} + \| -\frac{1}{2}|v_i|^2 + \nu \operatorname{div} v_i\|^2_{L^2([\delta_0, T-\delta_0], L^1(\mathbb{T}^d))} \right) \\
&\leq C \left(1 + \mathcal{A}(\rho_i, v_i) \right). \qquad (3.51)
\end{aligned}
$$

Lemme 3.5.2.1. *Soit Ψ une distribution sur $]0,T[\times\mathbb{T}^d$ telle que :*

- $\nabla \Psi \in L^2_{loc}(]0,T[\times\mathbb{T}^d)$,
- *pour tout $\delta_0 \in]0, \frac{T}{2}[$, il existe un réel positif A_{δ_0} tel que pour toute $f \in C_c^\infty(]\delta_0, T-\delta_0[)$, on a :*

$$
| < \Psi | f > | \leq A_{\delta_0} \|f\|_{L^2(0,T)}.
$$

Alors $\Psi \in L^2_{loc}(]0,T[, H^1(\mathbb{T}^d))$ et pour tout $\delta_0 \in]0, \frac{T}{2}[$:

$$
\|\Psi\|^2_{L^2(Q_{\delta_0})} \leq A^2_{\delta_0} + \|\nabla \Psi\|^2_{L^2(Q_{\delta_0})}.
$$

3.5.3 Intégrabilité de la pression

Rappelons l'équation liant p aux ϕ_i :

$$-p = \partial_t \phi_i + \frac{1}{2}|\nabla \phi_i|^2 - \nu \Delta \phi_i.$$

Or on a :

— L'estimation (3.49) permet d'assurer que pour tout i :

$$\partial_t \phi_i \in L^2_{loc}(]0,T[, H^1(\mathbb{T}^d)) \subset L^2_{loc}(]0,T[\times \mathbb{T}^d).$$

— Les estimations (3.31) et (3.49) impliquent grâce aux inégalités de Sobolev :

$$\nabla \phi_i = v_i \in H^1_{loc}(]0,T[\times \mathbb{T}^d)) \subset L^{2+\frac{4}{d-1}}_{loc}(]0,T[\times \mathbb{T}^d),$$

Donc (en dimension plus grande que 1, mais la dimension 1 ne pose évidemment pas de problème puisqu'alors $|\nabla \phi_i|^2$ est dans tous les $L^p_{loc}(]0,T[\times \mathbb{T}^d)$, $p < \infty$) :

$$|\nabla \phi_i|^2 \in L^{1+\frac{2}{d-1}}_{loc}(]0,T[\times \mathbb{T}^d).$$

— L'estimation (3.31) permet de voir :

$$\Delta \phi_i \in L^2_{loc}(]0,T[\times \mathbb{T}^d).$$

On obtient donc le théorème suivant :

Théorème 3.5.3.1. *En dimension $d \leq 3$:*

$$p \in L^2_{loc}(]0,T[\times \mathbb{T}^d).$$

En dimension $d > 3$:

$$p \in L^{1+\frac{2}{d-1}}_{loc}(]0,T[\times \mathbb{T}^d).$$

En toute dimension :

$$p \in L^2_{loc}(]0,T[\times \mathbb{T}^d) \oplus L^1_{loc}(]0,T[, W^{1,1}(\mathbb{T}^d)).$$

En particulier, pour tout i, $\rho_i \nabla p \in L^1_{loc}(]0,T[\times \mathbb{T}^d)$.

3.5.4 Seconde équation "phase par phase" vérifiée par la pression

On aimerait désormais obtenir un équivalent "phase par phase" de (3.41), c'est à dire obtenir une équation pour chaque i liant p, v_i et ρ_i. Ce type d'équations peut se révéler utile pour obtenir des estimations sur le champs de vitesse lorsque l'on relâche la contrainte de minoration sur les champs de densité. Ici, on dérive l'équation parce que les estimations que l'on a sont suffisantes, mais

on ne l'exploitera pas.
On calcule :

$$\partial_t(\rho_i v_i) + \mathbf{div}(\rho_i\, v_i \otimes v_i),$$

ce qui est licite car :

$$\begin{aligned}
\rho_i &\in L^\infty([0,T] \times \mathbb{T}^d), \\
\partial_t \rho_i = -\,\mathbf{div}(\rho_i v_i) - \nu\Delta\rho_i &\in L^2_{loc}(]0,T[, H^{-1}(\mathbb{T}^d)), \\
v_i &\in L^2_{loc}(]0,T[, H^1(\mathbb{T}^d)), \\
\partial_t v_i &\in L^2_{loc}(]0,T[\times\mathbb{T}^d).
\end{aligned}$$

Donc on a en dimension $d \leq 3$:

$$\begin{aligned}
\partial_t(\rho_i v_i) + \mathbf{div}(\rho_i\, v_i \otimes v_i) &= \rho_i(\partial_t v_i + (v_i \cdot \nabla)v_i) + v_i(\partial_t\rho_i + \mathrm{div}(\rho_i v_i)) \\
&= -\rho_i \nabla p + \nu(\rho_i \boldsymbol{\Delta} v_i - \Delta\rho_i v_i) \\
&= -\nabla(\rho_i p) + p\nabla\rho_i + \nu(\mathbf{div}(\rho_i D v_i) - \mathbf{div}(v_i \otimes \nabla\rho_i)).
\end{aligned}$$

3.6 Limite non visqueuse

3.6.1 Convergence des solutions dans la limite non visqueuse

On énonce et on prouve ici un théorème liant les solutions variationnelles des équations des flots multiphasiques avec bruit avec les solutions variationnelles des flots multiphasiques sans bruits.

Théorème 3.6.1.1. *Soient $(\nu_n)_n$ une suite de réels strictement positifs tendant vers 0, K un réel positif et $((\rho_i^n, v_i^n)_i)_n$ une suite de familles de couples respectivement solutions variationnelles des équations des flots multiphasiques avec bruit ν_n vérifiant :*

$$K^n := \sum_{i=1}^{M} \mathcal{A}(\rho_i^n, v_i^n) \leq K. \tag{3.52}$$

On suppose également qu'il existe $r > 0$ tel que pour chaque n et i :

$$\rho_i^n \geq r \tag{3.53}$$

On a alors :

1. *pour chaque i, $(\rho_i^n)_n$ est séquentiellement compacte pour la topologie faible étoile de $L^\infty(Q)$,*
2. *pour chaque i, $(v_i^n)_n$ est séquentiellement compacte pour la topologie forte de $L^2_{loc}(]0,T[\times\mathbb{T}^d)$ et la topologie faible de $L^2(Q)$,*
3. *toute valeur d'adhérence $(\rho_i, v_i)_i$ pour ces topologies est une solution variationnelle aux équations des flots multiphasiques sans bruit.*

Preuve : 1 découle directement de $\rho_i^n \leq 1$.
Pour 2, on remarque que si on choisit $\delta_0 \in]0, \frac{T}{2}[$, alors v_i^n est dans $H^1(]\delta_0, T-\delta_0[\times\mathbb{T}^d)$ et d'après (3.32) et (3.50), il existe C_{δ_0} tel que :

$$\sum_{i=1}^{M} \|v_i^n\|^2_{H^1(]\delta_0,T-\delta_0[\times\mathbb{T}^d)} \leq C_{\delta_0}(1+K),$$

ce qui donne la compacité forte. La compacité faible provient de l'hypothèse de majoration uniforme des actions et de l'hypothèse de minoration uniforme des densités.
Si on prend $(\rho_i, v_i)_i$ une famille de couples telle que :

$$\rho_i^n \to \rho^i \text{ dans } L^\infty(Q) \text{ faible-*},$$
$$v_i^n \to v_i \text{ dans } L^2_{loc}(]0,T[\times\mathbb{T}^d) \text{ fort},$$
$$v_i^n \to v_i \text{ dans } L^2(Q) \text{ faible},$$

alors on a immédiatement grâce à la minoration uniforme des densités :

$$\sum_{i=1}^{M} \rho_i \equiv 1,$$
$$\partial_t \rho_i + \operatorname{div}(\rho_i v_i) = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(]0,T[\times\mathbb{T}^d),$$
$$\mathcal{A}(\rho_i, v_i) < \infty.$$

Pour montrer que $(\rho_i, v_i)_i$ est solution variationnelle du problème sans bruit, commençons par étudier la convergence des multiplicateurs de Lagrange p^n et ϕ_i^n associés aux familles $(\rho_i^n, \phi_i^n)_i$.
Quitte à réextraire, (ϕ_i^n) converge au sens des ditributions. En effet, $\nabla\phi_i^n = v_i^n$ converge fortement dans $L^2_{loc}(]0,T[\times\mathbb{T}^d)$, $\partial_t\phi_i^n$ est borné dans $L^2_{loc}(]0,T[\times\mathbb{T}^d)$ grâce à (3.51), et on a pour tout n (cf (3.42)) :

$$< \phi_i^n | \varphi_0 >= 0.$$

(p^n) converge également à extraction près pour la topologie faible d'un certain $L^q_{loc}(]0,T[\times\mathbb{T}^d)$ avec $q > 1$ car les majorations permettant d'aboutir au théorème 3.5.3.1 sont uniformes en n pourvu que l'action soit uniformément bornée (cf (3.32) et (3.51)).
N'importe quelles limites p et ϕ_i sont naturellement de bons candidats comme multiplicateurs de Lagrange du problème limite. (3.43) passe à la limite au sens des distributions et permet d'obtenir :

$$\partial_t\phi_i + p + \frac{1}{2}|\nabla\phi_i|^2 = 0$$

presque partout puisque chacune de ces fontions est L^1_{loc}. En particulier, $\partial_t\phi_i + p$ est une fonction L^1 sur Q tout entier.
On affirme alors qu'il suffit de montrer que si $(\bar{\rho}_i, \bar{v}_i)_i$ est une autre famille de

couple vérifiant :

$$\sum_{i=1}^{M} \bar{\rho}_i \equiv 1,$$

$$\partial_t \bar{\rho}_i + \operatorname{div}(\bar{\rho}_i \bar{v}_i) = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(]0,T[\times \mathbb{T}^d),$$

$$\sum_{i=1}^{M} \mathcal{A}(\bar{\rho}_i, \bar{v}_i) < \infty,$$

$$\bar{\rho}_{i,0} = \rho_{i,0} \quad ; \quad \bar{\rho}_{i,T} = \rho_{i,T},$$

alors en notant $m_i := \rho_i v_i$ et $\bar{m}_i := \bar{\rho}_i \bar{v}_i$:

$$\sum_{i=1}^{M} \int_Q \left[\partial_t \phi_i + p\right] (\rho_i - \bar{\rho}_i) + \int_Q \nabla \phi_i \cdot (m_i - \bar{m}_i) = 0. \tag{3.54}$$

En effet, si tel est le cas :

$$\sum_{i=1}^{M} \int_Q \left[\partial_t \phi_i + p + |v_i|^2\right] \rho_i = \sum_{i=1}^{M} \int_Q \left[\partial_t \phi_i + p + < \nabla \phi_i | \bar{v}_i >\right] \bar{\rho}_i,$$

$$\text{i.e.} \quad \sum_{i=1}^{M} \mathcal{A}(\rho_i, v_i) + \frac{1}{2} \int_Q \|v_i - \bar{v}_i\|^2 \bar{\rho}_i = \sum_{i=1}^{M} \mathcal{A}(\bar{\rho}_i, \bar{v}_i),$$

et donc $(\rho_i, v_i)_i$ minimise bien l'action parmis les familles de couples satisfaisant les contraintes souhaitées.
Mais (3.54) peut par exemple être obtenue en régularisant $\rho_i - \bar{\rho}_i$ et $m_i - \bar{m}_i$ de la façon suivante en utilisant le lemme 3.6.1.1 ci-dessous.

Lemme 3.6.1.1. *Soit $\epsilon \in]0, \frac{T}{2}[$ et (ρ, m) satisfaisant :*

$$\rho \in L^\infty(Q),$$

$$m \in L^2(Q, \mathbb{R}^d),$$

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(m) = 0 \ \textit{dans} \ \mathcal{D}'(]0,T[\times \mathbb{T}^d),$$

$$\rho(0,\cdot) = \rho(T,\cdot) = 0.$$

Alors en définissant :

$$\rho_\epsilon(t,x) = \begin{cases} 0 & \textit{si } t \in [0,\epsilon] \cup [T-\epsilon, T], \\ \rho\left(\frac{T}{T-2\epsilon}(t-\epsilon), x\right) & \textit{sinon}, \end{cases}$$

et :

$$m_\epsilon(t,x) = \begin{cases} 0 & \textit{si } t \in [0,\epsilon] \cup [T-\epsilon, T], \\ \frac{T}{T-2\epsilon} m\left(\frac{T}{T-2\epsilon}(t-\epsilon), x\right) & \textit{sinon}, \end{cases}$$

on a encore :

$$\partial_t \rho_\epsilon + \operatorname{div}(m_\epsilon) = 0 \ \textit{dans} \ \mathcal{D}'(]0,T[\times \mathbb{R}^d). \tag{3.55}$$

Preuve : Il est facile de voir que $(\rho_\epsilon, m_\epsilon)$ satisfait (3.55) dans $\mathcal{D}'(]0,\epsilon[\times\mathbb{T}^d)$, $\mathcal{D}'(]\epsilon, T-\epsilon[\times\mathbb{T}^d)$ et $\mathcal{D}'(]T-\epsilon, T[\times\mathbb{T}^d)$. En particulier, si $\varphi \in C^\infty(\mathbb{T}^d)$, il existe un représentant de ρ tel que pour tout ϵ, la fonction :

$$t \mapsto \int_{\mathbb{T}^d} \rho_\epsilon(t,\cdot)\varphi$$

soit absolument continue sur $[0,\epsilon[\cup]\epsilon, T-\epsilon[\cup]T-\epsilon, T]$. Mais comme elle est continue en ϵ et $T-\epsilon$, elle est absolument continue sur $[0,T]$ tout entier. Sa dérivée satisfaisant :

$$\partial t \int_{\mathbb{T}^d} \rho_\epsilon(t,\cdot)\varphi = \int_{\mathbb{T}^d} \nabla\varphi \cdot m \quad \text{p.p. } t \in [0,T],$$

on a le résultat. □

On peut alors finir la preuve du théorème.

Fin de la preuve du théorème 3.6.1.1 : Le lemme 3.6.1.1 et une régularisation par convolution nous permettent d'obtenir une suite $((\rho_i^n - \bar{\rho}_i^n, m_i^n - \bar{m}_i^n)_i)_n$ telle que :

- pour tout i et n, $\rho_i^n - \bar{\rho}_i^n$ et $m_i^n - \bar{m}_i^n$ sont C^∞ et à support compact dans $]0,T[\times\mathbb{T}^d$,
- pour tout i et n, $(\rho_i^n - \bar{\rho}_i^n, m_i^n - \bar{m}_i^n)_i$ est solution de :
$$\partial_t(\rho_i^n - \bar{\rho}_i^n) + \operatorname{div}(m_i^n - \bar{m}_i^n) = 0,$$
- pour tout n :
$$\sum_{i=1}^M \rho_i^n - \bar{\rho}_i^n \equiv 0,$$
- pour tout i :
$$\rho_i^n - \bar{\rho}_i^n \to \rho_i - \bar{\rho}_i \text{ dans } L^\infty(]0,T[\times\mathbb{T}^d) \text{ faible-*},$$
$$m_i^n - \bar{m}_i^n \to m_i - \bar{m}_i \text{ dans } L^2(]0,T[\times\mathbb{T}^d) \text{ faible.}$$

  On a donc :
$$\sum_{i=1}^M \int_Q [\partial_t\phi_i + p]\,(\rho_i^n - \bar{\rho}_i^n) + \int_Q \nabla\phi_i \cdot (m_i^n - \bar{m}_i^n) = 0$$
  et :
$$\sum_{i=1}^M \int_Q [\partial_t\phi_i + p](\rho_i^n - \bar{\rho}_i^n) + \int_Q \nabla\phi_i \cdot (m_i^n - \bar{m}_i^n) \to \sum_{i=1}^M \int_Q [\partial_t\phi_i + p]\,(\rho_i - \bar{\rho}_i) + \int_Q \nabla\phi_i \cdot (m_i - \bar{m}_i),$$
  Ce qui donne le résultat.

□

Dans [5], Brenier montre que les solutions variationnelles fortement homogénéisées (c'est à dire satisfaisant $\rho_i \geq r > 0$ pour chaque i) du problème sans bruit sont uniques. En associant ce résultat au théorème 3.6.1.1, on déduit le résultat suivant :

Corollaire 3.6.1.1. *Soit $(\rho_i, v_i)_i$ une solution fortement homogénéisée au problème sans bruit. S'il existe une suite de conditions initiales et finales $((\rho_{i,0}^n, \rho_{i,T}^n)_i)_n$ positives et une suite (ν_n) de réels strictement positifs tendant vers 0 telles que :*

—
$$\forall n, \quad \sum_{i=1}^{M} \rho_{i,0}^n = \sum_{i=1}^{M} \rho_{i,T}^n = 1,$$

—
$$\forall i, \quad \rho_{i,0}^n \to \rho_{i,0} \text{ et } \rho_{i,T}^n \to \rho_{i,T} \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{T}^d),$$

— *il existe des solutions (ρ_i^n, v_i^n) uniformément fortement homogénéisé au problème avec bruit ν_n d'action uniformément bornée.*

Alors la suite (ρ_i^n, v_i^n) converge dans son ensemble vers (ρ_i, v_i) pour les convergences définies dans le théorème 3.6.1.1 ci-dessus.

Preuve : Le théorème 3.6.1.1 nous assure qu'une telle suite $((\rho_i^n, v_i^n)_i)_n$ est séquentiellement compacte pour les topologies faible-* de L^∞ et L^2. Soit $(\bar{\rho}_i, \bar{m}_i)_i$ une de ces valeurs d'adhérence. Il suffit de montrer $(\bar{\rho}_i, \bar{m}_i)_i = (\rho_i, v_i)_i$ pour assurer la convergence de la suite dans son ensemble, et par le résultat d'unicité de Brenier, il suffit de montrer $\rho_{i,0} = \bar{\rho}_{i,0}$ pour tout i.
Travaillons à i fixé. Choisissons $\varphi \in C^\infty(\mathbb{T}^d)$ et étudions la suite de fonctions de $[0, T]$ dans $\mathbb{R}$:

$$f_n : t \mapsto \int_{\mathbb{T}^d} \varphi(x) \rho_i^n(t, x) dx$$

qui est bien définie pour tout t et absolument continue pourvu que l'on ait choisi le bon représentant pour ρ_i^n. Les f_n sont uniformément bornées et si $0 \leq s < t \leq T$, on a :

$$\begin{aligned} |f_n(t) - f_n(s)| &= \left| \int_s^t \int_{\mathbb{T}^d} (\nabla\varphi \cdot v_i^n - \nu_n \Delta\varphi) \rho_i^n \right| \\ &\leq C|t-s|^{\frac{1}{2}} \|\nabla\varphi\|_{L^2} \mathcal{A}(\rho_i^n, v_i^n) + \nu_n |t-s| \|\Delta\varphi\|_{L^1}, \end{aligned}$$

donc f_n est uniformément équicontinue. donc quitte à réextraire et à choisir le bon représentant pour $\bar{\rho}_i$:

$$\int_{\mathbb{T}^d} \varphi \rho_i^n(t, \cdot) \to \int_{\mathbb{T}^d} \varphi \bar{\rho}_i(t, \cdot)$$

uniformément sur $[0, T]$. Les convergences distributionnelles des conditions initiales et finales permettent alors de conclure. □

3.7 Without the below bound on ρ_i

We look in this pargraph what remains when we abandon the uniform below bound on ρ_i. The Sobolev regularity of the square root of ρ_i let us define some spatial regularity for our velocity fields. Then we can find some kind of Sobolev estimation for the velocity fields.

3.7.1 Definition of a weighted Sobolev space

We define a notion of spatial derivative on Q endowed with the measure $\rho dxdt$, where ρ is a nonnegative measurable application whose square root is in $L^2([0,T],H^1(\mathbb{T}^d))$.

Définition 3.7.1.1. Let $f \in L^2_{loc}(]0,T[\times\mathbb{T}^d,\rho dxdt)$. We say that f belongs to the space $L^2_{loc}(]0,T[,H^1(\mathbb{T}^d,\rho dx))$ provided it exists $g \in L^2_{loc}(]0,T[\times\mathbb{T}^d;\mathbb{R}^d,\rho dxdt)$ such as in a distributionnal sense :

$$\nabla(f\rho) = 2f\sqrt{\rho}\nabla\sqrt{\rho} + g\rho. \tag{3.56}$$

Such a g is unique in $L^2_{loc}(]0,T[\times\mathbb{T}^d,\rho dxdt)$, we denote it by :

$$\nabla_\rho f.$$

Proof of uniqueness of g : If g_1 and g_2 are two (class of) functions of the space $L^2_{loc}(]0,T[\times\mathbb{T}^d;\mathbb{R}^d,\rho dxdt)$ which satisfy (3.57), then the (class of) $L^1_{loc}(]0,T[\times\mathbb{T}^d)$ functions $g_1\rho$ and $g_2\rho$ are equal. As a consequence, using Radon-Nikodym theorem, $g_1 = g_2$ ρ-almost everywhere, which gives the result. □

Then we give the correspondig definition for vector fields.

Définition 3.7.1.2. Let $\xi \in L^2_{loc}(]0,T[\times\mathbb{T}^d;\mathbb{R}^d,\rho dxdt)$. We say that ξ belongs to the space $L^2_{loc}(]0,T[,H^1(\mathbb{T}^d;\mathbb{R}^d,\rho dx))$ provided each of its coordinates is in $L^2_{loc}(]0,T[\times\mathbb{T}^d,\rho dxdt)$. We the write :

$$\mathrm{D}_\rho\xi := \begin{pmatrix} \nabla_\rho\xi_1 \\ \vdots \\ \nabla_\rho\xi_d \end{pmatrix}.$$

We have the following easy caracterisation :

Propriété 3.7.1.1. Let $\xi \in L^2_{loc}(]0,T[\times\mathbb{T}^d;\mathbb{R}^d,\rho dxdt)$. $\xi \in L^2_{loc}(]0,T[,H^1(\mathbb{T}^d;\mathbb{R}^d,\rho dx))$ if and only if it exists $\Psi \in L^2_{loc}(]0,T[\times\mathbb{T}^d;\mathbb{R}^{d\times d},\rho dxdt)$ such as, in the sense of distribution :

$$\mathrm{D}(\xi\rho) = \Psi\rho + 2\xi\sqrt{\rho}\otimes\nabla\sqrt{\rho}. \tag{3.57}$$

We then have :

$$\Psi = \mathrm{D}_\rho\xi.$$

In particular, such a Ψ is unique.

3.7.2 Good modifications of sequences of approximate Lagrange multipliers

Définition 3.7.2.1. We call a sequence of approximate Lagrange multipliers (tacitly associated with the family of minimizers $(\rho_i,v_i)_{i\in[\![1,M]\!]}$) every sequence $(\epsilon_n,p^n,\phi_i^n)_{i\in[\![1,M]\!],\,n\in\mathbb{N}}$ with :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \epsilon_n > 0,$$
$$\forall n\in\mathbb{N},\ p^n \in C^0(Q),$$
$$\forall n\in\mathbb{N},\ \forall i\in[\![1,M]\!],\ \phi_i^n \in C^2(Q),$$

such as :

$$\epsilon_n \text{ decrease to } 0,$$

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \partial_t \phi_i^n + p^n - \nu \Delta \phi_i^n + \frac{1}{2}|\nabla \phi_i^n|^2 \leq 0, \tag{3.58}$$

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{i=1}^{M} \frac{1}{2} \int_Q |v_i - \nabla \phi_i^n|^2 \rho_i + \int_Q |\partial_t \phi_i^n + p^n + \frac{1}{2}|\nabla \phi_i^n|^2 - \nu \Delta \phi_i^n| \rho_i \leq \epsilon_n. \tag{3.59}$$

Remarque 3.7.2.1

According to property 3.2.2.1, the set of sequences of approximate Lagrange multipliers is nonempty.

Définition 3.7.2.2. We say that a sequence $(\tilde{\epsilon}_n, \tilde{p}^n, \tilde{\phi}_i^n)$ is a good modification of the sequence of approximate Lagrange multipliers $(\epsilon_n, p^n, \phi_i^n)$ if :

— $(\tilde{\epsilon}_n)$ is a subsequence of (ϵ_n), namely there exists an increasing function $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ such as $\tilde{\epsilon}_n = \epsilon_{\varphi(n)}$,

— for all $n \in \mathbb{N}$, there exist $N \in \mathbb{N}^*$, some positive numbers $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ and some integers $\varphi(n) \leq n_1 < \cdots < n_N$ such as :

$$\sum_{k=1}^{N} \lambda_k = 1,$$

$$\tilde{p}^n = \sum_{k=1}^{N} \lambda_k p^{n_k},$$

$$\forall i \in [\![1, M]\!],\ \tilde{\phi}_i^n = \sum_{k=1}^{N} \lambda_k \phi_i^{n_k}.$$

Proposition 3.7.2.1. *A good modification $(\tilde{\epsilon}_n, \tilde{p}^n, \tilde{\phi}_i^n)$ of a sequence of approximate Lagrange multipliers $(\epsilon_n, p^n, \phi_i^n)$ is a sequence of approximate Lagrange multipliers.*

Proof: Obviously, $(\tilde{\epsilon}_n)$ decrease to zero.

Then, if $n \in \mathbb{N}$ and $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$, $n_1, \ldots, n_N$ are given by definition 3.7.2.2, we have for each i :

$$\tilde{\phi}_i^n = |\sum_{k=1}^{N} \lambda_k \phi_i^{n_k}|^2 \leq \sum_{k=1}^{N} \lambda_k |\nabla \phi_i^{n_k}|^2.$$

Thus :

$$\begin{aligned}
\partial_t \tilde{\phi}_i^n + \tilde{p}^n - \nu \Delta \tilde{\phi}_i^n + \frac{1}{2}|\nabla \tilde{\phi}_i^n|^2 &= \sum_{k=1}^{N} \left[\lambda_k \partial_t \phi_i^{n_k} + \lambda_k p^{n_k} - \lambda_k \nu \Delta \phi_i^{n_k}\right] + \frac{1}{2}|\sum_{k=1}^{N} \lambda_k \nabla \phi_i^{n_k}|^2 \\
&\leq \sum_{k=1}^{N} \lambda_k \big(\partial_t \phi_i^{n_k} + p^{n_k} - \nu \Delta \phi_i^{n_k} + \frac{1}{2}|\nabla \phi_i^{n_k}|^2\big) \\
&\leq 0.
\end{aligned}$$

Eventually :

$$\sum_{i=1}^{M}\frac{1}{2}\int_Q |v_i - \nabla\tilde{\phi}_i^n|^2\rho_i + \int_Q |\partial_t\tilde{\phi}_i^n + \tilde{p}^n + \frac{1}{2}|\nabla\tilde{\phi}_i^n|^2 - \nu\Delta\tilde{\phi}_i^n|\rho_i$$
$$= \sum_{i=1}^{M}\frac{1}{2}\int_Q |v_i|^2\rho_i - \int_Q \left(\partial_t\tilde{\phi}_i^n + \tilde{p}^n - \nu\Delta\tilde{\phi}_i^n + v_i\cdot\nabla\tilde{\phi}_i^n\right)\rho_i$$
$$= \sum_{i=1}^{M}\sum_{k=1}^{N}\lambda_k\left(\frac{1}{2}\int_Q |v_i|^2\rho_i - \int_Q \left(\partial_t\phi_i^{n_k} + p^{n_k} - \nu\Delta\phi_i^{n_k} + v_i\cdot\nabla\phi_i^{n_k}\right)\rho_i\right)$$
$$= \sum_{k=1}^{N}\lambda_k\sum_{i=1}^{M}\frac{1}{2}\int_Q |v_i - \nabla\phi_i^{n_k}|^2\rho_i + \int_Q |\partial_t\phi_i^{n_k} + p^{n_k} + \frac{1}{2}|\nabla\phi_i^{n_k}|^2 - \nu\Delta\phi_i^{n_k}|\rho_i$$
$$\leq \sum_{k=1}^{N}\lambda_k\epsilon_{n_k} \leq \sum_{k=1}^{N}\lambda_k\epsilon_{\varphi(n)} = \tilde{\epsilon}_n.$$

□

3.7.3 Translation of the velocity fields and variationnal inequality

We want to show that we can extend the vector fields $(v_i)_{i=1,\dots,M}$ almost everywhere on $\mathbb{T}^d$ such as for each $a\in\mathbb{T}^d$:

$$(t,x)\mapsto v_i(t,x+a)\in L^2_{loc}(]0,T[\times\mathbb{T}^d,\rho_i).$$

The starting points is the following calculus (already exposed in a general case in 3.4.1). If $h\in C_c^\infty(]0,T[)$, $a\in\mathbb{R}^d$ and $(\epsilon_n,p^n,\phi_i^n)$ is a sequence of approximate Lagrange multipliers, then $\phi_i^n(t,x+h(t)a)-\phi_i^n\in C_c^2(]0,T[\times\mathbb{T}^d)$ and testing it against $0=\partial_t(\rho_i)+\mathrm{div}(\rho_i v_i)+\nu\Delta\rho_i$, we find :

$$\int_Q \left[\partial_t\phi_i^n(t,x+h(t)a) - \nu\Delta\phi_i^n(t,x+h(t)a) + \nabla\phi_i^n(t,x+h(t)a)\cdot(v_i+h'(t)a)\right]\rho_i$$
$$= \int_Q \left[\partial_t\phi_i^n(t,x) - \nu\Delta\phi_i^n(t,x) + \nabla\phi_i^n(t,x)\cdot v_i\right]\rho_i.$$

Summing on i, adding on each side $\int_Q p^n(t,x+h(t)a)=\int_Q p^n(t,x)$, and using (3.12) and (3.13) we get :

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{M}\int_Q |v_i|^2\rho_i + \int_Q |\nabla\phi_i^n(t,x+h(t)a) - (v_i+h'(t)a)|^2\rho_i$$
$$\leq \epsilon_n + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{M}\int_Q |v_i+h'(t)a|^2\rho_i. \tag{3.60}$$

In particular, for all $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{M}\int_Q |v_i + h'(t)a|^2\rho_i - \int_Q |v_i|^2\rho_i \geq -\epsilon_n,$$

$$\text{i.e. letting } n \to \infty, \quad \sum_{i=1}^{M}\int_Q h'(t)a \cdot v_i\rho_i + \frac{1}{2}|a|^2\int_0^T |h'(t)|^2 dt \geq 0.$$

But then it is clear that :

$$\sum_{i=1}^{M}\int_Q h'(t)a \cdot v_i\rho_i = 0,$$

and (3.60) becomes :

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{M}\int_Q |\nabla\phi_i^n(t, x+h(t)a) - (v_i+h'(t)a)|^2\rho_i \leq \epsilon_n + \frac{1}{2}|a|^2\int_0^T |h'(t)|^2 dt \quad (3.61)$$

But now we define a family of smooth functions with compact support on $]0, T[$, indexed by $\delta_0 \in]0, \frac{T}{2}[$ such as :

$$\text{Supp}(h_{\delta_0}) \in \left]\frac{\delta_0}{2}, T - \frac{\delta_0}{2}\right[,$$
$$h_{\delta_0} \equiv 1 \quad \text{on } [\delta_0, T-\delta_0].$$

For each $\delta_0 \in]\delta_0, T-\delta_0[$, we get :

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{M}\int_{Q_{\delta_0}} |\nabla\phi_i^n(t, x+a) - v_i|^2\rho_i \leq \epsilon_n + \frac{1}{2}|a|^2\int_0^T |h'_{\delta_0}(t)|^2 dt. \quad (3.62)$$

3.7.4 Compacity of the sequence of translated vector fields

(3.62) gives L^2_{loc} estimates on the translated approximated Lagrange multipliers $\nabla\phi_i^n(t, x+a)$. Indeed, we easily deduce from it :

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{M}\int_{Q_{\delta_0}} |\nabla\phi_i^n(t, x+a)|^2\rho_i \leq \epsilon_n + \sum_{i=1}^{M}\int_{Q_{\delta_0}} |v_i|^2\rho_i + |a|^2\int_0^T |h'_{\delta_0}(t)|^2 dt \quad (3.63)$$

As a consequence, for each $a \in \mathbb{T}^d$ and $i \in [\![1, M]\!]$, there exists some $L^2_{loc}(Q, \rho_i)$ weak accumulation points for $\nabla\phi_i^n(t, x+a)$. Let us prove the following result :

Proposition 3.7.4.1. *If a is a point of $\mathbb{T}^d$ and if $(\epsilon_n, p^n, \phi_i^n)$ is a sequence of approximate Lagrange multipliers, then there exists a good modification $(\tilde\epsilon_n, \tilde p^n, \tilde{\phi}_i^n)$ of $(\epsilon_n, p^n, \phi_i^n)$ such as for each i, $(\nabla\tilde{\phi}_i^n(t, x+a))$ converges in strong $L^2_{loc}(]0, T[\times\mathbb{T}^d, \rho_i)$ and ρ_i-almost everywhere.*
In particular, for each i, $(\nabla\tilde{\phi}_i^n)$ converges λ^{d+1}-almost everywhere on the set $-a + \{\rho_i > 0\}$.
Moreover, these convergence are still valid up to good modifications of $(\tilde\epsilon_n, \tilde p^n, \tilde{\phi}_i^n)$.

Proof: Thanks to (3.63), up to an extraction (which is a good modification), we can suppose $(\epsilon_n, p^n, \phi_i^n)$ such as $(\nabla\phi_i^n(t, x+a))$ weakly converge in $L^2_{loc}(]0, T[\times\mathbb{T}^d, \rho_i)$. But by Mazur's lemma, up to a good modification, we can suppose $(\epsilon_n, p^n, \phi_i^n)$ such as the convergence of $(\nabla\phi_i^n(t, x+a))$ is strong in $L^2_{loc}(]0, T[\times\mathbb{T}^d, \rho_i)$. Up to a new extraction, we get the ρ_i-almost everywhere convergence.
According to lemma 3.7.4.1 bellow it is the same thing as $(\nabla\phi_i^n(t, x+a))$ converges λ^{d+1}-almost everywhere on $\{\rho_i > 0\}$, and by invariance of λ^{d+1} under translations, it is the same thing as $(\nabla\phi_i^n)$ converges λ^{d+1} on $-a+\{\rho_i > 0\}$.
Obviously, we can reiterate this procedure for each i successively.
The last assertion of the proposition is clear. $\square$

Lemme 3.7.4.1. *Let $\rho \ll \lambda^{d+1}$ a positive Radon measure on Q. Calling :*

$$f := \frac{d\rho}{d\lambda^{d+1}},$$

if $A \in \mathcal{B}(Q)$:

$$\rho(A) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda^{d+1}\Big(A \cap \{f > 0\}\Big) = 0.$$

Proof: If $\lambda^{d+1}(A \cap \{f > 0\}) = 0$.
$\rho \ll \lambda^{d+1}$ imply $\rho\Big(A \cap \{f > 0\}\Big) = 0$, and thus $\rho(A) = 0$.
If $\rho(A) = 0$.
We have the layer-cake formula :

$$0 = \int_A f(t, x)dxdt = \int_0^{+\infty} \lambda^{d+1}\Big(A \cap \{f > a\}\Big)da.$$

As a consequence, as $a \mapsto \lambda^{d+1}(A \cap \{f > a\}$ is an upper semi-continuous nonincreasing function of null integral on $[0, +\infty]$, it is uniformly null and :

$$\lambda^{d+1}(A \cap \{f > 0\}) = 0.$$

$\square$

As a consequence of proposition 3.7.4.1 and using a diagonal argument, we can easily show the following result :

Proposition 3.7.4.2. *If A is a countable set of points of $\mathbb{T}^d$ and if $(\epsilon_n, p^n, \phi_i^n)$ is a sequence of approximate Lagrange multipliers, then there exists a good modification $(\tilde{\epsilon}_n, \tilde{p}^n, \tilde{\phi}_i^n)$ of $(\epsilon_n, p^n, \phi_i^n)$ such as for all $a \in A$ and for each i, $(\nabla\tilde{\phi}_i^n(t, x+a))$ converges in strong $L^2_{loc}(]0, T[\times\mathbb{T}^d, \rho_i)$ and ρ_i-almost everywhere.*
In particular, for each i, $(\nabla\tilde{\phi}_i^n)$ converges λ^{d+1}-almost everywhere on :

$$\bigcup_{a\in A} \big(-a + \{\rho_i > 0\}\big).$$

Moreover, these convergence are still valid up to good modifications of $(\tilde{\epsilon}_n, \tilde{p}^n, \tilde{\phi}_i^n)$.

Proof: Let $(a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ an enumeration of the elements of A. We tell

$$(\epsilon_n^0, p^{0,n}, \phi_i^{0,n}) := (\epsilon_n, p^n, \phi_i^n).$$

Then if $k \in \mathbb{N}^*$ and $(\epsilon_n^{k-1}, p^{k-1,n}, \phi_i^{k-1,n})$ is constructed, (3.63) is valid with $(\epsilon_n^{k-1}, p^{k-1,n}, \phi_i^{k-1,n})$ as sequence of approximate Lagrange multipliers and a_k as point of $\mathbb{T}^d$. So we can apply proposition (3.7.4.1) and build $(\epsilon_n^k, p^{k,n}, \phi_i^{k,n})$ a good modification of $(\epsilon_n^{k-1}, p^{k-1,n}, \phi_i^{k-1,n})$ such as $(\nabla\phi_i^{k,n}(t, x+a_k))$ converges in strong $L^2_{loc}(]0,T[\times\mathbb{T}^d, \rho_i)$ and ρ_i-almost everywhere.
Then we can check that the sequence $(\epsilon_n^n, p^{n,n}, \phi_i^{n,n})_{n\in\mathbb{N}}$ has the following property : for each $k \in \mathbb{N}$, $(\epsilon_n^n, p^{n,n}, \phi_i^{n,n})_{n\geq k}$ is a good modification of $(\epsilon_n^k, p^{k,n}, \phi_i^{k,n})$.
The conclusion follows easily. □

Now we show that a certain choice for the set A leads to :

$$\lambda^{d+1}\Big(Q\backslash \bigcup_{a\in A}\big(-a+\{\rho_i>0\}\big)\Big)=0.$$

Proposition 3.7.4.3. *Let $\rho = f dxdt \ll \lambda^{d+1}$ a Radon measure on Q whose temporal marginal is such as :*

$$\lambda \ll \pi_t \sharp \rho. \tag{3.64}$$

If we define for $n \in \mathbb{N}$:

$$A_n := \Big\{\Big(\frac{k_1}{2^n},\dots,\frac{k_d}{2^n}\Big)\in\mathbb{T}^d,\ (k_1,\dots,k_d)\in\mathbb{N}^d\Big\}$$

and

$$A := \bigcup_n A_n,$$

then :

$$\lambda^{d+1}\Big(Q\backslash \bigcup_{a\in A}\big(-a+\{f>0\}\big)\Big)=0.$$

Proof: Let $\delta > 0$, we will show that :

$$\lambda^{d+1}\Big(\bigcup_{a\in A}\big(-a+\{f>0\}\big)\Big)\geq T(1-\delta).$$

We say that the interval $[t-r, t+r]$ is δ-admissible provided :

$$t\in]0,T[,$$

$$\exists n\in\mathbb{N},\quad r=\frac{1}{2^n}, \tag{3.65}$$

$$[t-r,t+r]\subset[0,T], \tag{3.66}$$

$$\exists x\in\mathbb{T}^d,\quad \frac{\lambda^{d+1}\big(C(t,x,r)\cap\{f>0\}\big)}{\lambda^{d+1}\big(C(t,x,r)\big)}\geq 1-\delta, \tag{3.67}$$

where $C(t,x,r)$ stands for the $(d+1)$-dimensionnal cube of Q whose center is (t,x) and whose length is $2r$.
Then we define :

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &:= \{\delta\text{-admissible intervals}\}, \\ K &:= \{t,\ \exists r \text{ such as } [t-r,t+r] \in \mathcal{F}\}, \\ N &:= [0,T] \backslash K. \end{aligned}$$

If $E \in \mathcal{B}(Q)$, $\mathrm{Dens}(E)$ stands for the set of density points of E. We recall that :

$$\lambda^{d+1}\big(E \Delta \,\mathrm{Dens}(E)\big) = 0.$$

and consequetly, as $\rho \ll \lambda^{d+1}$:

$$\rho\big(E \Delta \,\mathrm{Dens}(E)\big) = 0.$$

First of all, if $(t,x) \in \mathrm{Dens}(\{f>0\})$ with $t>0$, then the set of those $r \in \mathbb{R}_+^*$ such that (3.67) is valid contains an interval of type $]0,\eta[$ with $\eta > 0$. So, the set of those r such as (3.65) and (3.66) are valid **admits 0 as an accumulation point**. In particular, it is nonempty so that $t \in K$. Thus :

$$\mathrm{Dens}(\{f>0\}) \subset K \times \mathbb{T}^d.$$

We deduce from it that $\lambda(\mathbf{N}) = \mathbf{0}$. Indeed :

$$\begin{aligned} \pi_t \sharp \rho(N) &= \rho(N \times \mathbb{T}^d) \\ &= \rho\Big(\big(N \times \mathbb{T}^d\big) \cap \{f>0\}\Big) \\ &= \rho\Big(\big(N \times \mathbb{T}^d\big) \cap \mathrm{Dens}\left(\{f>0\}\right)\Big) = 0 \end{aligned}$$

and the claim follows from (3.64). In particular, K is λ-measurable.
So the conditions on $\mathcal{F}$ are satisfied for us to use Vitali's property of the Lebesgue measure and find an at most countable family of $(t_k, r_k = 2^{-n_k}, x_k)_k$ such as $\{[t_k - r_k, t_k + x_k]\}$ is disjoint, for each n, (3.65), (3.66) and (3.67) are satisfied, and :

$$\lambda\Big(K \backslash \bigcup_k [t_k - r_k, t_k + r_k]\Big) = \lambda\Big([0,T] \backslash \bigcup_n [t_k - r_k, t_k + r_k]\Big) = 0.$$

Now,

$$\begin{aligned} &\lambda^{d+1}\Big(\bigcup_{a\in A}\big(-a + \{f>0\}\big)\Big) \\ &\quad = \sum_k \lambda^{d+1}\Big([t_k - r_k, t_k + r_k] \times \mathbb{T}^d \bigcap \bigcup_{a \in A}\big(-a+\{f>0\}\big)\Big) \\ &\quad = \sum_k \lambda^{d+1}\Big(\bigcup_{a\in A}\Big[[t_k - r_k, t_k + r_k] \times \mathbb{T}^d \bigcap \big(-a + \{f>0\}\big)\Big]\Big) \\ &\quad \geq \sum_k \lambda^{d+1}\Big(\bigcup_{a \in A_{n_k+1}} -a + \{f>0\} \cap C(t_k, r_k, x_k)\Big). \end{aligned}$$

But the union is almost disjoint (it intersects on the d-dimensional faces of the cubes, a countable number of times) so that using the Lebesgue mesure invariance under transations :

$$
\begin{aligned}
\lambda^{d+1}\Big(\bigcup_{a\in A}\big(-a+\{f>0\}\big)\Big) &\geq \sharp A_{n_k+1}\times\lambda^{d+1}\big(\{f>0\}\cap C(t_k,r_k,x_k)\big)\\
&\geq \sharp A_{n_k+1}\times(1-\delta)\lambda^{d+1}\big(C(t_k,r_k,x_k)\big)\\
&=(1-\delta)\sum_k\lambda^{d+1}\Big(\bigcup_{a\in A_{n_k+1}}\big(-a+C(t_k,r_k,x_k)\big)\Big)\\
&=(1-\delta)\sum_k\lambda^{d+1}\Big([t_k-r_k,t_k+r_k]\times\mathbb{T}^d\Big)\\
&=T(1-\delta),
\end{aligned}
$$

which was the claim. □

As a consequence of property 3.2.2.1, proposition 3.7.4.2 and proposition 3.7.4.3, we have the following theorem :

Théorème 3.7.4.1. *Let A defined as in proposition 3.7.4.3.*
There exists $(\epsilon_n,p^n,\phi_i^n)_n$ a sequence of approximate Lagrange multipliers such as for each i, $(\nabla\phi_i^n)$ converges λ^{d+1}-almost everywhere on Q. If we denote by $\bar v_i$ the pointwise limit, $\bar v_i=v_i$ ρ_i-almost everywhere, so that we can replace v_i by $\bar v_i$ in (3.59) *and* (3.62)*. We also have for each $a\in A$ and each i :*

$$\nabla\phi_i^n(t,x+a)\underset{n\to\infty}{\to}\bar v_i(t,x+a)\ \text{in}\ L^2_{loc}(]0,T[\times\mathbb{T}^d,\rho_i).$$

Moreover, for each $a\in\mathbb{T}^d$,

$$\nabla\phi_i^n(t,x+a)\underset{n\to\infty}{\rightharpoonup}\bar v_i(t,x+a)\ \text{in}\ w\text{-}L^2_{loc}(]0,T[\times\mathbb{T}^d,\rho_i).$$

Finally, for all $a\in\mathbb{T}^d$, we can pass to the limit in (3.62) *and obtain :*

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^M\int_{Q_{\delta_0}}|\bar v_i(t,x+a)-\bar v_i(t,x)|^2\rho_i\leq\frac{1}{2}|a|^2\int_0^T|h'_{\delta_0}(t)|^2dt. \tag{3.68}$$

Proof: Thanks to property 3.2.2.1, it exists $(\epsilon_n,p^n,\phi_i^n)_n$ a sequence of approximate Lagrange multipliers, which thanks to proposition 3.7.4.2, up to a good modification, is such as for all $a\in A$ and for each i, $(\nabla\phi_i^n(t,x+a))$ converges in strong $L^2_{loc}(]0,T[\times\mathbb{T}^d,\rho_i)$ and ρ_i-almost everywhere, which imply that $(\nabla\phi_i^n)$ converges λ^{d+1}-almost everywhere in a set of full measure thanks to proposition 3.7.4.3 ((3.64) being implied by the conservation of mass). Let $\bar v_i$ the pointwise limit of $(\nabla\phi_i^n)$.
$(\nabla\phi_i^n)$ converges in $L^2(Q)$ to v_i and λ^{d+1}-almost everywhere to $\bar v_i$. As $\rho_i\ll\lambda^{d+1}$, $v_i=\bar v_i$ ρ_i-almost everywhere.
For all $a\in A$ and ρ_i-almost all (t,x), $(\nabla\phi_i^n(t,x+a))$ converges to $\bar v_i(t,x+a)$ and so the L^2_{loc} limit of $(\nabla\phi_i^n(t,x+a))$ is well $\bar v_i(t,x+a)$.
In a same way, if $a\in\mathbb{T}^d$, $(\nabla\phi_i^n(t,x+a))$ is compact in weak-$L^2_{loc}(]0,T[\times\mathbb{T}^d,\rho_i)$ and converges λ^{d+1}-almost everywhere (and so ρ_i-almost everywhere) to $\bar v_i(t,x+$

a). By Mazur's lemma, the L^2_{loc} weak accumulation point is unique and the sequence weakly converges in its whole to $\bar{v}_i(t, x + a)$.
The last claim is a consequence of the fact that once $\bar{v}_i$ is constructed, for each $a \in \mathbb{T}^d$, there exists a sequence of approximate Lagrange multipliers such as $(\nabla \phi_i^n(t, x+a))$ converges in strong-$L^2_{loc}(]0, T[\times \mathbb{T}^d, \rho_i)$ to $\bar{v}_i(t, x+a)$ (using proposition 3.7.4.1 to the almost everywhere converging sequence). So we can pass to the limit in (3.62) written with this very sequence, and obtain (3.68). □

3.7.5 Inequality (3.68) and Sobolev regularity

We are now able to prove that for each i, the velocity field v_i is in the space $L^2_{loc}(]0, T[, H^1(\mathbb{T}^d; \mathbb{R}^d, \rho_i dx))$ defined in definition 3.7.1.2.

Théorème 3.7.5.1. *For each $i \in [\![1, M]\!]$, the vector field v_i is in the weighted Sobolev space $L^2_{loc}(]0, T[, H^1(\mathbb{T}^d; \mathbb{R}^d, \rho_i dx))$. Moreover, if $e \in \mathbb{R}^d$ and $\delta_0 \in]0, \frac{T}{2}[$:*

$$\frac{\bar{v}_i(t, x + \delta e) - \bar{v}_i(t, x)}{\delta} \underset{\delta \to 0}{\rightharpoonup} \mathrm{D}_{\rho_i} v_i \cdot e \text{ in } w\text{-}L^2(Q_{\delta_0}, \rho_i),$$

and as a consequence :

$$\sum_{i=1}^{M} \int_{Q_{\delta_0}} |\mathrm{D}_{\rho_i} v_i|^2 \rho_i \leq \frac{d}{2} \int_0^T |h'_{\delta_0}(t)|^2 dt. \tag{3.69}$$

Proof: For all $\delta \in \mathbb{T}^1 \backslash \{0\}$, applying (3.68) to δe and $\delta_0 \in]0, \frac{T}{2}[$, we get :

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{M} \int_{Q_{\delta_0}} \left| \frac{\bar{v}_i(t, x + \delta e) - \bar{v}_i(t, x)}{\delta} \right|^2 \rho_i \leq \frac{1}{2} |e|^2 \int_0^T |h'_{\delta_0}(t)|^2 dt.$$

As a consequence, the family of functions :

$$g_\delta^e : (t, x) \mapsto \frac{\bar{v}_i(t, x + \delta e) - \bar{v}_i(t, x)}{\delta}$$

is bounded in $L^2(Q_{\delta_0}); \mathbb{R}^d, \rho_i)$. Let g^e a weak limit of $(g_\delta^e)_{\delta \in \mathbb{T}^1 \backslash \{0\}}$ when δ tends to zero and $\delta_n \in \mathbb{T}^1 \backslash \{0\}$, converging to zero, such as $g_{\delta_n}^e \rightharpoonup g^e$. We will prove that in the sense of distributions in $I \times \mathbb{T}^d$:

$$\mathrm{D}(\bar{v}_i \rho_i) \cdot e = g^e \rho_i + 2(\bar{v}_i \sqrt{\rho_i} \otimes \nabla \sqrt{\rho_i}) \cdot e, \tag{3.70}$$

whose validity for each $e \in \mathbb{R}^d$ easily imply (3.57) with :

$$\Psi = (g_{e_1}, \ldots, g_{e_d}),$$

where $e_1, \ldots, e_d$ stand for the canonical basis of $\mathbb{R}^d$.

Let $\varphi \in C_c^\infty(I \times \mathbb{T}^d; \mathbb{R}^d)$. We denote by $T_a f(t,x) := f(t, x+a)$.

$$
\begin{aligned}
\int_{I\times\mathbb{T}^d} \varphi \cdot g^e \rho_i &= \lim_{n\to\infty} \int_{I\times\mathbb{T}^d} \varphi \cdot g^e_{\delta_n} \rho_i \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_{I\times\mathbb{T}^d} \varphi \cdot \frac{T_{\delta_n e}\bar{v}_i - \bar{v}_i}{\delta_n} \rho_i \\
&= -\lim_{n\to\infty} \int_{I\times\mathbb{T}^d} \bar{v}_i \cdot \frac{\varphi\rho_i - T_{-\delta_n e}\varphi T_{-\delta_n e}\rho_i}{\delta_n} \\
&= -\lim_{n\to\infty} \int_{I\times\mathbb{T}^d} \bar{v}_i \cdot \Bigg(\frac{\varphi\rho_i - T_{-\delta_n e}\varphi\rho_i}{\delta_n} + \frac{T_{-\delta_n e}\varphi\rho_i - T_{-\delta_n e}\varphi\sqrt{\rho_i}T_{-\delta_n e}\sqrt{\rho_i}}{\delta_n} \\
&\qquad + \frac{T_{-\delta_n e}\varphi\sqrt{\rho_i}T_{-\delta_n e}\sqrt{\rho_i} - T_{-\delta_n e}\varphi T_{-\delta_n e}\rho_i}{\delta_n} \Bigg) \\
&= -\lim_{n\to\infty} \int_{I\times\mathbb{T}^d} \frac{\varphi - T_{-\delta_n e}\varphi}{\delta_n} \cdot \bar{v}_i\rho_i + \int_{I\times\mathbb{T}^d} (\bar{v}_i\sqrt{\rho_i}T_{-\delta_n e}) \cdot \left(\varphi \frac{\sqrt{\rho_i} - T_{-\delta_n e}\sqrt{\rho_i}}{\delta_n} \right) \\
&\qquad + \int_{I\times\mathbb{T}^d} (\bar{v}_i T_{-\delta_n e}\sqrt{\rho_i}) \cdot \left(T_{-\delta_n e}\varphi \frac{\sqrt{\rho_i} - T_{-\delta_n e}\sqrt{\rho_i}}{\delta_n} \right) \\
&= -\lim_{n\to\infty} \int_{I\times\mathbb{T}^d} \frac{\varphi - T_{-\delta_n e}\varphi}{\delta_n} \cdot \bar{v}_i\rho_i + \int_{I\times\mathbb{T}^d} (\bar{v}_i\sqrt{\rho_i}) \cdot \left(T_{-\delta_n e}\varphi \frac{\sqrt{\rho_i} - T_{-\delta_n e}\sqrt{\rho_i}}{\delta_n} \right) \\
&\qquad + \int_{I\times\mathbb{T}^d} (T_{\delta_n e}\bar{v}_i\sqrt{\rho_i}) \cdot \left(\varphi \frac{T_{\delta_n e}\sqrt{\rho_i} - \sqrt{\rho_i}}{\delta_n} \right) \\
&= -\int_{I\times\mathbb{T}^d} (\nabla\varphi \cdot e) \cdot \bar{v}_i\rho_i - 2\int_{I\times\mathbb{T}^d} (\bar{v}_i\sqrt{\rho_i}) \cdot (\varphi\nabla\sqrt{\rho_i} \cdot e) \\
&= -\int_{I\times\mathbb{T}^d} (\nabla\varphi \cdot e) \cdot \bar{v}_i\rho_i - 2\int_{I\times\mathbb{T}^d} \varphi \cdot ((\sqrt{\rho_i}\bar{v}_i \otimes \nabla\sqrt{\rho_i}) \cdot e),
\end{aligned}
$$

thanks to the following convergences, the last one being given by (3.68) :

$$
\begin{aligned}
\frac{\varphi - T_{-\delta_n e}\varphi}{\delta_n} &\to \partial_k\varphi \text{ in } L^\infty(I \times \mathbb{T}^d), \\
T_{-\delta_n e}\varphi &\to \varphi \text{ in } L^\infty(I \times \mathbb{T}^d), \\
\frac{\sqrt{\rho_i} - T_{-\delta_n e}\sqrt{\rho_i}}{\delta_n} &\to \partial_k\sqrt{\rho_i} \text{ in w-}L^2(Q) \text{ by (3.14)}, \\
T_{\delta_n e}\bar{v}_i\sqrt{\rho_i} &\to \bar{v}_i\sqrt{\rho_i} \text{ in } L^2(I \times \mathbb{T}^d).
\end{aligned}
$$

The validity of this equality for all $\varphi \in C_c^\infty(I \times \mathbb{T}^d, \mathbb{R}^d)$ is equivalent to 3.70. As a consequence, for each δ_0, the accumulation point of (g^e_δ) is unique and the whole sequence weakly converges on Q_{δ_0}. By lower semi-continuity of the norm under weak convergences, we have for all $e \in \mathbb{R}^d$:

$$
\|g_e\|^2_{L^2(Q_{\delta_0})} \leq \frac{1}{2}\int_0^T |h'_{\delta_0}(t)|^2 dt. \tag{3.71}
$$

As for each i, $\bar{v}_i\rho_i = v_i\rho_i$, we can replace $\bar{v}_i$ by v_i in (3.70). We thus obtain that v_i is in $L^2_{loc}(]0,T[, H^1(\mathbb{T}^d; \mathbb{R}^d, \rho_i dx))$ with :

$$
\mathrm{D}_{\rho_i} v_i = (g_{e_1}, \ldots, g_{e_d}).
$$

(3.69) follows from (3.71). $\square$

3.8 **Incomplete** Ideas

Here are a few ideas I had to continue the study.

3.8.1 Definition of time derivatives

After having defined a Sobolev spaces to describe the regularity in space of the velocity fields, we can try to do the same with the regularity in time. This time, to use the regularity in time of the density fields, we use the fact that they are solution of the Fokker-Planck equation. We can give the following definition :

Définition 3.8.1.1. Let $\sqrt{\rho} \in L^2([0,T], H^1(\mathbb{T}^d))$ and $v \in L^2(Q,\rho)$ such that :

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho v) + \nu\Delta\rho = 0.$$

Let $f \in L^2_{loc}(]0,T[, H^1(\mathbb{T}^d,\rho))$. We say that $f \in H^1_{loc}(]0,T[\times\mathbb{T}^d,(\rho,v))$ if it exists $g \in L^2_{loc}(]0,T[\times\mathbb{T}^d)$ such that in the sense of distributions :

$$\partial_t(\rho f) = g\rho + \operatorname{div}\left(f\sqrt{\rho}[v\sqrt{\rho} + 2\nu\nabla\sqrt{\rho}]\right) - \nabla_\rho f\sqrt{\rho}\cdot\left(v\sqrt{\rho} + 2\nu\nabla\sqrt{\rho}\right) \tag{3.72}$$

Then, we write :

$$g =: \partial_t^\rho f$$

3.8.2 Translation in time, and second variationnal inequality

We can reason in the same way as we did in 3.7.3 to get a variationnal inequality for translation in space. Indeed, given $h \in C_c^\infty(]0,T[)$ such that $i+h : [0,T] \to [0,T]$, we can use the test functions $\phi_i^n(t+h(t),x) - \phi_i^n(t,x)$ against the distribution $0 = \partial_t\rho + \operatorname{div}(\rho v) + \nu\Delta\rho$. We get after a few computations :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\sum_{i=1}^M \int_Q &\left|\frac{v_i\sqrt{\rho_i} - 2\nu h'(t)\nabla\sqrt{\rho_i}}{\sqrt{1+h'(t)}} - \sqrt{1+h'(t)}\nabla\phi_i^n(t+h(t),x)\sqrt{\rho_i}\right|^2 \\ &\leq \epsilon_n + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^M \int_Q \frac{\left|v_i\sqrt{\rho_i} - 2\nu h'(t)\nabla\sqrt{\rho_i}\right|^2}{1+h'(t)} - \int_Q |v_i|^2\rho_i.\end{aligned}$$

From this inequality we can deduce that : Then if we fix δ_0, if we consider the function h_{δ_0} defined in 3.7.3, and if we take δ sufficiently small, we get :

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^M \int_{Q_{\delta_0}} |v_i - \nabla\phi_i^n(t+\delta,x)|^2\rho_i \leq \epsilon_n + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^M \int_Q \frac{\left|v_i\sqrt{\rho_i} - 2\nu h'_{\delta_0}(t)\delta\nabla\sqrt{\rho_i}\right|^2}{1+h'_{\delta_0}(t)\delta} - \int_Q |v_i|^2\rho_i. \tag{3.73}$$

and we finally get in the same way as for (3.48) :

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^M \int_{Q_{\delta_0}} |v_i - \nabla\phi_i^n(t+\delta,x)|^2\rho_i \leq \epsilon_n + \delta^2 C_{\delta_0}\left(1 + \sum_{i=1}^M \mathcal{A}(\rho_i,v_i)\right). \tag{3.74}$$

Thus, $(\nabla\phi_i^n(t+\delta),x)_n$ is weakly compact in $L^2(]\delta_0, T-\delta_0[\times\mathbb{T}^d,\rho)$, so as its λ^{d+1}-almost everywhere convergence to $\bar{v}_i(t+\delta,x)$ and the absolute continuity of ρ_i with report to λ^{d+1} imply the weak convergence of the sequence in its whole.
As a conclusion, we have the following result :

Proposition 3.8.2.1. *Let $\delta_0 \in]0,\frac{T}{2}[$. For δ sufficiently small, the following inequality stand :*

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{M}\int_{Q_{\delta_0}}|\bar{v}_i(t+\delta,x)-\bar{v}_i(t,x)|^2\rho_i \leq \delta^2 C_{\delta_0}\left(1+\sum_{i=1}^{M}\mathcal{A}(\rho_i,v_i)\right). \tag{3.75}$$

3.8.3 Sobolev regularity in time

Now, we assume that we are able to prove the following result :

Proposition 3.8.3.1 (Hypothetical Result)**.** *Let f be a measurable function from Q to $\mathbb{R}$ such that :*

- *$f \in L^2_{loc}(]0,T[,H^1(\mathbb{T}^d,\rho))$,*
- *for all $\delta_0 \in]0,\frac{T}{2}[$ and δ sufficiently small, $f(t+\delta,x)\in L^2(Q_{\delta_0},\rho)$ and the following inequality stand :*

$$\int_{Q_{\delta_0}}|f(t+\delta,x)-f(t,x)|^2\rho \leq C_{\delta_0}\delta^2.$$

Then, there exists a sequence $(f_n)_n$ of Lipschitz functions from Q to $\mathbb{R}$ such that :

- *$f_n \to f$ in $L^2_{loc}(]0,T[\times\mathbb{T}^d,\rho)$,*
- *for all $\delta_0 \in]0,\frac{T}{2}[$:*

$$\sup_n \int_{Q_{\delta_0}}(|\nabla f_n|^2+|\partial_t f_n|^2)\rho < \infty.$$

If this proposition is true, and with the same hypothesis, we can prove :

Proposition 3.8.3.2. *Let f be such as in proposition 3.8.3.1 and (ρ,v) such as in definition . Then $f \in H^1_{loc}(]0,T[\times\mathbb{T}^d,(\rho,v))$.*

Proof: Let $(f_n)_n$ be the sequence of Lipischitz functions given by proposition 3.8.3.1. It is easy to justify the following calculus :

$$\nabla(f_n\rho) = \nabla f_n\rho + 2f_n\sqrt{\rho}\nabla\sqrt{\rho},$$

and :

$$\begin{aligned}
\partial_t(\rho f_n) &= \partial_t f_n\rho + f_n\partial_t\rho \\
&= \partial_t f_n\rho - f_n(\operatorname{div}(\rho v)+\nu\Delta\rho) \\
&= \partial_t f_n\rho - f_n\operatorname{div}(\rho v + 2\nu\sqrt{\rho}\nabla\sqrt{\rho}) \\
&= \partial_t f_n\rho - \operatorname{div}(f_n[\rho v + 2\nu\sqrt{\rho}\nabla\sqrt{\rho}]) + \nabla f_n\cdot[\rho v + 2\nu\sqrt{\rho}\nabla\sqrt{\rho}].
\end{aligned}$$

As a consequence, if G is an accumulation point of (∇f_n) and g is an accumulation point of $(\partial_t f_n)$ in $L^2_{loc}(]0,T[\times\mathbb{T}^d,\rho)$ every term in the previous equations converge in the sense of distributions and we get :

$$\begin{aligned} G &= \nabla_\rho f, \\ g &= \partial_t^\rho f. \end{aligned}$$

□

In that way, we can hope to give a sense to $\partial_t v_i$.

3.8.4 Sobolev space with negative exponent

It is also possible to give a sense to Δv_i. We can define the space $L^2_{loc}(]0,T[,H^{-1}(\mathbb{T}^d,\rho))$ in the following way :

Définition 3.8.4.1. We call $L^2_{loc}([\delta_0,T-\delta_0[,H^{-1}(\mathbb{T}^d,\rho))$ the topologic dual space of $L^2([\delta_0,T-\delta_0],H^1(\mathbb{T}^d,\rho))$. It is clear that if $\varphi\in L^2([\delta_0,T-\delta_0],H^{-1}(\mathbb{T}^d,\rho))$, there exist g_1 and g_2 in $L^2(Q_{\delta_0},\rho)$ respectively with real and vectorial values such that for all $f\in L^2([\delta_0,T-\delta_0,H^1(\mathbb{T}^d,\rho))$:

$$\langle\varphi|f\rangle=\int_{Q_{\delta_0}}(g_1f+g_2\cdot\nabla_\rho f)\rho.$$

Then the following operator is well defined :

$$\begin{array}{rccl} \nabla_\rho^*: & L^2(Q_{\delta_0},\rho) & \to & L^2([\delta_0,T-\delta_0],H^{-1}(\mathbb{T}^d,\rho)) \\ & f & \mapsto & \left(\varphi\mapsto\displaystyle\int_{Q_{\delta_0}} f\nabla_\rho\varphi\rho\right) \end{array}$$

and we can extend ∇_ρ to $L^2_{loc}(]0,T[\times\mathbb{T}^d,\rho)$ by setting :

$$\nabla_\rho f=-(\nabla_\rho^*f+2f\sqrt{\rho}\nabla\sqrt{\rho})\in L^2_{loc}(]0,T[,H^{-1}(\mathbb{T}^d,\rho))+L^1_{loc}(]0,T[\times\mathbb{T}^d,\lambda^{d+1}).$$

Bibliographie

[1] Luigi AMBROSIO : Transport equation and Cauchy problem for non-smooth vector fields. *In Calculus of variations and nonlinear partial differential equations*, pages 1–41. Springer, 2008.

[2] Luigi AMBROSIO et Alessio FIGALLI : Geodesics in the space of measure-preserving maps and plans. *Archive for rational mechanics and analysis*, 194(2):421–462, 2009.

[3] Luigi AMBROSIO, Nicola GIGLI et Giuseppe SAVARÉ : *Gradient flows : in metric spaces and in the space of probability measures*. Springer, 2006.

[4] Yann BRENIER : The least action principle and the related concept of generalized flows for incompressible perfect fluids. *J. Amer. Math. Soc*, 2(2):225–255, 1989.

[5] Yann BRENIER : A homogenized model for vortex sheets. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 138(4):319–353, 1997.

[6] Haïm BREZIS : *Analyse fonctionelle*, volume 5. Masson, 1983.

[7] Bernard DACOROGNA et Jürgen MOSER : On a partial differential equation involving the Jacobian determinant. *In Annales de l'Institut Henri Poincaré. Analyse non linéaire*, volume 7, pages 1–26. Elsevier, 1990.

[8] Ronald J DIPERNA et Pierre-Louis LIONS : Ordinary differential equations, transport theory and Sobolev spaces. *Inventiones mathematicae*, 98(3):511–547, 1989.

[9] Laurent SCHWARTZ : *Théorie des Distributions : Vol. : 1*. Hermann & Cie., 1957.

[10] Alexander I SHNIRELMAN : On the geometry of the group of diffeomorphisms and the dynamics of an ideal incompressible fluid. *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 56(1):79, 1987.

[11] Alexander I SHNIRELMAN : Generalized fluid flows, their approximation and applications. *Geometric And Functional Analysis*, 4(5):586–620, 1994.