Problèmes de minimisation d'entropie avec contraintes

Aymeric Baradat

17 juin 2018

1. Définition et comportement de l'entropie

Sommaire

Définition de l'entropie relative

Définition

Soient Ω un espace polonais, μ et $\nu \in \mathcal{P}(\Omega)$. L'entropie de ν par rapport à μ est donnée par :

$$H(\nu|\mu) := \begin{cases} \displaystyle\int \log \rho \, \mathrm{d}\, \nu = \int \rho \log \rho \, \mathrm{d}\, \mu & \text{si } \nu \ll \mu \text{ et } \nu = \rho \cdot \mu, \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Les bonnes propriétés d'un problème de minimisation

Lemme

- *L'entropie par rapport à μ est strictement convexe,*
- *l'entropie par rapport à μ est semi-continue inférieurement par rapport à la topologie de la convergence étroite,*
- *les sous-niveaux de l'entropie sont compacts pour la topologie de la convergence étroite.*

Les bonnes propriétés d'un problème de minimisation

Lemme

- *L'entropie par rapport à μ est strictement convexe,*
- *l'entropie par rapport à μ est semi-continue inférieurement par rapport à la topologie de la convergence étroite,*
- *les sous-niveaux de l'entropie sont compacts pour la topologie de la convergence étroite.*

$$\text{En effet :} \quad x \log x = \sup_{y \in \mathbb{R}} x \cdot y - \exp(y-1),$$

$$\text{Donc :} \quad H(\nu|\mu) = \sup_{\varphi \in C_b(\Omega)} \int \varphi \, \mathrm{d}\,\nu - \int \exp(\varphi - 1) \, \mathrm{d}\,\mu.$$

Désintégration des mesures et entropie

Proposition

$$\textit{Si} \quad \mu = \pi\sharp\mu \otimes \mu^y, \qquad \nu = \pi\sharp\nu \otimes \nu^y,$$

$$\textit{alors} \quad H(\nu|\mu) = H(\pi\sharp\nu|\pi\sharp\mu) + \int H(\nu^y|\mu^y)\pi\sharp\nu(\mathrm{d}\, y).$$

$$\textit{En particulier,} \quad H(\pi\sharp\nu|\pi\sharp\mu) \leq H(\nu|\mu).$$

Entropie par rapport à une mesure produit

Proposition

Soient Ω_1 et Ω_2 deux espaces polonais et soient γ et $\mu \in \mathcal{P}(\Omega_1)$ et δ et $\nu \in \mathcal{P}(\Omega_2)$. Alors l'unique minimiseur de $H(\,.\,|\gamma \otimes \delta)$ parmis les $\eta \in \mathcal{P}(\Omega_1 \times \Omega_2)$ ayant μ et ν pour marginales est $\mu \otimes \nu$. De plus :

$$H(\mu \otimes \nu|\gamma \otimes \delta) = H(\mu|\gamma) + H(\nu|\delta).$$

Application fondamentale : propriété de Markov des minimiseurs

Soit E un espace polonais.

- $\Omega := C([0,1]; E)$ muni de la topologie de la convergence uniforme est encore polonais.
- $X := (X_t)_{t \in [0,1]}$ le processus canonique sur Ω.
- $(\mathcal{F}_{[0,t]})_{t \in [0,1]} := \sigma(X_s, s \leq t)$ la filtration canonique sur Ω.
- Si $Q \in \mathcal{P}(E)$, $Q_t := X_t \sharp Q$ est la loi de X_t sous Q et $Q_t^x := Q(\,.\, | X_t = x)$ est la loi de X sous Q conditionnellement à $\{X_t = x\}$.

Application fondamentale : propriété de Markov des minimiseurs

Remarque

Si $t \in]0,1[$ et $x \in E$:

$$\{\omega \in \Omega | \omega_t = x\} \approx \Big(C([0,t];E) \cap \{\omega_t = x\} \Big) \times \Big(C([t,1];E) \cap \{\omega_t = x\} \Big)$$
$$=: \Omega^x_{\leq t} \times \Omega^x_{\geq t}.$$

Application fondamentale : propriété de Markov des minimiseurs

Remarque

Si $t \in]0,1[$ et $x \in E$:

$$\{\omega \in \Omega | \omega_t = x\} \approx \Big(C([0,t];E) \cap \{\omega_t = x\} \Big) \times \Big(C([t,1];E) \cap \{\omega_t = x\} \Big) =: \Omega^x_{\leq t} \times \Omega^x_{\geq t}.$$

Définition (Propriété de Markov)

$Q \in \mathcal{P}(\Omega)$ satisfait la propriété de Markov si pour tout $t \in]0,1[$ et Q_t-presque tout x, Q^x_t est une mesure produit sur $\Omega^x_{\leq t} \times \Omega^x_{\geq t}$.

Application fondamentale : propriété de Markov des minimiseurs

Soit R une mesure de probabilité markovienne et $A \subset C([0,1];\mathcal{P}(E))$. On note :

$$B := \{Q \in \mathcal{P}(\Omega) | (Q_t)_{t \in [0,1]} \in A\}.$$

Théorème

Si $H(\,.\,|R)$ admet des minimiseurs sur B, alors ils satisfont la propriété de Markov.

Sommaire

Le théorème de Sanov

Soient Ω polonais et $R \in \mathcal{P}(\Omega)$. $X_1, X_2, \dots$ des variables aléatoires à valeur dans Ω i.i.d de loi R. On définit la mesure empirique :

$$\mu_n := \sum_{k=1}^{n} \delta_{X_k} \in \mathcal{P}(\Omega),$$

et on note $P_n \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\Omega))$ sa loi.

Le théorème de Sanov

Soient Ω polonais et $R \in \mathcal{P}(\Omega)$. $X_1, X_2, \ldots$ des variables aléatoires à valeur dans Ω i.i.d de loi R. On définit la mesure empirique :

$$\mu_n := \sum_{k=1}^{n} \delta_{X_k} \in \mathcal{P}(\Omega),$$

et on note $P_n \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\Omega))$ sa loi.

Théorème (Sanov)

$(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ satisfait un principe de grandes déviations de fonction de taux $H(\,.\,|R)$.

Interprétation

Conséquence du théorème de Sanov

Si $H(\,.\,|R)$ admet un unique minimiseur P sur le fermé $A \subset \mathcal{P}(\Omega)$ et si $k \in \mathbb{N}^*$, conditionnellement à

$$\{\mu_n \text{``} \in \text{''} A\}$$

et lorsque n est grand :

$$\mathrm{loi}(X_1, \dots, X_k) \approx P^{\otimes k}.$$

Cadre

- On note $E = \mathbb{T}^d$ ou $\mathbb{R}^d$, et on prend $R_0 \in \mathcal{P}(E)$.
- $\Omega := C([0,1]; E)$.
- Soit R la loi du brownien partant de R_0.
- $X := (X_t)_{t\in[0,1]}$ le processus canonique sur Ω.
- $(\mathcal{F}_{[0,t]})_{t\in[0,1]} := \sigma(X_s, s \leq t)$ la filtration canonique sur Ω complétée par les négligeables de R.

Théorème (Girsanov pour les markov d'entropie finie)

Soit $P \in \mathcal{P}(\Omega)$ markovienne telle que $H(P|R) < +\infty$. Alors il existe un champs de vecteurs $v(t,x) \in L^2([0,1] \times E, \mathrm{d}\,t \otimes P_t)$, tel que sous P :

$$\mathrm{d}\,X_t = v(t, X_t)\,\mathrm{d}\,t + \mathrm{d}\,B_t,$$

où $(B_t)_{t\in[0,1]}$ est un mouvement brownien sous P.
On a alors pour tout $t \in [0,1]$:

$$\frac{\mathrm{d}\,P_{\leq t}}{\mathrm{d}\,R_{\leq t}} = \mathbb{1}_{\frac{\mathrm{d}\,P_{\leq t}}{\mathrm{d}\,R_{\leq t}}>0} D_0 \exp\left(\int_0^t v(s,X_s)\cdot \mathrm{d}\,X_s - \frac{1}{2}\int_0^t |v(s,X_s)|^2\,\mathrm{d}\,s\right),$$

$$H(P|R) = H(P_0|R_0) + \frac{1}{2}\int_0^1 \int_E |v(t,x)|^2 P_t(\mathrm{d}\,x)\,\mathrm{d}\,t.$$

Sommaire

Énoncé

Problème de Schrödinger

Soient μ et ν dans $\mathcal{P}(\mathbb{T}^d)$.

$$\mathrm{Adm}(\mu,\nu) := \{Q \in \mathcal{P}(\Omega) | Q_0 = \mu,\ Q_1 = \nu,\ H(Q|R) < +\infty\}.$$

Trouver P qui minimise $H(\,.\,|R)$ sur $\mathrm{Adm}(\mu,\nu)$.

Propriétés des solutions

Proposition

- *Si* $H(\mu|R_0) < +\infty$ *et* $H(\nu|R_1) < +\infty$, *alors* $\mathrm{Adm}(\mu, \nu) \neq \emptyset$. *En particulier la solution existe et est unique.*

Propriétés des solutions

Proposition

- *Si* $H(\mu|R_0) < +\infty$ *et* $H(\nu|R_1) < +\infty$, *alors* $\mathrm{Adm}(\mu,\nu) \neq \emptyset$. *En particulier la solution existe et est unique.*

Résultat lié à la régularité du brownien sur le tore.

Propriétés des solutions

Proposition

- *Si* $H(\mu|R_0) < +\infty$ *et* $H(\nu|R_1) < +\infty$, *alors* $\mathrm{Adm}(\mu, \nu) \neq \emptyset$. *En particulier la solution existe et est unique.*
- *Si elle existe, la solution* P *est markovienne.*

Propriétés des solutions

Proposition

- *Si* $H(\mu|R_0) < +\infty$ *et* $H(\nu|R_1) < +\infty$, *alors* $\mathrm{Adm}(\mu, \nu) \neq \emptyset$. *En particulier la solution existe et est unique.*
- *Si elle existe, la solution* P *est markovienne.*
- P *partage ses ponts avec* R *:*

$$P(\,.\,|X_0 = x, X_1 = y) = R(\,.\,|X_0 = x, X_1 = y).$$

Structure des solutions

Théorème

Les solutions sont de la forme :

$$P = f(X_0)g(X_1) \cdot R.$$

EDP satisfaite par le drift

$$D_t = \mathbb{1}_{\frac{\mathrm{d}\, P_{\leq t}}{\mathrm{d}\, R_{\leq t}} > 0} D_0 \exp\left(\int_0^t v(s, X_s) \cdot \mathrm{d}\, X_s - \frac{1}{2} \int_0^t |v(s, X_s)|^2 \,\mathrm{d}\, s \right)$$

EDP satisfaite par le drift

$$D_t = \mathbb{1}_{\frac{\mathrm{d}\,P_{\leq t}}{\mathrm{d}\,R_{\leq t}}>0} D_0 \exp\left(\int_0^t v(s, X_s) \cdot \mathrm{d}\,X_s - \frac{1}{2} \int_0^t |v(s, X_s)|^2 \,\mathrm{d}\,s \right)$$
$$= f(X_0)\mathbb{E}_R[g(X_1)|X_t]$$

EDP satisfaite par le drift

$$
\begin{aligned}
D_t &= D_0 \exp\left(\int_0^t v(s, X_s) \cdot \mathrm{d}\, X_s - \frac{1}{2} \int_0^t |v(s, X_s)|^2 \,\mathrm{d}\, s \right) \\
&= f(X_0) \mathbb{E}_R[g(X_1) | X_t]
\end{aligned}
$$

EDP satisfaite par le drift

$$
\begin{aligned}
D_t &= D_0 \exp\left(\int_0^t v(s, X_s) \cdot \mathrm{d}\, X_s - \frac{1}{2} \int_0^t |v(s, X_s)|^2 \,\mathrm{d}\, s \right) \\
&= f(X_0) g_t(X_t).
\end{aligned}
$$

EDP satisfaite par le drift

$$\begin{aligned} D_t &= D_0 \exp\left(\int_0^t v(s, X_s) \cdot \mathrm{d}\, X_s - \frac{1}{2} \int_0^t |v(s, X_s)|^2 \,\mathrm{d}\, s \right) \\ &= f(X_0) g_t(X_t). \end{aligned}$$

Si tout est lisse, par la formule d'Itô :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\, D_t = D_0 \exp\left(\int_0^t v(s, X_s) \cdot \mathrm{d}\, X_s - \frac{1}{2} \int_0^t |v(s, X_s)|^2 \,\mathrm{d}\, s \right) \\ \times v(t, X_t) \cdot \mathrm{d}\, X_t \end{aligned}$$

EDP satisfaite par le drift

$$\begin{aligned} D_t &= D_0 \exp\left(\int_0^t v(s, X_s) \cdot \mathrm{d}\, X_s - \frac{1}{2} \int_0^t |v(s, X_s)|^2 \,\mathrm{d}\, s \right) \\ &= f(X_0) g_t(X_t). \end{aligned}$$

Si tout est lisse, par la formule d'Itô :

$$\mathrm{d}\, D_t = f(X_0) g_t(X_t) v(t, X_t) \cdot \mathrm{d}\, X_t$$

EDP satisfaite par le drift

$$\begin{aligned} D_t &= D_0 \exp\left(\int_0^t v(s, X_s) \cdot \mathrm{d}\, X_s - \frac{1}{2} \int_0^t |v(s, X_s)|^2 \,\mathrm{d}\, s \right) \\ &= f(X_0) g_t(X_t). \end{aligned}$$

Si tout est lisse, par la formule d'Itô :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\, D_t &= f(X_0) g_t(X_t) v(t, X_t) \cdot \mathrm{d}\, X_t \\ &= f(X_0) \left[\left(\partial_t g_t(X_t) + \frac{1}{2} \Delta g_t(X_t)\right) \mathrm{d}\, t + \nabla g_t(X_t) \cdot \mathrm{d}\, X_t \right]. \end{aligned}$$

EDP satisfaite par le drift

$$\left\{ \begin{array}{ll} \nabla g_t(x) = g_t(x) v(t,x) & \forall (t,x) \in]0,1[\times \mathbb{T}^d, \\ \partial_t g_t(x) + \frac{1}{2}\Delta g_t(x) = 0 & \forall (t,x) \in]0,1[\times \mathbb{T}^d. \end{array} \right.$$

EDP satisfaite par le drift

$$\begin{cases} \nabla g_t(x) = g_t(x) v(t,x) & \forall (t,x) \in]0,1[\times \mathbb{T}^d, \\ \partial_t g_t(x) + \frac{1}{2}\Delta g_t(x) = 0 & \forall (t,x) \in]0,1[\times \mathbb{T}^d. \end{cases}$$

Donc en posant $\phi_t := \log g_t$, $v = \nabla \phi$ et :

$$\begin{cases} \partial_t \phi_t(x) + \frac{1}{2}|\nabla \phi_t(x)|^2 + \frac{1}{2}\Delta \phi_t(x) = 0 & \forall (t,x) \in]0,1[\times \mathbb{T}^d, \\ \phi_1 = \log g & \forall x \in \mathbb{T}^d. \end{cases}$$

Bilan

Aux hypothèses de régularité sur les conditions initiale et finale près, P est solution du problème de Schrödinger si et seulement si :

Bilan

Aux hypothèses de régularité sur les conditions initiale et finale près, P est solution du problème de Schrödinger si et seulement si :

- elle est markovienne,

Bilan

Aux hypothèses de régularité sur les conditions initiale et finale près, P est solution du problème de Schrödinger si et seulement si :

- elle est markovienne,
- son drift est le gradient d'une fonction ϕ sur $]0,1[\times\mathbb{T}^d$,

Bilan

Aux hypothèses de régularité sur les conditions initiale et finale près, P est solution du problème de Schrödinger si et seulement si :

- elle est markovienne,
- son drift est le gradient d'une fonction ϕ sur $]0,1[\times\mathbb{T}^d$,
- ϕ satisfait une certaine EDP dont la condition finale dépend des données du problème.

Contrainte de densité en un nombre fini d'instants

$\mathcal{T} \subset [0,1]$ fini.

Extension à un nombre fini d'instants

Soit $(\mu_\tau)_{\tau\in\mathcal{T}}$ une famille d'éléments de $\mathcal{P}(\mathbb{T}^d)$.

$$\mathrm{Adm}((\mu_\tau)_{\tau\in\mathcal{T}}) := \{Q \in \mathcal{P}(\Omega) | \forall \tau \in \mathcal{T},\ Q_\tau = \mu_\tau,\ H(Q|R) < +\infty\}.$$

Trouver P qui minimise $H(\,.\,|R)$ sur $\mathrm{Adm}((\mu_\tau)_{\tau\in\mathcal{T}})$. Si elle existe, on note la solution $\mathrm{Sol}((\mu_\tau)_{\tau\in\mathcal{T}})$.

Les propriétés qui subsistent

Proposition

- *Si pour tout $\tau \in \mathcal{T}$, $H(\mu_\tau | R_\tau) < +\infty$, alors la solution P existe et est unique.*

Les propriétés qui subsistent

Proposition

- *Si pour tout $\tau \in \mathcal{T}$, $H(\mu_\tau | R_\tau) < +\infty$, alors la solution P existe et est unique.*
- *P est markovienne.*

Les propriétés qui subsistent

Proposition

- *Si pour tout $\tau \in \mathcal{T}$, $H(\mu_\tau | R_\tau) < +\infty$, alors la solution P existe et est unique.*
- *P est markovienne.*
- *P est une "concaténation" de solutions du problème de Schrödinger.*

Les propriétés qui subsistent

Proposition

- *Si pour tout $\tau \in \mathcal{T}$, $H(\mu_\tau | R_\tau) < +\infty$, alors la solution P existe et est unique.*
- *P est markovienne.*
- *P est une "concaténation" de solutions du problème de Schrödinger.*
- *P est de la forme :*

$$\prod_{\tau \in \mathcal{T}} f_\tau(X_\tau) \cdot R.$$

Les propriétés qui subsistent

Proposition

- *Si pour tout $\tau \in \mathcal{T}$, $H(\mu_\tau | R_\tau) < +\infty$, alors la solution P existe et est unique.*
- *P est markovienne.*
- *P est une "concaténation" de solutions du problème de Schrödinger.*
- *P est de la forme :*

$$\prod_{\tau \in \mathcal{T}} f_\tau(X_\tau) \cdot R.$$

- *Le drift de P est encore un gradient.*

Estimation entropique

$\mathcal{S} \subset \mathcal{T} \subset [0,1]$ deux ensembles finis et $(\mu_\tau)_{\tau \in \mathcal{T}}$ une famille d'éléments de $\mathcal{P}(\mathbb{T}^d)$.

$$P^{\mathcal{S}} := \mathrm{Sol}((\mu_\tau)_{\tau \in \mathcal{S}}), \quad P^{\mathcal{T}} := \mathrm{Sol}((\mu_\tau)_{\tau \in \mathcal{T}}).$$

Estimation entropique

$\mathcal{S} \subset \mathcal{T} \subset [0,1]$ deux ensembles finis et $(\mu_\tau)_{\tau \in \mathcal{T}}$ une famille d'éléments de $\mathcal{P}(\mathbb{T}^d)$.

$$P^{\mathcal{S}} := \mathrm{Sol}((\mu_\tau)_{\tau \in \mathcal{S}}), \quad P^{\mathcal{T}} := \mathrm{Sol}((\mu_\tau)_{\tau \in \mathcal{T}}).$$

Proposition

$$H(P^{\mathcal{T}}|R) = H(P^{\mathcal{T}}|P^{\mathcal{S}}) + H(P^{\mathcal{S}}|R).$$

Densité fixée en tout temps

Soit $Q \in \mathcal{P}(\Omega)$ telle que $H(Q|R) < +\infty$ et telle que $(Q_t)_{t\in[0,1]}$ soit régulière.

$$\mathrm{Adm}((Q_t)_{t\in[0,1]}) := \{P|\forall t \in [0,1],\ P_t = Q_t,\ H(P|R) < +\infty\}.$$

Trouver P qui minimise $H(\,.\,|R)$ sur $\mathrm{Adm}((Q_t)_{t\in[0,1]})$. La solution existe, on la note $\mathrm{Sol}((Q_t)_{t\in[0,1]})$.

Densité fixée en tout temps

Soit $Q \in \mathcal{P}(\Omega)$ telle que $H(Q|R) < +\infty$ et telle que $(Q_t)_{t\in[0,1]}$ soit régulière.

$$\mathrm{Adm}((Q_t)_{t\in[0,1]}) := \{P | \forall t \in [0,1],\ P_t = Q_t,\ H(P|R) < +\infty\}.$$

Trouver P qui minimise $H(\,.\,|R)$ sur $\mathrm{Adm}((Q_t)_{t\in[0,1]})$. La solution existe, on la note $\mathrm{Sol}((Q_t)_{t\in[0,1]})$.

- $(t_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite dense.

Densité fixée en tout temps

Soit $Q \in \mathcal{P}(\Omega)$ telle que $H(Q|R) < +\infty$ et telle que $(Q_t)_{t\in[0,1]}$ soit régulière.

$$\mathrm{Adm}((Q_t)_{t\in[0,1]}) := \{P | \forall t \in [0,1],\ P_t = Q_t,\ H(P|R) < +\infty\}.$$

Trouver P qui minimise $H(\,.\,|R)$ sur $\mathrm{Adm}((Q_t)_{t\in[0,1]})$. La solution existe, on la note $\mathrm{Sol}((Q_t)_{t\in[0,1]})$.

- $(t_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite dense.
- $P^n := \mathrm{Sol}((Q_{t_k})_{k=1,\dots,n})$.

Densité fixée en tout temps

Soit $Q \in \mathcal{P}(\Omega)$ telle que $H(Q|R) < +\infty$ et telle que $(Q_t)_{t\in[0,1]}$ soit régulière.

$$\mathrm{Adm}((Q_t)_{t\in[0,1]}) := \{P | \forall t \in [0,1],\ P_t = Q_t,\ H(P|R) < +\infty\}.$$

Trouver P qui minimise $H(\,.\,|R)$ sur $\mathrm{Adm}((Q_t)_{t\in[0,1]})$. La solution existe, on la note $\mathrm{Sol}((Q_t)_{t\in[0,1]})$.

- $(t_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite dense.
- $P^n := \mathrm{Sol}((Q_{t_k})_{k=1,\dots,n})$.
- $\nabla\phi^n$ le drift de P^n.

Passage à la limite

Alors :

- $H(P^n|R) \leq H(Q|R)$ est croissante en n.

Passage à la limite

Alors :

- $H(P^n|R) \leq H(Q|R)$ est croissante en n.
- $P^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} P := \mathrm{Sol}((Q_t)_{t\in[0,1]})$.

Passage à la limite

Alors :

- $H(P^n|R) \leq H(Q|R)$ est croissante en n.
- $P^n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} P := \mathrm{Sol}((Q_t)_{t \in [0,1]})$.
- $H(P|P^n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

Passage à la limite

Alors :

- $H(P^n|R) \leq H(Q|R)$ est croissante en n.
- $P^n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} P := \mathrm{Sol}((Q_t)_{t \in [0,1]})$.
- $H(P|P^n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.
- Si on note v le drift de P :

$$\int_0^T \int_{\mathbb{T}^d} |v_t - \nabla \phi_t^n|^2 \,\mathrm{d}\, Q_t \,\mathrm{d}\, t \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Conclusion

Le drift de P est un gradient au sens des distributions.

R est le mouvement brownien de loi initiale $\mathrm{d}\,x$.

Le problème de Schrödinger incompressible

Soit $\eta \in \mathcal{P}(\mathbb{T}^d \times \mathbb{T}^d)$.

$$\mathrm{Adm}(\eta) := \{Q | \forall t \in [0,1],\ Q_t = \mathrm{d}\,x,\ Q_{0,1} = \eta,\ H(Q|R) < +\infty\}.$$

Trouver P qui minimise $H(\,.\,|R)$ sur $\mathrm{Adm}(\eta)$.

On sait démontrer l'existence de solutions dès que :

$$H(\eta | R_{0,1}) < +\infty.$$

On la note alors $\mathrm{Sol}(\eta)$.

Une question naturelle

Si (v, p) est une solution lisse des équations de Navier-Stokes (inversées en temps) :

$$\partial_t v + v \cdot \nabla v + \frac{1}{2}\Delta v = -\nabla p \quad \text{sur }]0,1[\times \mathbb{T}^d,$$
$$\operatorname{div} v \equiv 0 \quad \text{sur }]0,1[\times \mathbb{T}^d,$$

et si P est la loi de la solution de l'EDS :

$$\mathrm{d}\, X_t = v(t, X_t)\, \mathrm{d}\, t + \mathrm{d}\, B_t,$$
$$X_0 \sim \mathrm{d}\, x,$$

Alors $P \in \mathrm{Adm}(P_{0,1})$. A-t-on $P = \mathrm{Sol}(P_{0,1})$?

Merci !