

Transport optimal incompressible:

dépendance aux données et régularisation entropique

Aymeric Baradat

Sous la direction de Y. Brenier et D. Han-Kwan

CMLS, École Polytechnique

Introduction au transport optimal incompressible

Introduction au transport optimal incompressible

Dépendance aux données

Introduction au transport optimal incompressible

Dépendance aux données

Régularisation entropique

Introduction au transport optimal incompressible

Dépendance aux données et équation d'Euler cinétique

Régularisation entropique

Introduction au transport optimal incompressible

Le croisement de Shibuya



Le croisement de Shibuya



Le croisement de Shibuya



Le croisement de Shibuya



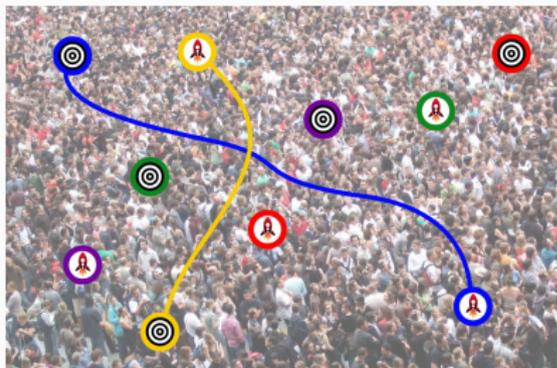
Le croisement de Shibuya



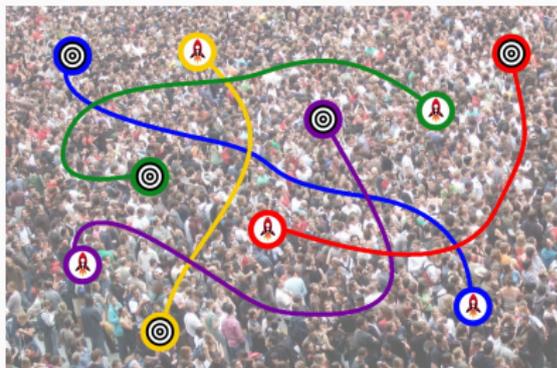
Le croisement de Shibuya



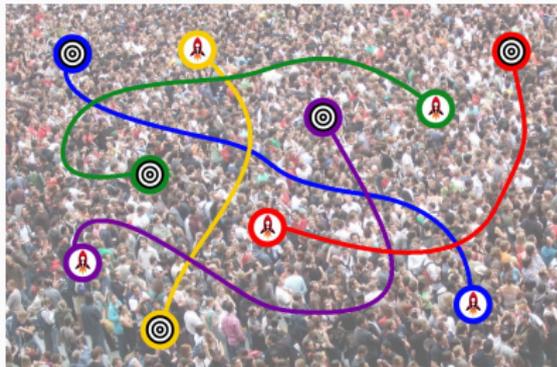
Le croisement de Shibuya



Le croisement de Shibuya



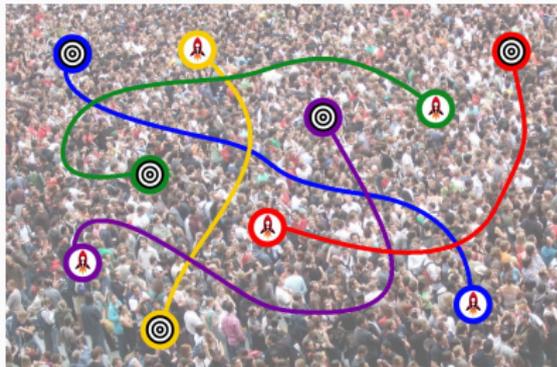
Le croisement de Shibuya



But : Sous contraintes d'**incompressibilité** et sur les **extrémités** :

Minimiser
$$\sum_{\omega \text{ chemin}} \frac{1}{2} \int_0^1 |\dot{\omega}_t|^2 dt.$$

Le croisement de Shibuya



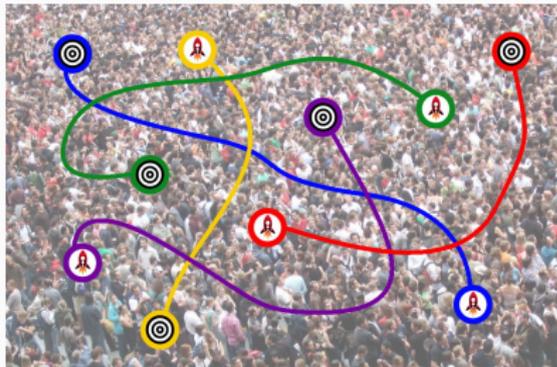
But : Sous contraintes d'**incompressibilité** et sur les **extrémités** :

$$\text{Minimiser} \quad \sum_{\omega \text{ chemin}} \frac{1}{2} \int_0^1 |\dot{\omega}_t|^2 dt.$$

S'il existe Φ et $(\Psi_t)_{t \in [0,1]}$ des difféo préservant la mesure t.q. :

$$\text{🎯} = \Phi(\text{🚀}), \quad \text{tout les chemins sont de la forme } \left(t \mapsto \Psi_t(\text{🚀}) \right),$$

Le croisement de Shibuya



But : Sous contraintes d'**incompressibilité** et sur les **extrémités** :

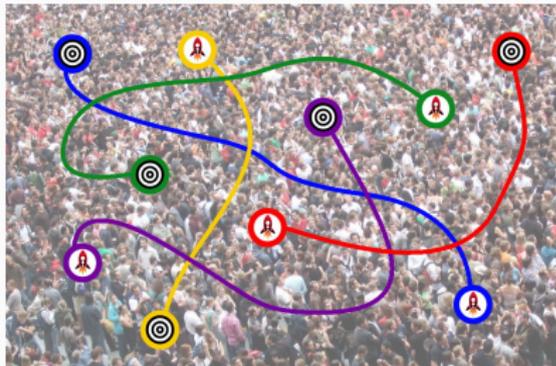
$$\text{Minimiser} \quad \sum_{\omega \text{ chemin}} \frac{1}{2} \int_0^1 |\dot{\omega}_t|^2 dt.$$

S'il existe Φ et $(\Psi_t)_{t \in [0,1]}$ des difféo préservant la mesure t.q. :

$$\text{🎯} = \Phi(\text{🚀}), \quad \text{tout les chemins sont de la forme } \left(t \mapsto \Psi_t(\text{🚀}) \right),$$

$$\text{alors :} \quad v(t, \Psi_t(\text{🚀})) := \partial_t \Psi_t(\text{🚀})$$

Le croisement de Shibuya



But : Sous contraintes d'**incompressibilité** et sur les **extrémités** :

$$\text{Minimiser} \quad \sum_{\omega \text{ chemin}} \frac{1}{2} \int_0^1 |\dot{\omega}_t|^2 dt.$$

S'il existe Φ et $(\Psi_t)_{t \in [0,1]}$ des difféo préservant la mesure t.q. :

$$\text{🎯} = \Phi(\text{🚀}), \quad \text{tout les chemins sont de la forme } \left(t \mapsto \Psi_t(\text{🚀}) \right),$$

alors :

$$v(t, \Psi_t(\text{🚀})) := \partial_t \Psi_t(\text{🚀})$$

est solution de l'équation d'Euler des fluides incompressibles [Arnol'd 66].

Transport optimal incompressible (processus) [Brenier 89]

Transport optimal incompressible (processus) [Brenier 89]

Donnée : $\gamma \in \mathcal{P}(\mathbb{T}^d \times \mathbb{T}^d)$.

$d\gamma(x, y)$: masse de particules voyageant de x à y .

Transport optimal incompressible (processus) [Brenier 89]

Donnée : $\gamma \in \mathcal{P}(\mathbb{T}^d \times \mathbb{T}^d)$.

$d\gamma(x, y)$: masse de particules voyageant de x à y .

Compétiteurs : $P \in \mathcal{P}(C([0, 1]; \mathbb{T}^d))$ (flot généralisé).

Transport optimal incompressible (processus) [Brenier 89]

Donnée : $\gamma \in \mathcal{P}(\mathbb{T}^d \times \mathbb{T}^d)$.

$d\gamma(x, y)$: masse de particules voyageant de x à y .

Compétiteurs : $P \in \mathcal{P}(C([0, 1]; \mathbb{T}^d))$ (flot généralisé).

$dP(\omega)$: masse de particules empruntant le chemin ω .

Transport optimal incompressible (processus) [Brenier 89]

Donnée : $\gamma \in \mathcal{P}(\mathbb{T}^d \times \mathbb{T}^d)$.

$d\gamma(x, y)$: masse de particules voyageant de x à y .

Compétiteurs : $P \in \mathcal{P}(C([0, 1]; \mathbb{T}^d))$ (flot généralisé).

$dP(\omega)$: masse de particules empruntant le chemin ω .

P doit vérifier :

Transport optimal incompressible (processus) [Brenier 89]

Donnée : $\gamma \in \mathcal{P}(\mathbb{T}^d \times \mathbb{T}^d)$.

$d\gamma(x, y)$: masse de particules voyageant de x à y .

Compétiteurs : $P \in \mathcal{P}(C([0, 1]; \mathbb{T}^d))$ (flot généralisé).

$dP(\omega)$: masse de particules empruntant le chemin ω .

P doit vérifier :

- Pour tout $A \subset \mathbb{T}^d \times \mathbb{T}^d$ mesurable,

$$P(\{(\omega_0, \omega_1) \in A\}) = \gamma(A) \quad (\text{compatibilité avec } \gamma).$$

Donnée : $\gamma \in \mathcal{P}(\mathbb{T}^d \times \mathbb{T}^d)$.

$d\gamma(x, y)$: masse de particules voyageant de x à y .

Compétiteurs : $P \in \mathcal{P}(C([0, 1]; \mathbb{T}^d))$ (flot généralisé).

$dP(\omega)$: masse de particules empruntant le chemin ω .

P doit vérifier :

- Pour tout $A \subset \mathbb{T}^d \times \mathbb{T}^d$ mesurable,

$$P(\{(\omega_0, \omega_1) \in A\}) = \gamma(A) \quad (\text{compatibilité avec } \gamma).$$

- Pour tout $A \subset \mathbb{T}^d$ mesurable, pour tout $t \in [0, 1]$,

$$P(\{\omega_t \in A\}) = \text{Leb}(A) \quad (\text{incompressibilité}).$$

(γ doit être *bistochastique*.)

Transport optimal incompressible (processus) [Brenier 89]

Donnée : $\gamma \in \mathcal{P}(\mathbb{T}^d \times \mathbb{T}^d)$.

$d\gamma(x, y)$: masse de particules voyageant de x à y .

Compétiteurs : $P \in \mathcal{P}(C([0, 1]; \mathbb{T}^d))$ (flot généralisé).

$dP(\omega)$: masse de particules empruntant le chemin ω .

P doit vérifier :

- Pour tout $A \subset \mathbb{T}^d \times \mathbb{T}^d$ mesurable,

$$P(\{(\omega_0, \omega_1) \in A\}) = \gamma(A) \quad (\text{compatibilité avec } \gamma).$$

- Pour tout $A \subset \mathbb{T}^d$ mesurable, pour tout $t \in [0, 1]$,

$$P(\{\omega_t \in A\}) = \text{Leb}(A) \quad (\text{incompressibilité}).$$

(γ doit être *bistochastique*.)

Fonctionnelle à minimiser :

$$\mathcal{A}(P) := \int \left\{ \int_0^1 \frac{|\dot{\omega}_t|^2}{2} dt \right\} dP(\omega).$$

Transport optimal incompressible (processus) [Brenier 89]

Donnée : $\gamma \in \mathcal{P}(\mathbb{T}^d \times \mathbb{T}^d)$.

$d\gamma(x, y)$: masse de particules voyageant de x à y .

Compétiteurs : $P \in \mathcal{P}(C([0, 1]; \mathbb{T}^d))$ (flot généralisé).

$dP(\omega)$: masse de particules empruntant le chemin ω .

P doit vérifier :

- Pour tout $A \subset \mathbb{T}^d \times \mathbb{T}^d$ mesurable,

$$P(\{(\omega_0, \omega_1) \in A\}) = \gamma(A) \quad (\text{compatibilité avec } \gamma).$$

- Pour tout $A \subset \mathbb{T}^d$ mesurable, pour tout $t \in [0, 1]$,

$$P(\{\omega_t \in A\}) = \text{Leb}(A) \quad (\text{incompressibilité}).$$

(γ doit être *bistochastique*.)

Fonctionnelle à minimiser :

$$\mathcal{A}(P) := \int \left\{ \int_0^1 \frac{|\dot{\omega}_t|^2}{2} dt \right\} dP(\omega).$$

Solution : Une solution du TOI(γ) est un minimiseur de \mathcal{A} dans la classe des compétiteurs. On note $\mathcal{A}^*(\gamma)$ l'action optimale.

Transport optimal incompressible (processus) [Brenier 89]

Donnée : $\gamma \in \mathcal{P}(\mathbb{T}^d \times \mathbb{T}^d)$.

$d\gamma(x, y)$: masse de particules voyageant de x à y .

Compétiteurs : $P \in \mathcal{P}(C([0, 1]; \mathbb{T}^d))$ (flot généralisé).

$dP(\omega)$: masse de particules empruntant le chemin ω .

P doit vérifier :

- Pour tout $A \subset \mathbb{T}^d \times \mathbb{T}^d$ mesurable,

$$P(\{(\omega_0, \omega_1) \in A\}) = \gamma(A) \quad (\text{compatibilité avec } \gamma).$$

- Pour tout $A \subset \mathbb{T}^d$ mesurable, pour tout $t \in [0, 1]$,

$$P(\{\omega_t \in A\}) = \rho_t(A) \quad (\text{incompressibilité}).$$

(γ doit être *bistochastique*.)

Fonctionnelle à minimiser :

$$\mathcal{A}(P) := \int \left\{ \int_0^1 \frac{|\dot{\omega}_t|^2}{2} dt \right\} dP(\omega).$$

Solution : Une solution du **TOI**(γ, ρ) est un minimiseur de \mathcal{A} dans la classe des compétiteurs. On note $\mathcal{A}^*(\gamma, \rho)$ l'action optimale.

Retour à Shibuya



Retour à Shibuya



Retour à Shibuya



Retour à Shibuya



Retour à Shibuya



Retour à Shibuya



Retour à Shibuya



Retour à Shibuya



Pour chaque couleur i , $\rho^i : t \mapsto \rho_t^i$ interpole entre ρ_0^i et ρ_1^i ,

Retour à Shibuya



Pour chaque couleur i , $\rho^i : t \mapsto \rho_t^i$ interpole entre ρ_0^i et ρ_1^i , avec :

$$\sum_{i \text{ couleur}} \rho_t^i(x) = 1.$$

Retour à Shibuya



Pour chaque couleur i , $\rho^i : t \mapsto \rho_t^i$ interpole entre ρ_0^i et ρ_1^i , avec :

$$\sum_{i \text{ couleur}} \rho_t^i(x) = 1.$$

But : Minimiser :

$$\sum_{i \text{ couleur}} \frac{1}{2} \int_0^1 \int |c_t^i(x)|^2 d\rho_t^i(x) dt,$$

Retour à Shibuya



Pour chaque couleur i , $\rho^i : t \mapsto \rho_t^i$ interpole entre ρ_0^i et ρ_1^i , avec :

$$\sum_{i \text{ couleur}} \rho_t^i(x) = 1.$$

But : Minimiser :

$$\sum_{i \text{ couleur}} \frac{1}{2} \int_0^1 \int |c_t^i(x)|^2 d\rho_t^i(x) dt,$$

où c^i est la **vitesse moyenne** le long de cette interpolation.

Données : $(\mathcal{I}, \mathfrak{m})$ un espace de proba (indices des phases),

Données : $(\mathcal{I}, \mathfrak{m})$ un espace de proba (indices des phases),
 $(\rho_0, \rho_1) = (\rho_0^i, \rho_1^i)_{i \in \mathcal{I}}$, famille de probas sur \mathbb{T}^d .

Données : $(\mathcal{I}, \mathfrak{m})$ un espace de proba (indices des phases),
 $(\rho_0, \rho_1) = (\rho_0^i, \rho_1^i)_{i \in \mathcal{I}}$, famille de probas sur \mathbb{T}^d .
Compétiteurs : $(\rho, \mathbf{c}) = (\rho^i, c^i)_{i \in \mathcal{I}}$, où pour chaque $i \in \mathcal{I}$:

Données : $(\mathcal{I}, \mathfrak{m})$ un espace de proba (indices des phases),
 $(\rho_0, \rho_1) = (\rho_0^i, \rho_1^i)_{i \in \mathcal{I}}$, famille de probas sur \mathbb{T}^d .

Compétiteurs : $(\rho, \mathbf{c}) = (\rho^i, c^i)_{i \in \mathcal{I}}$, où pour chaque $i \in \mathcal{I}$:

- $\rho^i = \rho_t^i(x) \in C([0, 1]; \mathcal{P}(\mathbb{T}^d))$,

Données : $(\mathcal{I}, \mathfrak{m})$ un espace de proba (indices des phases),

$(\rho_0, \rho_1) = (\rho_0^i, \rho_1^i)_{i \in \mathcal{I}}$, famille de probas sur \mathbb{T}^d .

Compétiteurs : $(\rho, \mathbf{c}) = (\rho^i, c^i)_{i \in \mathcal{I}}$, où pour chaque $i \in \mathcal{I}$:

- $\rho^i = \rho_t^i(x) \in C([0, 1]; \mathcal{P}(\mathbb{T}^d))$, $c^i = c_t^i(x)$ champ de vecteurs,

Données : $(\mathcal{I}, \mathfrak{m})$ un espace de proba (indices des phases),

$(\rho_0, \rho_1) = (\rho_0^i, \rho_1^i)_{i \in \mathcal{I}}$, famille de probas sur \mathbb{T}^d .

Compétiteurs : $(\rho, \mathbf{c}) = (\rho^i, c^i)_{i \in \mathcal{I}}$, où pour chaque $i \in \mathcal{I}$:

- $\rho^i = \rho_t^i(x) \in C([0, 1]; \mathcal{P}(\mathbb{T}^d))$, $c^i = c_t^i(x)$ champ de vecteurs,
- $\rho_t^i|_{t=0} = \rho_0^i$ et $\rho_t^i|_{t=1} = \rho_1^i$.

Données : $(\mathcal{I}, \mathfrak{m})$ un espace de proba (indices des phases),

$(\rho_0, \rho_1) = (\rho_0^i, \rho_1^i)_{i \in \mathcal{I}}$, famille de probas sur \mathbb{T}^d .

Compétiteurs : $(\rho, \mathbf{c}) = (\rho^i, c^i)_{i \in \mathcal{I}}$, où pour chaque $i \in \mathcal{I}$:

- $\rho^i = \rho_t^i(x) \in C([0, 1]; \mathcal{P}(\mathbb{T}^d))$, $c^i = c_t^i(x)$ champ de vecteurs,
- $\rho_t^i|_{t=0} = \rho_0^i$ et $\rho_t^i|_{t=1} = \rho_1^i$.
- (ρ^i, c^i) est solution de **l'équation de continuité** :

$$\partial_t \rho_t^i + \operatorname{div}(\rho_t^i c_t^i) = 0,$$

Données : $(\mathcal{I}, \mathfrak{m})$ un espace de proba (indices des phases),
 $(\rho_0, \rho_1) = (\rho_0^i, \rho_1^i)_{i \in \mathcal{I}}$, famille de probas sur \mathbb{T}^d .

Compétiteurs : $(\rho, \mathbf{c}) = (\rho^i, \mathbf{c}^i)_{i \in \mathcal{I}}$, où pour chaque $i \in \mathcal{I}$:

- $\rho^i = \rho_t^i(x) \in C([0, 1]; \mathcal{P}(\mathbb{T}^d))$, $\mathbf{c}^i = \mathbf{c}_t^i(x)$ champ de vecteurs,
- $\rho_t^i|_{t=0} = \rho_0^i$ et $\rho_t^i|_{t=1} = \rho_1^i$.
- (ρ^i, \mathbf{c}^i) est solution de **l'équation de continuité** :

$$\partial_t \rho_t^i + \operatorname{div}(\rho_t^i \mathbf{c}_t^i) = 0,$$

- Pour tout $t \in [0, 1]$:

$$\int \rho_t^i \, d\mathfrak{m}(i) = \operatorname{Leb}.$$

Données : $(\mathcal{I}, \mathfrak{m})$ un espace de proba (indices des phases),
 $(\rho_0, \rho_1) = (\rho_0^i, \rho_1^i)_{i \in \mathcal{I}}$, famille de probas sur \mathbb{T}^d .

Compétiteurs : $(\rho, \mathbf{c}) = (\rho^i, \mathbf{c}^i)_{i \in \mathcal{I}}$, où pour chaque $i \in \mathcal{I}$:

- $\rho^i = \rho_t^i(x) \in C([0, 1]; \mathcal{P}(\mathbb{T}^d))$, $\mathbf{c}^i = \mathbf{c}_t^i(x)$ champ de vecteurs,
- $\rho_t^i|_{t=0} = \rho_0^i$ et $\rho_t^i|_{t=1} = \rho_1^i$.
- (ρ^i, \mathbf{c}^i) est solution de **l'équation de continuité** :

$$\partial_t \rho_t^i + \operatorname{div}(\rho_t^i \mathbf{c}_t^i) = 0,$$

- Pour tout $t \in [0, 1]$:

$$\int \rho_t^i \, \mathrm{d}\mathfrak{m}(i) = \operatorname{Leb}.$$

Fonctionnelle à minimiser :

$$\mathcal{A}(\rho, \mathbf{c}) = \int \frac{1}{2} \int_0^1 \int |c_t^i(x)|^2 \, \mathrm{d}\rho_t^i(x) \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}\mathfrak{m}(i)$$

Données : $(\mathcal{I}, \mathfrak{m})$ un espace de proba (indices des phases),
 $(\rho_0, \rho_1) = (\rho_0^i, \rho_1^i)_{i \in \mathcal{I}}$, famille de probas sur \mathbb{T}^d .

Compétiteurs : $(\rho, \mathbf{c}) = (\rho^i, \mathbf{c}^i)_{i \in \mathcal{I}}$, où pour chaque $i \in \mathcal{I}$:

- $\rho^i = \rho_t^i(x) \in C([0, 1]; \mathcal{P}(\mathbb{T}^d))$, $\mathbf{c}^i = \mathbf{c}_t^i(x)$ champ de vecteurs,
- $\rho_t^i|_{t=0} = \rho_0^i$ et $\rho_t^i|_{t=1} = \rho_1^i$.
- (ρ^i, \mathbf{c}^i) est solution de **l'équation de continuité** :

$$\partial_t \rho_t^i + \operatorname{div}(\rho_t^i \mathbf{c}_t^i) = 0,$$

- Pour tout $t \in [0, 1]$:

$$\int \rho_t^i \, \mathfrak{m}(i) = \operatorname{Leb}.$$

Fonctionnelle à minimiser :

$$\mathcal{A}(\rho, \mathbf{c}) = \int \frac{1}{2} \int_0^1 \int |c_t^i(x)|^2 \, d\rho_t^i(x) \, dt \, \mathfrak{m}(i) = \int \mathcal{A}(\rho^i, \mathbf{c}^i) \, \mathfrak{m}(i).$$

Données : $(\mathcal{I}, \mathfrak{m})$ un espace de proba (indices des phases),
 $(\rho_0, \rho_1) = (\rho_0^i, \rho_1^i)_{i \in \mathcal{I}}$, famille de probas sur \mathbb{T}^d .

Compétiteurs : $(\rho, \mathbf{c}) = (\rho^i, \mathbf{c}^i)_{i \in \mathcal{I}}$, où pour chaque $i \in \mathcal{I}$:

- $\rho^i = \rho_t^i(x) \in C([0, 1]; \mathcal{P}(\mathbb{T}^d))$, $\mathbf{c}^i = \mathbf{c}_t^i(x)$ champ de vecteurs,
- $\rho_t^i|_{t=0} = \rho_0^i$ et $\rho_t^i|_{t=1} = \rho_1^i$.
- (ρ^i, \mathbf{c}^i) est solution de **l'équation de continuité** :

$$\partial_t \rho_t^i + \operatorname{div}(\rho_t^i \mathbf{c}_t^i) = 0,$$

- Pour tout $t \in [0, 1]$:

$$\int \rho_t^i \, \mathfrak{m}(i) = \operatorname{Leb}.$$

Fonctionnelle à minimiser :

$$\mathcal{A}(\rho, \mathbf{c}) = \int \frac{1}{2} \int_0^1 \int |c_t^i(x)|^2 \, d\rho_t^i(x) \, dt \, \mathfrak{m}(i) = \int \mathcal{A}(\rho^i, \mathbf{c}^i) \, \mathfrak{m}(i).$$

Solution : Une solution du TOI (ρ_0, ρ_1) est un minimiseur de \mathcal{A} dans la classe des compétiteurs.

Théorème (Brenier 1993 ; Ambrosio & Figalli 2009)

Théorème (Brenier 1993 ; Ambrosio & Figalli 2009)

Pour tout γ , la fonctionnelle convexe $\rho \mapsto \mathcal{A}^(\gamma, \rho)$*

Théorème (Brenier 1993 ; Ambrosio & Figalli 2009)

Pour tout γ , la fonctionnelle convexe $\rho \mapsto \mathcal{A}^(\gamma, \rho)$ a pour sous-différentielle en $\rho = \text{Leb}$ un singleton $\{p\} \subset \mathcal{D}'((0, 1) \times \mathbb{T}^d)$*

Théorème (Brenier 1993 ; Ambrosio & Figalli 2009)

Pour tout γ , la fonctionnelle convexe $\rho \mapsto \mathcal{A}^(\gamma, \rho)$ a pour sous-différentielle en $\rho = \text{Leb}$ un singleton $\{p\} \subset \mathcal{D}'((0, 1) \times \mathbb{T}^d)$, de sorte que :*

$$\forall \rho, \quad \mathcal{A}^*(\gamma, \rho) \geq \mathcal{A}^*(\gamma, \text{Leb}) + \langle p, \rho - 1 \rangle.$$

Théorème (Brenier 1993 ; Ambrosio & Figalli 2009)

Pour tout γ , la fonctionnelle convexe $\rho \mapsto \mathcal{A}^*(\gamma, \rho)$ a pour sous-différentielle en $\rho = \text{Leb}$ un singleton $\{p\} \subset \mathcal{D}'((0, 1) \times \mathbb{T}^d)$, de sorte que :

$$\forall \rho, \quad \mathcal{A}^*(\gamma, \rho) \geq \mathcal{A}^*(\gamma, \text{Leb}) + \langle p, \rho - 1 \rangle.$$



Si en outre, p est assez régulière,

Théorème (Brenier 1993 ; Ambrosio & Figalli 2009)

Pour tout γ , la fonctionnelle convexe $\rho \mapsto \mathcal{A}^*(\gamma, \rho)$ a pour sous-différentielle en $\rho = \text{Leb}$ un singleton $\{p\} \subset \mathcal{D}'((0, 1) \times \mathbb{T}^d)$, de sorte que :

$$\forall \rho, \quad \mathcal{A}^*(\gamma, \rho) \geq \mathcal{A}^*(\gamma, \text{Leb}) + \langle p, \rho - 1 \rangle.$$



Si en outre, p est assez régulière, pour toute solution P de $\text{TOI}(\gamma)$,

Théorème (Brenier 1993 ; Ambrosio & Figalli 2009)

Pour tout γ , la fonctionnelle convexe $\rho \mapsto \mathcal{A}^*(\gamma, \rho)$ a pour sous-différentielle en $\rho = \text{Leb}$ un singleton $\{p\} \subset \mathcal{D}'((0, 1) \times \mathbb{T}^d)$, de sorte que :

$$\forall \rho, \quad \mathcal{A}^*(\gamma, \rho) \geq \mathcal{A}^*(\gamma, \text{Leb}) + \langle p, \rho - 1 \rangle.$$



Si en outre, p est assez régulière, pour toute solution P de $\text{TOI}(\gamma)$, P -presque toute courbe ω minimise le lagrangien :

$$\int_0^1 \left\{ \frac{|\dot{\omega}_t|^2}{2} - p(t, \omega_t) \right\} dt$$

parmi les courbes partageant ses extrémités.

Dépendance aux données

Question

Comment la pression p dépend-elle de γ ?

Question

Comment la pression p dépend-elle de γ ?

- Topologie sur γ : **topologie de la convergence étroite**, métrisée par d_{MK} , la **distance de Monge-Kantorovic** d'ordre 2 sur $\mathcal{P}(\mathbb{T}^d \times \mathbb{T}^d)$.

Question

Comment la pression p dépend-elle de γ ?

- Topologie sur γ : **topologie de la convergence étroite**, métrisée par d_{MK} , la **distance de Monge-Kantorovic** d'ordre 2 sur $\mathcal{P}(\mathbb{T}^d \times \mathbb{T}^d)$.
- Topologie pour p : dépend de la situation.

Pour $\xi : [0, 1] \times \mathbb{T}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$, on note :

$$N(\xi) := \sup_t \text{Lip } \xi(t, \bullet) + \left(\int_0^1 \|\partial_t \xi(t, \bullet)\|_{L^\infty(\mathbb{T}^d)}^2 dt \right)^{1/2} .$$

Continuité höderienne dans une topologie duale

Pour $\xi : [0, 1] \times \mathbb{T}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$, on note :

$$N(\xi) := \sup_t \text{Lip } \xi(t, \bullet) + \left(\int_0^1 \|\partial_t \xi(t, \bullet)\|_{L^\infty(\mathbb{T}^d)}^2 dt \right)^{1/2}.$$

Théorème (B. 2019)

Soit $\tau \in (0, 1/4)$. Il existe $C = C(d, \tau)$, et $\alpha = \alpha(d) > 0$ tels que pour toutes mesures bistochastiques γ_1, γ_2 :

$$\sup_{\substack{N(\xi) \leq 1 \\ \text{Supp}(\xi) \subset [\tau, 1-\tau] \times \mathbb{T}^d}} |\langle \nabla p(\gamma_2) - \nabla p(\gamma_1), \xi \rangle| \leq C d_{\text{MK}}(\gamma_1, \gamma_2)^\alpha.$$

Par des approximations du type :

$$-\langle \nabla p(\gamma), \xi \rangle \approx \frac{\mathcal{A}^*(\gamma, \text{Leb} + \delta \text{div } \xi) - \mathcal{A}^*(\gamma, \text{Leb})}{\delta},$$

on se ramène à l'étude de \mathcal{A}^* .

Par des approximations du type :

$$-\langle \nabla p(\gamma), \xi \rangle \approx \frac{\mathcal{A}^*(\gamma, \text{Leb} + \delta \operatorname{div} \xi) - \mathcal{A}^*(\gamma, \text{Leb})}{\delta},$$

on se ramène à l'étude de \mathcal{A}^* .

γ_1, γ_2 bistochastiques, Γ couplage optimal, P solution de $\text{TOI}(\gamma_1)$.

Par des approximations du type :

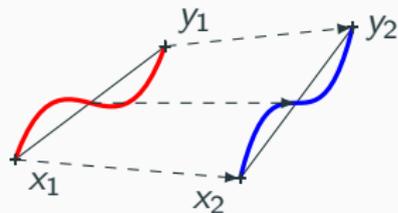
$$-\langle \nabla p(\gamma), \xi \rangle \approx \frac{\mathcal{A}^*(\gamma, \text{Leb} + \delta \text{div } \xi) - \mathcal{A}^*(\gamma, \text{Leb})}{\delta},$$

on se ramène à l'étude de \mathcal{A}^* .

γ_1, γ_2 bistochastiques, Γ couplage optimal, P solution de $\text{TOI}(\gamma_1)$.

Pour tout x_1, y_1, x_2, y_2 , et tout $\omega \in \text{Supp}(P)$
joignant x_1 à y_1 , on remplace ω par :

$$t \mapsto \omega_t + (1 - t)(x_2 - x_1) + t(y_2 - y_1).$$



Par des approximations du type :

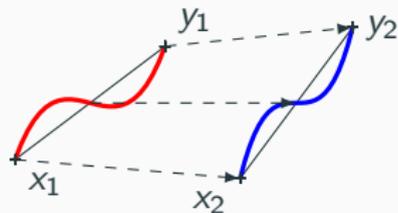
$$-\langle \nabla p(\gamma), \xi \rangle \approx \frac{\mathcal{A}^*(\gamma, \text{Leb} + \delta \text{div } \xi) - \mathcal{A}^*(\gamma, \text{Leb})}{\delta},$$

on se ramène à l'étude de \mathcal{A}^* .

γ_1, γ_2 bistochastiques, Γ couplage optimal, P solution de $\text{TOI}(\gamma_1)$.

Pour tout x_1, y_1, x_2, y_2 , et tout $\omega \in \text{Supp}(P)$ joignant x_1 à y_1 , on remplace ω par :

$$t \mapsto \omega_t + (1-t)(x_2 - x_1) + t(y_2 - y_1).$$



En intégrant cette transformation par rapport à Γ , on obtient \tilde{P} compatible avec γ_2 et tel que $|\mathcal{A}(\tilde{P}) - \mathcal{A}(P)| \sim d_{\text{MK}}(\gamma_1, \gamma_2)$.

Par des approximations du type :

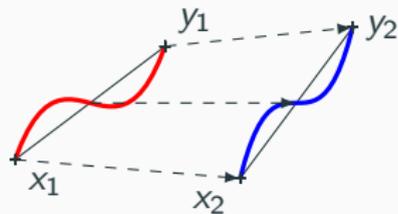
$$-\langle \nabla p(\gamma), \xi \rangle \approx \frac{\mathcal{A}^*(\gamma, \text{Leb} + \delta \text{div } \xi) - \mathcal{A}^*(\gamma, \text{Leb})}{\delta},$$

on se ramène à l'étude de \mathcal{A}^* .

γ_1, γ_2 bistochastiques, Γ couplage optimal, P solution de $\text{TOI}(\gamma_1)$.

Pour tout x_1, y_1, x_2, y_2 , et tout $\omega \in \text{Supp}(P)$ joignant x_1 à y_1 , on remplace ω par :

$$t \mapsto \omega_t + (1-t)(x_2 - x_1) + t(y_2 - y_1).$$



En intégrant cette transformation par rapport à Γ , on obtient \tilde{P} compatible avec γ_2 et tel que $|\mathcal{A}(\tilde{P}) - \mathcal{A}(P)| \sim d_{\text{MK}}(\gamma_1, \gamma_2)$.

\tilde{P} n'est pas incompressible. On utilise [Dacorogna & Moser 90] pour le redresser, sans trop augmenter \mathcal{A} . □

Théorème (B. en préparation)

Il existe γ bistochastique telle que pour tout $r > 1$, et tout $\varepsilon > 0$:

$$\sup_{\substack{\tilde{\gamma} \text{ bistochastique,} \\ d_{\text{MK}}(\gamma, \tilde{\gamma}) \leq \varepsilon}} \frac{|p(\tilde{\gamma}) - p(\gamma)|_{L_t^r L_x^1}}{d_{\text{MK}}(\gamma, \tilde{\gamma})} = +\infty.$$

L'équation d'Euler cinétique

Considérons une version **cinétique** de l'équation d'Euler incompressible étudiée par [Brenier 89; Grenier 96] :

$$(kEu) \left\{ \begin{array}{l} \partial_t f(t, x, v) + v \cdot \nabla_x f(t, x, v) - \nabla_x p(t, x) \cdot \nabla_v f(t, x, v) = 0, \\ \int f(t, x, v) dv \equiv 1, \\ f|_{t=0} = f_0, \end{array} \right.$$

où $t \geq 0$, $x \in \mathbb{T}^d$, $v \in \mathbb{R}^d$.

L'équation d'Euler cinétique

Considérons une version **cinétique** de l'équation d'Euler incompressible étudiée par [Brenier 89; Grenier 96] :

$$(kEu) \left\{ \begin{array}{l} \partial_t f(t, x, v) + v \cdot \nabla_x f(t, x, v) - \nabla_x p(t, x) \cdot \nabla_v f(t, x, v) = 0, \\ \int f(t, x, v) dv \equiv 1, \\ f|_{t=0} = f_0, \end{array} \right.$$

où $t \geq 0$, $x \in \mathbb{T}^d$, $v \in \mathbb{R}^d$.

De façon analogue au cas de l'équation d'Euler, p est alors solution d'une équation elliptique :

$$-\Delta p(t, x) = \operatorname{div} \mathbf{div} \int v \otimes v f(t, x, v) dv.$$

L'équation d'Euler cinétique

Considérons une version **cinétique** de l'équation d'Euler incompressible étudiée par [Brenier 89 ; Grenier 96] :

$$(kEu) \left\{ \begin{array}{l} \partial_t f(t, x, v) + v \cdot \nabla_x f(t, x, v) - \nabla_x p(t, x) \cdot \nabla_v f(t, x, v) = 0, \\ -\Delta p(t, x) = \operatorname{div} \operatorname{div} \int v \otimes v f(t, x, v) dv, \\ f|_{t=0} = f_0, \end{array} \right.$$

où $t \geq 0$, $x \in \mathbb{T}^d$, $v \in \mathbb{R}^d$.

De façon analogue au cas de l'équation d'Euler, p est alors solution d'une équation elliptique :

$$-\Delta p(t, x) = \operatorname{div} \operatorname{div} \int v \otimes v f(t, x, v) dv.$$

L'équation d'Euler cinétique

Considérons une version **cinétique** de l'équation d'Euler incompressible étudiée par [Brenier 89 ; Grenier 96] :

$$(kEu) \left\{ \begin{array}{l} \partial_t f(t, x, v) + v \cdot \nabla_x f(t, x, v) - \nabla_x p(t, x) \cdot \nabla_v f(t, x, v) = 0, \\ -\Delta p(t, x) = \operatorname{div} \operatorname{div} \int v \otimes v f(t, x, v) dv, \\ f|_{t=0} = f_0, \end{array} \right.$$

où $t \geq 0$, $x \in \mathbb{T}^d$, $v \in \mathbb{R}^d$.

De façon analogue au cas de l'équation d'Euler, p est alors solution d'une équation elliptique :

$$-\Delta p(t, x) = \operatorname{div} \operatorname{div} \int v \otimes v f(t, x, v) dv.$$

[Grenier 96] : (kEu) bien posée dans des espaces de régularité analytique.

Proposition

Soit P une solution du TOI, dont la pression est lisse. Alors :

$$f_t := \int \delta_{(\omega_t, \dot{\omega}_t)} dP(\omega).$$

Proposition

Soit P une solution du TOI, dont la pression est lisse. Alors :

$$f_t := \int \delta_{(\omega_t, \dot{\omega}_t)} dP(\omega).$$

C'est une solution faible de l'équation d'Euler cinétique.

Equivalence TOI - (kEu)

Proposition

Soit P une solution du TOI, dont la pression est lisse. Alors :

$$f_t := \int \delta_{(\omega_t, \dot{\omega}_t)} dP(\omega).$$

C'est une solution faible de l'équation d'Euler cinétique.



Soit (f_t) un solution faible de (kEu) dont la pression p est lisse et dont f_0 est à support compact.

Equivalence TOI - (kEu)

Proposition

Soit P une solution du TOI, dont la pression est lisse. Alors :

$$f_t := \int \delta_{(\omega_t, \dot{\omega}_t)} dP(\omega).$$

C'est une solution faible de l'équation d'Euler cinétique.



Soit (f_t) un solution faible de (kEu) dont la pression p est lisse et dont f_0 est à support compact. Soit $\Psi^T(x, v)$ la solution jusqu'au temps T de l'EDO :

$$\ddot{\omega}_t = -\nabla p(t, \omega_t), \quad \omega_0 = x, \quad \dot{\omega}_0 = v,$$

Equivalence TOI - (kEu)

Proposition

Soit P une solution du TOI, dont la pression est lisse. Alors :

$$f_t := \int \delta_{(\omega_t, \dot{\omega}_t)} dP(\omega).$$

C'est une solution faible de l'équation d'Euler cinétique.



Soit (f_t) une solution faible de (kEu) dont la pression p est lisse et dont f_0 est à support compact. Soit $\Psi^T(x, v)$ la solution jusqu'au temps T de l'EDO :

$$\ddot{\omega}_t = -\nabla p(t, \omega_t), \quad \omega_0 = x, \quad \dot{\omega}_0 = v,$$

et :

$$P := \int \delta_{\Psi^T(x, v)} f_0(x, v) dx dv$$

Equivalence TOI - (kEu)

Proposition

Soit P une solution du TOI, dont la pression est lisse. Alors :

$$f_t := \int \delta_{(\omega_t, \dot{\omega}_t)} dP(\omega).$$

C'est une solution faible de l'équation d'Euler cinétique.



Soit (f_t) un solution faible de (kEu) dont la pression p est lisse et dont f_0 est à support compact. Soit $\Psi^T(x, v)$ la solution jusqu'au temps T de l'EDO :

$$\ddot{\omega}_t = -\nabla p(t, \omega_t), \quad \omega_0 = x, \quad \dot{\omega}_0 = v,$$

et :

$$P := \int \delta_{\Psi^T(x, v)} f_0(x, v) dx dv$$

Alors si T est suffisamment petit,

Equivalence TOI - (kEu)

Proposition

Soit P une solution du TOI, dont la pression est lisse. Alors :

$$f_t := \int \delta_{(\omega_t, \dot{\omega}_t)} dP(\omega).$$

C'est une solution faible de l'équation d'Euler cinétique.



Soit (f_t) un solution faible de (kEu) dont la pression p est lisse et dont f_0 est à support compact. Soit $\Psi^T(x, v)$ la solution jusqu'au temps T de l'EDO :

$$\ddot{\omega}_t = -\nabla p(t, \omega_t), \quad \omega_0 = x, \quad \dot{\omega}_0 = v,$$

et :

$$P := \int \delta_{\Psi^T(x, v)} f_0(x, v) dx dv$$

Alors si T est suffisamment petit, P est une solution du TOI par rapport à son propre γ .

Equivalence TOI - (kEu)

Proposition

Soit P une solution du TOI, dont la pression est lisse. Alors :

$$f_t := \int \delta_{(\omega_t, \dot{\omega}_t)} dP(\omega).$$

C'est une solution faible de l'équation d'Euler cinétique.



Soit (f_t) une solution faible de (kEu) dont la pression p est lisse et dont f_0 est à support compact. Soit $\Psi^T(x, v)$ la solution jusqu'au temps T de l'EDO :

$$\ddot{\omega}_t = -\nabla p(t, \omega_t), \quad \omega_0 = x, \quad \dot{\omega}_0 = v,$$

et :

$$P := \int \delta_{\Psi^T(x, v)} f_0(x, v) dx dv$$

Alors si T est suffisamment petit, P est une solution du TOI par rapport à son propre γ .



Dans les deux cas, les pressions coïncident.

$$(kEu) \left\{ \begin{array}{l} \partial_t f(t, x, v) + v \cdot \nabla_x f(t, x, v) - \nabla_x p(t, x) \cdot \nabla_v f(t, x, v) = 0, \\ -\Delta p(t, x) = \operatorname{div} \operatorname{div} \int v \otimes v f(t, x, v) dv, \\ f|_{t=0} = f_0, \end{array} \right.$$

Linéarisation de (kEu)

Tout profil **homogène** et lisse $f(t, x, v) = \mu(v)$ fournit une solution **stationnaire** avec $\nabla_x p = 0$.

$$(kEu) \left\{ \begin{array}{l} \partial_t f(t, x, v) + v \cdot \nabla_x f(t, x, v) - \nabla_x p(t, x) \cdot \nabla_v f(t, x, v) = 0, \\ -\Delta p(t, x) = \operatorname{div} \operatorname{div} \int v \otimes v f(t, x, v) dv, \\ f|_{t=0} = f_0, \end{array} \right.$$

Linéarisation de (kEu)

Tout profil **homogène** et lisse $f(t, x, v) = \mu(v)$ fournit une solution **stationnaire** avec $\nabla_x p = 0$.

La linéarisation de (kEu) autour du profil μ donne :

$$(L) \quad \begin{cases} \partial_t f(t, x, v) + v \cdot \nabla_x f(t, x, v) - \nabla_x p(t, x) \cdot \nabla_v \mu(v) = 0, \\ -\Delta p(t, x) = \operatorname{div} \operatorname{div} \int v \otimes v f(t, x, v) dv, \\ f|_{t=0} = f_0, \end{cases}$$

Linéarisation de (kEu)

Tout profil **homogène** et lisse $f(t, x, v) = \mu(v)$ fournit une solution **stationnaire** avec $\nabla_x p = 0$.

La linéarisation de (kEu) autour du profil μ donne :

$$(L) \quad \begin{cases} \partial_t f(t, x, v) + v \cdot \nabla_x f(t, x, v) - \nabla_x p(t, x) \cdot \nabla_v \mu(v) = 0, \\ -\Delta p(t, x) = \operatorname{div} \operatorname{div} \int v \otimes v f(t, x, v) dv, \\ f|_{t=0} = f_0, \end{cases}$$

On cherche les solutions ayant la forme de **modes propres exponentiels** (MPE) :

$$f(t, x, v) = g(v) \exp(in \cdot x) \exp(\lambda t),$$

où $n \in \mathbb{Z}^d$ est la **fréquence**, $\lambda \in \mathbb{C}$ avec $\Re(\lambda) > 0$ est le **taux de croissance**.

Linéarisation de (kEu)

Tout profil **homogène** et lisse $f(t, x, v) = \mu(v)$ fournit une solution **stationnaire** avec $\nabla_x p = 0$.

La linéarisation de (kEu) autour du profil μ donne :

$$(L) \quad \begin{cases} \partial_t f(t, x, v) + v \cdot \nabla_x f(t, x, v) - \nabla_x p(t, x) \cdot \nabla_v \mu(v) = 0, \\ -\Delta p(t, x) = \operatorname{div} \operatorname{div} \int v \otimes v f(t, x, v) dv, \\ f|_{t=0} = f_0, \end{cases}$$

On cherche les solutions ayant la forme de **modes propres exponentiels** (MPE) :

$$f(t, x, v) = g(v) \exp(in \cdot x) \exp(\lambda t),$$

où $n \in \mathbb{Z}^d$ est la **fréquence**, $\lambda \in \mathbb{C}$ avec $\Re(\lambda) > 0$ est le **taux de croissance**.

S'il existe un MPE, on dit que μ est **instable**.

Critère d'instabilité de Penrose

Proposition (Penrose 1960)

Soit μ un profile lisse. L'équation linéaire (L) admet un MPE de fréquence n et de taux de croissance λ si et seulement si :

$$(Pen) \quad \int \frac{in \cdot \nabla_v \mu(v)}{\lambda + in \cdot v} dv = - \int \frac{|n|^2}{(\lambda + in \cdot v)^2} \mu(v) dv = 0.$$

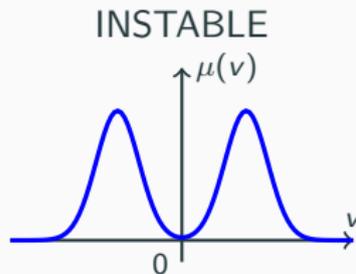
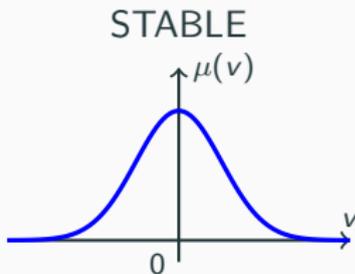
Critère d'instabilité de Penrose

Proposition (Penrose 1960)

Soit μ un profil lisse. L'équation linéaire (L) admet un MPE de fréquence n et de taux de croissance λ si et seulement si :

$$(Pen) \quad \int \frac{in \cdot \nabla_v \mu(v)}{\lambda + in \cdot v} dv = - \int \frac{|n|^2}{(\lambda + in \cdot v)^2} \mu(v) dv = 0.$$

En dimension 1 :



Critère d'instabilité de Penrose

Proposition (Penrose 1960)

Soit μ un profile lisse. L'équation linéaire (L) admet un MPE de fréquence n et de taux de croissance λ si et seulement si :

$$(Pen) \quad \int \frac{in \cdot \nabla_v \mu(v)}{\lambda + in \cdot v} dv = - \int \frac{|n|^2}{(\lambda + in \cdot v)^2} \mu(v) dv = 0.$$

Proposition

Si μ est instable, (n, λ) vérifient (Pen) et $k \in \mathbb{N}^*$, alors $(kn, k\lambda)$ vérifient également (Pen).

Caractère mal-posé de (kEu)

Notons :

$$\gamma_0 := \sup_{(n,\lambda) \text{ vérifiant } (Pen)} \frac{\Re(\lambda)}{|n|}.$$

Caractère mal-posé de (kEu)

Notons :

$$\gamma_0 := \sup_{(n,\lambda) \text{ vérifiant } (Pen)} \frac{\Re(\lambda)}{|n|}.$$

Les MPE de fréquence n grandissent comme :

$$\exp(\gamma_0 |n| t).$$

Caractère mal-posé de (kEu)

Notons :

$$\gamma_0 := \sup_{(n,\lambda) \text{ vérifiant } (Pen)} \frac{\Re(\lambda)}{|n|}.$$

Les MPE de fréquence n grandissent comme :

$$\exp(\gamma_0 |n| t).$$

Conséquences :

- L'équation linéaire (L) est mal-posée dans les espaces de Sobolev.

Caractère mal-posé de (kEu)

Notons :

$$\gamma_0 := \sup_{(n,\lambda) \text{ vérifiant } (Pen)} \frac{\Re(\lambda)}{|n|}.$$

Les MPE de fréquence n grandissent comme :

$$\exp(\gamma_0 |n| t).$$

Conséquences :

- L'équation linéaire (L) est mal-posée dans les espaces de Sobolev.
- [Han-Kwan & Nguyen 16] : Au voisinages de profils μ instables et **analytiques**, l'équation non-linéaire (kEu) est mal-posée dans les espaces de Sobolev (la preuve est constructive).

Caractère mal-posé de (kEu)

Notons :

$$\gamma_0 := \sup_{(n,\lambda) \text{ vérifiant } (Pen)} \frac{\Re(\lambda)}{|n|}.$$

Les MPE de fréquence n grandissent comme :

$$\exp(\gamma_0 |n| t).$$

Conséquences :

- L'équation linéaire (L) est mal-posée dans les espaces de Sobolev.
- [Han-Kwan & Nguyen 16] : Au voisinages de profils μ instables et **analytiques**, l'équation non-linéaire (kEu) est mal-posée dans les espaces de Sobolev (la preuve est constructive).
- B. 19 : Généralisation dans le cas où μ est une **mesure**.

Caractère mal-posé de (kEu)

Notons :

$$\gamma_0 := \sup_{(n,\lambda) \text{ vérifiant } (Pen)} \frac{\Re(\lambda)}{|n|}.$$

Les MPE de fréquence n grandissent comme :

$$\exp(\gamma_0 |n| t).$$

Conséquences :

- L'équation linéaire (L) est mal-posée dans les espaces de Sobolev.
- [Han-Kwan & Nguyen 16] : Au voisinages de profils μ instables et **analytiques**, l'équation non-linéaire (kEu) est mal-posée dans les espaces de Sobolev (la preuve est constructive).
- B. 19 : Généralisation dans le cas où μ est une **mesure**.
- Idée de la preuve du caractère non lipschitz : comparer les pressions des solutions stationnaires d'une part, et des solutions instables d'autres part.

Preuve du caractère mal posé dans le cas des mesures

Soit $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ une mesure.

Preuve du caractère mal posé dans le cas des mesures

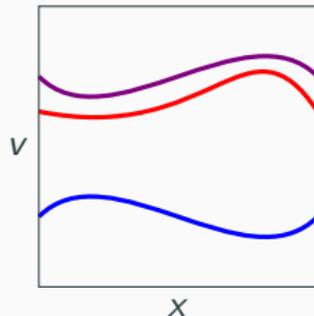
Soit $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ une mesure. On cherche des solutions sous la forme :

$$f(t, x, v) = \int \delta_{v=U^w(t,x)} \rho^w(t, x) d\mu(w).$$

Preuve du caractère mal posé dans le cas des mesures

Soit $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ une mesure. On cherche des solutions sous la forme :

$$f(t, x, v) = \int \delta_{v=u^w(t,x)} \rho^w(t, x) d\mu(w).$$

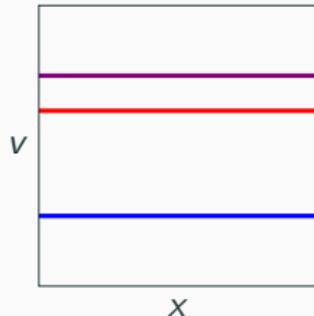


Preuve du caractère mal posé dans le cas des mesures

Soit $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ une mesure. On cherche des solutions sous la forme :

$$f(t, x, v) = \int \delta_{v=u^w(t,x)} \rho^w(t, x) d\mu(w).$$

Si $\rho^w \equiv 1$, $u^w \equiv w$, $w \in \mathbb{R}^d$, on a $f(t, x, \bullet) = \mu$.



Preuve du caractère mal posé dans le cas des mesures

Soit $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ une mesure. On cherche des solutions sous la forme :

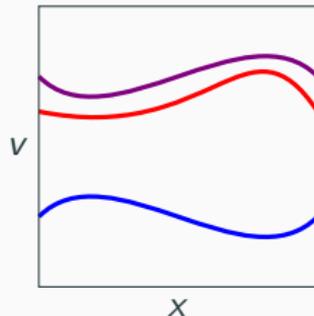
$$f(t, x, v) = \int \delta_{v=u^w(t,x)} \rho^w(t, x) d\mu(w).$$

Si $\rho^w \equiv 1$, $u^w \equiv w$, $w \in \mathbb{R}^d$, on a $f(t, x, \bullet) = \mu$.

Si $(\rho^w, u^w)_{w \in \mathbb{R}^d}$ est solution du système :

$$(MF_\mu) \left\{ \begin{array}{l} \partial_t \rho^w + \operatorname{div}(\rho^w u^w) = 0, \\ \partial_t u^w + (u^w \cdot \nabla) u^w = -\nabla p, \\ -\Delta p = \operatorname{div} \operatorname{div} \int u^w \otimes u^w \rho^w d\mu(w), \\ \rho^w|_{t=0} = \rho_0^w \text{ and } u^w|_{t=0} = u_0^w, \end{array} \right.$$

alors f est solution faible de (kEu).



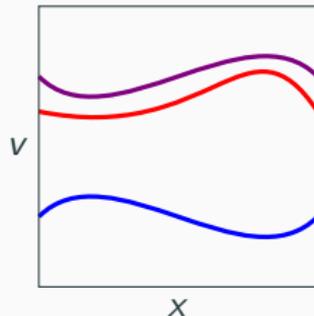
Preuve du caractère mal posé dans le cas des mesures

Soit $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ une mesure. On cherche des solutions sous la forme :

$$f(t, x, v) = \int \delta_{v=u^w(t,x)} \rho^w(t, x) d\mu(w).$$

Si $\rho^w \equiv 1$, $u^w \equiv w$, $w \in \mathbb{R}^d$, on a $f(t, x, \bullet) = \mu$.

Si $(\rho^w, u^w)_{w \in \mathbb{R}^d}$ est solution du système :



$$(MF_\mu) \left\{ \begin{array}{l} \partial_t \rho^w + \operatorname{div}(\rho^w u^w) = 0, \\ \partial_t u^w + (u^w \cdot \nabla) u^w = -\nabla p, \\ -\Delta p = \operatorname{div} \mathbf{div} \int u^w \otimes u^w \rho^w d\mu(w), \\ \rho^w|_{t=0} = \rho_0^w \text{ and } u^w|_{t=0} = u_0^w, \end{array} \right.$$

alors f est solution faible de (kEu). La solution stationnaire $(1, w)_{w \in \mathbb{R}^d}$ est linéairement instable **si et seulement si μ satisfait le critère de Penrose**,

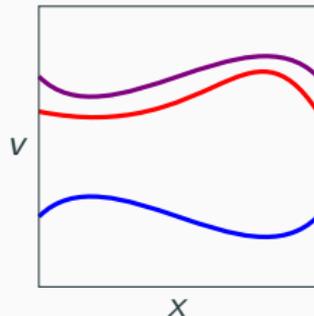
Preuve du caractère mal posé dans le cas des mesures

Soit $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ une mesure. On cherche des solutions sous la forme :

$$f(t, x, v) = \int \delta_{v=u^w(t,x)} \rho^w(t, x) d\mu(w).$$

Si $\rho^w \equiv 1$, $u^w \equiv w$, $w \in \mathbb{R}^d$, on a $f(t, x, \bullet) = \mu$.

Si $(\rho^w, u^w)_{w \in \mathbb{R}^d}$ est solution du système :



$$(MF_\mu) \begin{cases} \partial_t \rho^w + \operatorname{div}(\rho^w u^w) = 0, \\ \partial_t u^w + (u^w \cdot \nabla) u^w = -\nabla p, \\ -\Delta p = \operatorname{div} \mathbf{div} \int u^w \otimes u^w \rho^w d\mu(w), \\ \rho^w|_{t=0} = \rho_0^w \text{ and } u^w|_{t=0} = u_0^w, \end{cases}$$

alors f est solution faible de (kEu). La solution stationnaire $(1, w)_{w \in \mathbb{R}^d}$ est linéairement instable **si et seulement si μ satisfait le critère de Penrose**, et la stratégie de Han-Kwan & Nguyen s'applique. \square

- On ne s'attend pas à ce qu'un de ces deux résultats soit optimal.

- On ne s'attend pas à ce qu'un de ces deux résultats soit optimal.
- L'espace fonctionnel considéré pour la pression est plus gros dans le cas positif que dans le cas négatif.

- On ne s'attend pas à ce qu'un de ces deux résultats soit optimal.
- L'espace fonctionnel considéré pour la pression est plus gros dans le cas positif que dans le cas négatif.
- Il n'y a pas de résultat général assurant $p \in L_t^r L_x^1$.

- On ne s'attend pas à ce qu'un de ces deux résultats soit optimal.
- L'espace fonctionnel considéré pour la pression est plus gros dans le cas positif que dans le cas négatif.
- Il n'y a pas de résultat général assurant $p \in L_t^r L_x^1$.
[Brenier 93 ; Ambrosio & Figalli 08] : $L_{t,\text{loc}}^2 BV_x \subset L_{t,\text{loc}}^2 L_x^1$.

Conclusion et limites de la première partie

- On ne s'attend pas à ce qu'un de ces deux résultats soit optimal.
- L'espace fonctionnel considéré pour la pression est plus gros dans le cas positif que dans le cas négatif.
- Il n'y a pas de résultat général assurant $p \in L_t^r L_x^1$.
[Brenier 93 ; Ambrosio & Figalli 08] : $L_{t,\text{loc}}^2 BV_x \subset L_{t,\text{loc}}^2 L_x^1$.
- Cela laisse ouvert l'existence d'un espace fonctionnel dans lequel la pression dépendrait continûment mais pas de façon lisse des données.

Régularisation entropique

Le problème de Brödinger [ACLZ 17]

Au niveau **processus**, remplacer :

$$\mathcal{A}(P) := \iint_0^1 \frac{|\dot{\omega}_t|^2}{2} dt dP(\omega) \quad \text{par} \quad \nu H(P|R^\nu) := \nu \int \log \left(\frac{dP}{dR^\nu} \right) dP,$$

où R^ν est le mouvement brownien réversible de diffusivité ν .

Le problème de Brödinger [ACLZ 17]

Au niveau **processus**, remplacer :

$$\mathcal{A}(P) := \iint_0^1 \frac{|\dot{\omega}_t|^2}{2} dt dP(\omega) \quad \text{par} \quad \nu H(P|R^\nu) := \nu \int \log \left(\frac{dP}{dR^\nu} \right) dP,$$

où R^ν est le mouvement brownien réversible de diffusivité ν .



Au niveau **multifluide**, ajouter le terme de pénalisation :

$$\mathcal{H}_\nu(\rho, \mathbf{c}) := \int \frac{1}{2} \int_0^1 \int \left\{ |c_t^i(x)|^2 + \left| \frac{\nu}{2} \nabla \log \rho_t^i(x) \right|^2 \right\} \rho_t^i(x) dx dt dm(i),$$

soit $\nu^2 \times$ l'information de Fischer moyenne du système multifluide.

Le problème de Brödinger [ACLZ 17]

Au niveau **processus**, remplacer :

$$\mathcal{A}(P) := \iint_0^1 \frac{|\dot{\omega}_t|^2}{2} dt dP(\omega) \quad \text{par} \quad \nu H(P|R^\nu) := \nu \int \log \left(\frac{dP}{dR^\nu} \right) dP,$$

où R^ν est le mouvement brownien réversible de diffusivité ν .



Au niveau **multifluide**, ajouter le terme de pénalisation :

$$\mathcal{H}_\nu(\rho, \mathbf{c}) := \int \underbrace{\frac{1}{2} \int_0^1 \int \left\{ |c_t^i(x)|^2 + \left| \frac{\nu}{2} \nabla \log \rho_t^i(x) \right|^2 \right\} \rho_t^i(x) dx dt}_{=: \mathcal{H}_\nu(\rho^i, c^i)} dm(i),$$

soit $\nu^2 \times$ l'information de Fischer moyenne du système multifluide.

Le problème de Brödinger [ACLZ 17]

Au niveau **processus**, remplacer :

$$\mathcal{A}(P) := \int \int_0^1 \frac{|\dot{\omega}_t|^2}{2} dt dP(\omega) \quad \text{par} \quad \nu H(P|R^\nu) := \nu \int \log \left(\frac{dP}{dR^\nu} \right) dP,$$

où R^ν est le mouvement brownien réversible de diffusivité ν .

Théorème (Arnaudon, Cruzeiro, Léonard & Zambrini 2017)

Existence unicité $\Leftrightarrow H(\gamma | \text{Leb} \otimes \text{Leb}) < +\infty$.



Au niveau **multifluide**, ajouter le terme de pénalisation :

$$\mathcal{H}_\nu(\rho, \mathbf{c}) := \int \underbrace{\frac{1}{2} \int_0^1 \int \left\{ |c_t^i(x)|^2 + \left| \frac{\nu}{2} \nabla \log \rho_t^i(x) \right|^2 \right\} \rho_t^i(x) dx dt}_{=:\mathcal{H}_\nu(\rho^i, c^i)} dm(i),$$

soit $\nu^2 \times$ l'information de Fischer moyenne du système multifluide.

Le problème de Brödinger [ACLZ 17]

Au niveau **processus**, remplacer :

$$\mathcal{A}(P) := \int \int_0^1 \frac{|\dot{\omega}_t|^2}{2} dt dP(\omega) \quad \text{par} \quad \nu H(P|R^\nu) := \nu \int \log \left(\frac{dP}{dR^\nu} \right) dP,$$

où R^ν est le mouvement brownien réversible de diffusivité ν .

Théorème (Arnaudon, Cruzeiro, Léonard & Zambrini 2017)

Existence unicité $\Leftrightarrow H(\gamma | \text{Leb} \otimes \text{Leb}) < +\infty$.



Au niveau **multifluide**, ajouter le terme de pénalisation :

$$\mathcal{H}_\nu(\rho, \mathbf{c}) := \underbrace{\int \frac{1}{2} \int_0^1 \int \left\{ |c_t^i(x)|^2 + \left| \frac{\nu}{2} \nabla \log \rho_t^i(x) \right|^2 \right\} \rho_t^i(x) dx dt dm(i)}_{=: \mathcal{H}_\nu(\rho^i, c^i)},$$

soit $\nu^2 \times$ l'information de Fischer moyenne du système multifluide.

Théorème (B. & Monnaiegeon 2019)

Existence unicité $\Leftrightarrow \iint \rho_\theta^i \log \rho_\theta^i dx dm(i) < +\infty, \theta = 0, 1$.

Pourquoi ce type de régularisation ?

Si on oublie l'incompressibilité et si à la place de γ , on prescrit les densités initiales et finales : problème de Schrödinger [Schrödinger 31, 32].

Pourquoi ce type de régularisation ?

Si on oublie l'incompressibilité et si à la place de γ , on prescrit les densités initiales et finales : problème de Schrödinger [Schrödinger 31, 32].

- Lien avec les grandes déviations (Théorème de Sanov)
[Dawsont & Gärtner 87 ; Föllmer 88 ; Léonard 2014].

Pourquoi ce type de régularisation ?

Si on oublie l'incompressibilité et si à la place de γ , on prescrit les densités initiales et finales : problème de Schrödinger [Schrödinger 31, 32].

- Lien avec les grandes déviations (Théorème de Sanov) [Dawsont & Gärtner 87 ; Föllmer 88 ; Léonard 2014].
- Méthodes de calcul efficaces *via* l'algorithme de Sinkhorn [Cuturi 2013 ; BCCNP 2015 ; BCN 2017].

Théorème (Benamou, Carlier & Nenna 2017 ; B.M. 2019)

Soit γ bistochastique avec $H(\gamma | \text{Leb} \otimes \text{Leb}) < +\infty$. On a :

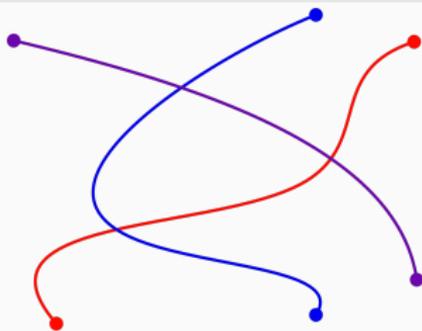
$$\Gamma - \lim_{\nu \rightarrow +\infty} \nu H(\bullet | R^\nu) + \iota_\gamma + \iota_{\text{Inc}} = \mathcal{A} + \iota_\gamma + \iota_{\text{Inc}}.$$

Γ -convergence des processus : ajouts de ponts browniens

Théorème (Benamou, Carlier & Nenna 2017 ; B.M. 2019)

Soit γ bistochastique avec $H(\gamma | \text{Leb} \otimes \text{Leb}) < +\infty$. On a :

$$\Gamma - \lim_{\nu \rightarrow +\infty} \nu H(\bullet | R^\nu) + \iota_\gamma + \iota_{\text{Inc}} = \mathcal{A} + \iota_\gamma + \iota_{\text{Inc}}.$$

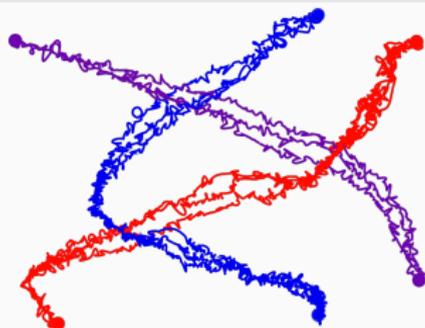


Γ -convergence des processus : ajouts de ponts browniens

Théorème (Benamou, Carlier & Nenna 2017 ; B.M. 2019)

Soit γ bistochastique avec $H(\gamma | \text{Leb} \otimes \text{Leb}) < +\infty$. On a :

$$\Gamma - \lim_{\nu \rightarrow +\infty} \nu H(\bullet | R^\nu) + \iota_\gamma + \iota_{\text{Inc}} = \mathcal{A} + \iota_\gamma + \iota_{\text{Inc}}.$$



Γ -convergence des processus : ajouts de ponts browniens

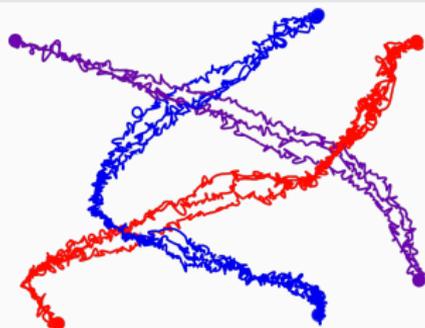
Théorème (Benamou, Carlier & Nenna 2017 ; B.M. 2019)

Soit γ bistochastique avec $H(\gamma | \text{Leb} \otimes \text{Leb}) < +\infty$. On a :

$$\Gamma - \lim_{\nu \rightarrow +\infty} \nu H(\bullet | R^\nu) + \iota_\gamma + \iota_{\text{Inc}} = \mathcal{A} + \iota_\gamma + \iota_{\text{Inc}}.$$

Preuve : ($\Gamma - \lim \sup$).

- B^ν , pont brownien de 0 à 0,
- $T_\omega : h \mapsto h + \omega$.



Γ -convergence des processus : ajouts de ponts browniens

Théorème (Benamou, Carlier & Nenna 2017 ; B.M. 2019)

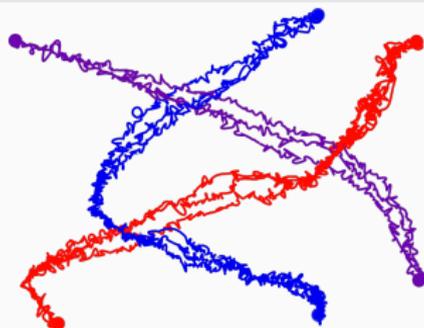
Soit γ bistochastique avec $H(\gamma | \text{Leb} \otimes \text{Leb}) < +\infty$. On a :

$$\Gamma - \lim_{\nu \rightarrow +\infty} \nu H(\bullet | R^\nu) + \iota_\gamma + \iota_{\text{Inc}} = \mathcal{A} + \iota_\gamma + \iota_{\text{Inc}}.$$

Preuve : ($\Gamma - \lim \sup$).

- B^ν , pont brownien de 0 à 0,
- $T_\omega : h \mapsto h + \omega$.

Soit P un candidat pour $\text{TOI}(\gamma)$.



Γ -convergence des processus : ajouts de ponts browniens

Théorème (Benamou, Carlier & Nenna 2017 ; B.M. 2019)

Soit γ bistochastique avec $H(\gamma | \text{Leb} \otimes \text{Leb}) < +\infty$. On a :

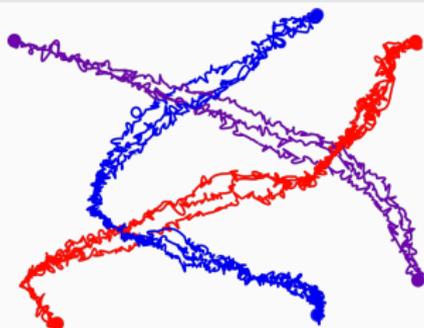
$$\Gamma - \lim_{\nu \rightarrow +\infty} \nu H(\bullet | R^\nu) + \iota_\gamma + \iota_{\text{Inc}} = \mathcal{A} + \iota_\gamma + \iota_{\text{Inc}}.$$

Preuve : ($\Gamma - \lim \sup$).

- B^ν , pont brownien de 0 à 0,
- $T_\omega : h \mapsto h + \omega$.

Soit P un candidat pour $\text{TOI}(\gamma)$.

$$P = \int \delta_\omega \, dP(\omega) \quad \rightsquigarrow \quad P^\nu := \int T_{\omega\#} B^\nu \, dP(\omega).$$



Γ -convergence des processus : ajouts de ponts browniens

Théorème (Benamou, Carlier & Nenna 2017 ; B.M. 2019)

Soit γ bistochastique avec $H(\gamma | \text{Leb} \otimes \text{Leb}) < +\infty$. On a :

$$\Gamma - \lim_{\nu \rightarrow +\infty} \nu H(\bullet | R^\nu) + \iota_\gamma + \iota_{\text{Inc}} = \mathcal{A} + \iota_\gamma + \iota_{\text{Inc}}.$$

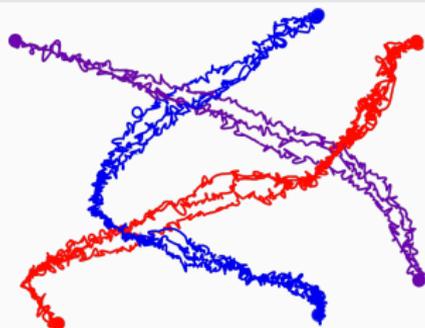
Preuve : ($\Gamma - \lim \sup$).

- B^ν , pont brownien de 0 à 0,
- $T_\omega : h \mapsto h + \omega$.

Soit P un candidat pour $\text{TOI}(\gamma)$.

$$P = \int \delta_\omega \, dP(\omega) \quad \rightsquigarrow \quad P^\nu := \int T_{\omega\#} B^\nu \, dP(\omega).$$

Extrémités OK,



Γ -convergence des processus : ajouts de ponts browniens

Théorème (Benamou, Carlier & Nenna 2017 ; B.M. 2019)

Soit γ bistochastique avec $H(\gamma | \text{Leb} \otimes \text{Leb}) < +\infty$. On a :

$$\Gamma - \lim_{\nu \rightarrow +\infty} \nu H(\bullet | R^\nu) + \iota_\gamma + \iota_{\text{Inc}} = \mathcal{A} + \iota_\gamma + \iota_{\text{Inc}}.$$

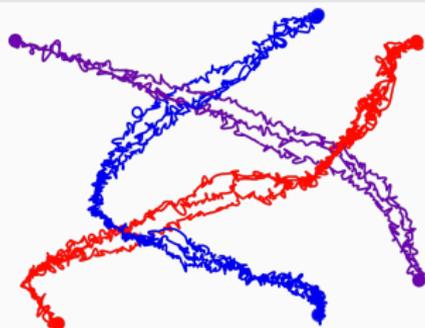
Preuve : ($\Gamma - \lim \sup$).

- B^ν , pont brownien de 0 à 0,
- $T_\omega : h \mapsto h + \omega$.

Soit P un candidat pour $\text{TOI}(\gamma)$.

$$P = \int \delta_\omega dP(\omega) \rightsquigarrow P^\nu := \int T_{\omega\#} B^\nu dP(\omega).$$

Extrémités OK, incompressibilité OK,



Γ -convergence des processus : ajouts de ponts browniens

Théorème (Benamou, Carlier & Nenna 2017 ; B.M. 2019)

Soit γ bistochastique avec $H(\gamma | \text{Leb} \otimes \text{Leb}) < +\infty$. On a :

$$\Gamma - \lim_{\nu \rightarrow +\infty} \nu H(\bullet | R^\nu) + \iota_\gamma + \iota_{\text{Inc}} = \mathcal{A} + \iota_\gamma + \iota_{\text{Inc}}.$$

Preuve : ($\Gamma - \lim \sup$).

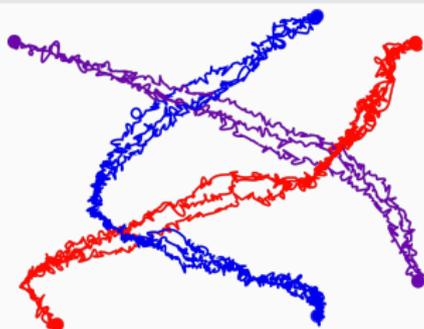
- B^ν , pont brownien de 0 à 0,
- $T_\omega : h \mapsto h + \omega$.

Soit P un candidat pour $\text{TOI}(\gamma)$.

$$P = \int \delta_\omega dP(\omega) \rightsquigarrow P^\nu := \int T_{\omega\#} B^\nu dP(\omega).$$

Extrémités OK, incompressibilité OK, et :

$$\limsup_{\nu \rightarrow 0} \nu H(P^\nu | R^\nu) \leq \mathcal{A}(P).$$



Théorème (B. & Monsaingeon 2019)

Soient (ρ_0, ρ_1) avec $\iint \rho_0^i \log \rho_0^i dx dm(i), \iint \rho_1^i \log \rho_1^i dx dm(i) < +\infty$.

On a :

$$\Gamma - \lim_{\nu \rightarrow 0} \mathcal{H}_\nu + \iota_{(\rho_0, \rho_1)} + \iota_{\text{Inc}} = \mathcal{A} + \iota_{(\rho_0, \rho_1)} + \iota_{\text{Inc}}.$$

Théorème (B. & Monsaingeon 2019)

Soient (ρ_0, ρ_1) avec $\iint \rho_0^i \log \rho_0^i dx dm(i), \iint \rho_1^i \log \rho_1^i dx dm(i) < +\infty$.

On a :

$$\Gamma - \lim_{\nu \rightarrow 0} \mathcal{H}_\nu + \iota_{(\rho_0, \rho_1)} + \iota_{\text{Inc}} = \mathcal{A} + \iota_{(\rho_0, \rho_1)} + \iota_{\text{Inc}}.$$

Preuve : ($\Gamma - \lim \sup$).

Théorème (B. & Monsaingeon 2019)

Soient (ρ_0, ρ_1) avec $\iint \rho_0^i \log \rho_0^i dx dm(i), \iint \rho_1^i \log \rho_1^i dx dm(i) < +\infty$.

On a :

$$\Gamma - \lim_{\nu \rightarrow 0} \mathcal{H}_\nu + \iota_{(\rho_0, \rho_1)} + \iota_{\text{Inc}} = \mathcal{A} + \iota_{(\rho_0, \rho_1)} + \iota_{\text{Inc}}.$$

Preuve : ($\Gamma - \lim \sup$). Soit (ρ, \mathbf{c}) un compétiteur.

Théorème (B. & Monsaingeon 2019)

Soient (ρ_0, ρ_1) avec $\iint \rho_0^i \log \rho_0^i dx dm(i), \iint \rho_1^i \log \rho_1^i dx dm(i) < +\infty$.

On a :

$$\Gamma - \lim_{\nu \rightarrow 0} \mathcal{H}_\nu + \iota_{(\rho_0, \rho_1)} + \iota_{\text{Inc}} = \mathcal{A} + \iota_{(\rho_0, \rho_1)} + \iota_{\text{Inc}}.$$

Preuve : ($\Gamma - \lim \sup$). Soit (ρ, \mathbf{c}) un compétiteur. Pour chaque i :

$$(\rho_t^{\nu, i}, \mathbf{c}_t^{\nu, i}) := \left(\rho_t^i * \tau_{\nu t(1-t)}, \frac{(\rho_t^i \mathbf{c}_t^i) * \tau_{\nu t(1-t)}}{\rho_t^i * \tau_{\nu t(1-t)}} + \nu \left(t - \frac{1}{2} \right) \nabla \log \rho_t^i \right),$$

où $(\tau_s)_{s \geq 0}$ est le noyau de la chaleur.

Théorème (B. & Monsaingeon 2019)

Soient (ρ_0, ρ_1) avec $\iint \rho_0^i \log \rho_0^i dx dm(i), \iint \rho_1^i \log \rho_1^i dx dm(i) < +\infty$.

On a :

$$\Gamma - \lim_{\nu \rightarrow 0} \mathcal{H}_\nu + \iota_{(\rho_0, \rho_1)} + \iota_{\text{Inc}} = \mathcal{A} + \iota_{(\rho_0, \rho_1)} + \iota_{\text{Inc}}.$$

Preuve : ($\Gamma - \lim \sup$). Soit (ρ, \mathbf{c}) un compétiteur. Pour chaque i :

$$(\rho_t^{\nu, i}, \mathbf{c}_t^{\nu, i}) := \left(\rho_t^i * \tau_{\nu t(1-t)}, \frac{(\rho_t^i \mathbf{c}_t^i) * \tau_{\nu t(1-t)}}{\rho_t^i * \tau_{\nu t(1-t)}} + \nu \left(t - \frac{1}{2} \right) \nabla \log \rho_t^i \right),$$

où $(\tau_s)_{s \geq 0}$ est le noyau de la chaleur. Équation de continuité OK,

Théorème (B. & Monsaingeon 2019)

Soient (ρ_0, ρ_1) avec $\iint \rho_0^i \log \rho_0^i dx dm(i), \iint \rho_1^i \log \rho_1^i dx dm(i) < +\infty$.

On a :

$$\Gamma - \lim_{\nu \rightarrow 0} \mathcal{H}_\nu + \iota_{(\rho_0, \rho_1)} + \iota_{\text{Inc}} = \mathcal{A} + \iota_{(\rho_0, \rho_1)} + \iota_{\text{Inc}}.$$

Preuve : ($\Gamma - \lim \sup$). Soit (ρ, \mathbf{c}) un compétiteur. Pour chaque i :

$$(\rho_t^{\nu, i}, \mathbf{c}_t^{\nu, i}) := \left(\rho_t^i * \tau_{\nu t(1-t)}, \frac{(\rho_t^i \mathbf{c}_t^i) * \tau_{\nu t(1-t)}}{\rho_t^i * \tau_{\nu t(1-t)}} + \nu \left(t - \frac{1}{2} \right) \nabla \log \rho_t^i \right),$$

où $(\tau_s)_{s \geq 0}$ est le noyau de la chaleur. Équation de continuité OK,
extrémités OK,

Théorème (B. & Monsaingeon 2019)

Soient (ρ_0, ρ_1) avec $\iint \rho_0^i \log \rho_0^i dx dm(i), \iint \rho_1^i \log \rho_1^i dx dm(i) < +\infty$.

On a :

$$\Gamma - \lim_{\nu \rightarrow 0} \mathcal{H}_\nu + \iota_{(\rho_0, \rho_1)} + \iota_{\text{Inc}} = \mathcal{A} + \iota_{(\rho_0, \rho_1)} + \iota_{\text{Inc}}.$$

Preuve : ($\Gamma - \lim \sup$). Soit (ρ, \mathbf{c}) un compétiteur. Pour chaque i :

$$(\rho_t^{\nu, i}, \mathbf{c}_t^{\nu, i}) := \left(\rho_t^i * \tau_{\nu t(1-t)}, \frac{(\rho_t^i \mathbf{c}_t^i) * \tau_{\nu t(1-t)}}{\rho_t^i * \tau_{\nu t(1-t)}} + \nu \left(t - \frac{1}{2} \right) \nabla \log \rho_t^i \right),$$

où $(\tau_s)_{s \geq 0}$ est le noyau de la chaleur. Équation de continuité OK,
extrémités OK, incompressibilité OK.

Lemme

On note $H(\rho) := \int \rho \log \rho \, dx$.

Lemme

On note $H(\rho) := \int \rho \log \rho \, dx$. On a :

$$\mathcal{H}_\nu(\rho^{\nu,i}, c^{\nu,i}) \leq \mathcal{A}(\rho^i, c^i) + \nu \left[\frac{H(\rho_0^i) + H(\rho_1^i)}{2} + C \right],$$

Lemme

On note $H(\rho) := \int \rho \log \rho \, dx$. On a :

$$\mathcal{H}_\nu(\rho^{\nu,i}, c^{\nu,i}) \leq \mathcal{A}(\rho^i, c^i) + \nu \left[\frac{H(\rho_0^i) + H(\rho_1^i)}{2} + C \right],$$
$$\mathcal{A}(\rho^{\nu,i}, c^{\nu,i}) \leq \mathcal{A}(\rho^i, c^i) + \nu \left[\frac{H(\rho_0^i) + H(\rho_1^i)}{2} - \int_0^1 H(\rho_t^{\nu,i}) \, dt \right].$$

Lemme

On note $H(\rho) := \int \rho \log \rho \, dx$. On a :

$$\mathcal{H}_\nu(\rho^{\nu,i}, c^{\nu,i}) \leq \mathcal{A}(\rho^i, c^i) + \nu \left[\frac{H(\rho_0^i) + H(\rho_1^i)}{2} + C \right],$$
$$\mathcal{A}(\rho^{\nu,i}, c^{\nu,i}) \leq \mathcal{A}(\rho^i, c^i) + \nu \left[\frac{H(\rho_0^i) + H(\rho_1^i)}{2} - \int_0^1 H(\rho_t^{\nu,i}) \, dt \right].$$

- En l'intégrant par rapport à m , première inégalité permet de conclure la preuve de la Γ – lim sup. □

Une estimation sur les courbes perturbées

Lemme

On note $H(\rho) := \int \rho \log \rho \, dx$. On a :

$$\mathcal{H}_\nu(\rho^{\nu,i}, c^{\nu,i}) \leq \mathcal{A}(\rho^i, c^i) + \nu \left[\frac{H(\rho_0^i) + H(\rho_1^i)}{2} + C \right],$$

$$\mathcal{A}(\rho^{\nu,i}, c^{\nu,i}) \leq \mathcal{A}(\rho^i, c^i) + \nu \left[\frac{H(\rho_0^i) + H(\rho_1^i)}{2} - \int_0^1 H(\rho_t^{\nu,i}) \, dt \right].$$

- En l'intégrant par rapport à m , première inégalité permet de conclure la preuve de la Γ – lim sup. □
- La seconde permet de démontrer le résultat de convexité de l'entropie suivant.

$$\mathcal{A}(\rho^{\nu,i}, c^{\nu,i}) \leq \mathcal{A}(\rho^i, c^i) + \nu \left[\frac{H(\rho_0^i) + H(\rho_1^i)}{2} - \int_0^1 H(\rho_t^{\nu,i}) dt \right].$$

$$\mathcal{A}(\rho^{\nu,i}, c^{\nu,i}) \leq \mathcal{A}(\rho^i, c^i) + \nu \left[\frac{H(\rho_0^i) + H(\rho_1^i)}{2} - \int_0^1 H(\rho_t^{\nu,i}) dt \right].$$

Théorème (Lavenant 2017 ; B. & Monsaingeon 2019)

Soit (ρ, c) une solution du TOI ou de Brödinger. Alors :

$$t \mapsto \int H(\rho_t^i) dm(i) \quad \text{est convexe.}$$

$$\mathcal{A}(\rho^{\nu,i}, c^{\nu,i}) \leq \mathcal{A}(\rho^i, c^i) + \nu \left[\frac{H(\rho_0^i) + H(\rho_1^i)}{2} - \int_0^1 H(\rho_t^{\nu,i}) dt \right].$$

Théorème (Lavenant 2017 ; B. & Monsaingeon 2019)

Soit (ρ, c) une solution du TOI ou de Brödinger. Alors :

$$t \mapsto \int H(\rho_t^i) dm(i) \quad \text{est convexe.}$$

Preuve : Si (ρ, c) est une solution du transport optimal incompressible :

$$\int \mathcal{A}(\rho^i, c^i) dm(i) = \mathcal{A}(\rho, c) \leq \mathcal{A}(\rho^\nu, c^\nu) = \int \mathcal{A}(\rho^{\nu,i}, c^{\nu,i}) dm(i).$$

Convexité de l'entropie moyenne

$$\mathcal{A}(\rho^{\nu,i}, c^{\nu,i}) \leq \mathcal{A}(\rho^i, c^i) + \nu \left[\frac{H(\rho_0^i) + H(\rho_1^i)}{2} - \int_0^1 H(\rho_t^{\nu,i}) dt \right].$$

Théorème (Lavenant 2017 ; B. & Monsaingeon 2019)

Soit (ρ, c) une solution du TOI ou de Brödinger. Alors :

$$t \mapsto \int H(\rho_t^i) dm(i) \text{ est convexe.}$$

Preuve : Si (ρ, c) est une solution du transport optimal incompressible :

$$\int \mathcal{A}(\rho^i, c^i) dm(i) = \mathcal{A}(\rho, c) \leq \mathcal{A}(\rho^\nu, c^\nu) = \int \mathcal{A}(\rho^{\nu,i}, c^{\nu,i}) dm(i).$$

Donc :

$$\int_0^1 \int H(\rho_t^{\nu,i}) dm(i) dt \leq \frac{\int H(\rho_0^i) dm(i) + \int H(\rho_1^i) dm(i)}{2}. \quad \square$$

Théorème (B. 2018)

Soit $\nu > 0$, γ bistochastique avec $H(\gamma | \text{Leb} \otimes \text{Leb}) < \infty$. Il existe un unique $p^\nu \in \mathcal{D}'((0, 1) \times \mathbb{T}^d)$ telle que si P^ν est la solution de Brödinger et si Q est compatible avec γ et de densité ρ_Q régulière :

$$H(Q | R^\nu) \geq H(P^\nu | R^\nu) + \langle p^\nu, \rho_Q - 1 \rangle.$$

Théorème (B. 2018)

Soit $\nu > 0$, γ bistochastique avec $H(\gamma | \text{Leb} \otimes \text{Leb}) < \infty$. Il existe un unique $p^\nu \in \mathcal{D}'((0, 1) \times \mathbb{T}^d)$ telle que si P^ν est la solution de Brödinger et si Q est compatible avec γ et de densité ρ_Q régulière :

$$H(Q | R^\nu) \geq H(P^\nu | R^\nu) + \langle p^\nu, \rho_Q - 1 \rangle.$$

Théorème (B. & Monsaingeon 2019)

Soit $(p^\nu)_{\nu > 0}$ comme dans le théorème précédent et p la pression du TOI(γ). On a :

$$\lim_{\nu \rightarrow 0} p^\nu = p \quad \text{dans } \mathcal{G}'.$$

où

$$\mathcal{G} := \left\{ f \in C_c^{1,2}((0, 1) \times \mathbb{T}^d) \mid \int f(t, x) dx \equiv 0 \right\}.$$

- Notre preuve est nouvelle même dans le cas "monophasique" du transport optimal et du problème de Schrödinger.

- Notre preuve est nouvelle même dans le cas "monophasique" du transport optimal et du problème de Schrödinger. Dans ce cas, on retrouve des résultats dus à :

- Notre preuve est nouvelle même dans le cas "monophasique" du transport optimal et du problème de Schrödinger. Dans ce cas, on retrouve des résultats dus à :
 - [Léonard 12; Carlier, Duval, Peyré & Schmitzer 17] pour la Γ -convergence,

- Notre preuve est nouvelle même dans le cas "monophasique" du transport optimal et du problème de Schrödinger. Dans ce cas, on retrouve des résultats dus à :
 - [Léonard 12 ; Carlier, Duval, Peyré & Schmitzer 17] pour la Γ -convergence,
 - [McCann 97 ; Léonard 17] pour la convexité de l'entropie.

- Notre preuve est nouvelle même dans le cas "monophasique" du transport optimal et du problème de Schrödinger. Dans ce cas, on retrouve des résultats dus à :
 - [Léonard 12 ; Carlier, Duval, Peyré & Schmitzer 17] pour la Γ -convergence,
 - [McCann 97 ; Léonard 17] pour la convexité de l'entropie.
- Laquelle des solutions du TOI est sélectionnée par Brödinger quand $\nu \rightarrow 0$?

- Notre preuve est nouvelle même dans le cas "monophasique" du transport optimal et du problème de Schrödinger. Dans ce cas, on retrouve des résultats dus à :
 - [Léonard 12 ; Carlier, Duval, Peyré & Schmitzer 17] pour la Γ -convergence,
 - [McCann 97 ; Léonard 17] pour la convexité de l'entropie.
- Laquelle des solutions du TOI est sélectionnée par Brödinger quand $\nu \rightarrow 0$?
- Chaque phase est-elle une solution d'un problème de Schrödinger dont le potentiel est la pression ?

- Notre preuve est nouvelle même dans le cas "monophasique" du transport optimal et du problème de Schrödinger. Dans ce cas, on retrouve des résultats dus à :
 - [Léonard 12 ; Carlier, Duval, Peyré & Schmitzer 17] pour la Γ -convergence,
 - [McCann 97 ; Léonard 17] pour la convexité de l'entropie.
- Laquelle des solutions du TOI est sélectionnée par Brödinger quand $\nu \rightarrow 0$?
- Chaque phase est-elle une solution d'un problème de Schrödinger dont le potentiel est la pression ?
- Quelle est la régularité de la pression dans Brödinger ?

Des personnalités cruciales pour ma thèse

