Université Claude Bernard Lyon I
Licence deuxième année : Algèbre IV
Mardi 2 juin 2015

Partiel Algèbre IV

—

Durée : 2H. Aucun document n'est autorisé

Exercice 1 (Questions du cours).

1. Énoncer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
2. Soit E un espace euclidien, $f\colon E \to E$ une transformation linéaire. Rappeler la définition de l'adjoint f^*.
3. Rappeler la définition d'une matrice orthogonale $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Est-il possible que $\det(A)$ soit égal à 3 ?

Correction.

1. Soit E un espace Euclidien. Alors pour tout $x, y \in E$ on a $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$. De plus, il y a égalité si et seulement si x et y sont colinéaires.
2. $f^*\colon E \to E$ est l'unique application linéaire telle que $\langle x, fy\rangle = \langle f^*x, y\rangle$ pour tout $x, y \in E$.
3. A est dite orthogonale si $A^{-1} = {}^tA$, ou, d'une manière équivalente, ${}^tAA = I$. Dans ce case $\det I = \pm 1$, le déterminant 3 n'est pas possible.

Exercice 2. On munit $\mathbf{R}^4$ du produit scalaire usuel. On pose

$$\begin{aligned} u_1 &= (1, 2, -1, -2), \\ u_2 &= (2, 3, 0, -1), \\ u_3 &= (5, -2, -5, -2), \\ \text{et } F &= \mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3) \subseteq \mathbf{R}^4. \end{aligned}$$

Trouver une base orthonormée de F.

Correction. On applique Gram-Schmidt. D'abord, orthogonalisons.

$$v_1 = u_1$$

$$\begin{aligned} v_2 &= u_2 - \frac{\langle v_1, u_2\rangle}{\|v_1\|^2} v_1 = u_2 - \frac{10}{10} v_1 \\ &= (1, 1, 1, 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_3 &= u_3 - \frac{\langle v_1, u_3\rangle}{\|v_1\|^2} v_1 - \frac{\langle v_2, u_3\rangle}{\|v_2\|^2} v_2 = u_3 - \frac{10}{10} v_1 - \frac{-4}{4} v_2 \\ &= (4, -4, -4, 0) + v_2 = (5, -3, -3, 1) \end{aligned}$$

À ce stade il convient de vérifier que (v_1, v_2, v_3) est bien une famille orthogonale. Puis on normalise :

$$w_1 = v_1/\|v_1\| = \frac{1}{\sqrt{10}} v_1$$

$$w_2 = v_2/\|v_2\| = \frac{1}{2} v_2$$

$$w_3 = v_3/\|v_3\| = \frac{1}{2\sqrt{11}} v_3$$

Exercice 3. Dans cet exercice, pour chaque question on peut admettre les questions précédentes.

On munit $\mathbf{R}^n$ du produit scalaire standard $\langle X, Y\rangle = {}^tXY = x_1y_1 + \ldots + x_ny_n$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ une matrice inversible.

1. Justifier que $\mathbf{R}^n$ admet une base orthonormée $\mathcal{B} = \{U_1, \ldots, U_n\}$, telle que chaque U_i est un vecteur propre de la matrice ${}^tAA$. On notera λ_i la valeur propre correspondante.
2. Justifier que $\|AU_i\|^2 = \lambda_i > 0$ pour chaque i.
3. Posons $V_i = AU_i/\sqrt{\lambda_i}$. Justifier que la famille $\{V_1, \ldots, V_n\}$ est une base orthonormée de $\mathbf{R}^n$.
4. Justifier que V_i est un vecteur propre (non nul) de $A\,{}^tA$ pour chaque i. Quelle est la valeur propre correspondante ?
5. **(Question bonus)**
   Soit $V \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ la matrice dont les colonnes sont $V_1, \ldots, V_n$.
   Soit $U \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ la matrice dont les colonnes sont $U_1, \ldots, U_n$.
   Soit $\Lambda = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & & \\ & \sqrt{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}$.
   Justifier que U et V sont des matrices orthogonales et que $A = V\Lambda{}^tU$.

Correction.

1. La matrice ${}^tAA$ est symétrique. D'après le théorème spectral elle est diagonalisable dans une base orthonormée. Autrement dit, il existe une base orthonormée qui consiste en des vecteurs propres de cette matrice.
2. Puisque A est inversible on a $AU_i \neq 0$ d'où $\|AU_i\| \neq 0$ et $\|AU_i\|^2 > 0$. Maintenant,

$$\begin{aligned}\|AU_i\|^2 &= \langle AU_i, AU_i\rangle = {}^t(AU_i)AU_i = {}^tU_i{}^tAAU_i = {}^tU_i(\lambda_iU_i)\\ &= \lambda_i\langle U_i, U_i\rangle = \lambda_i\end{aligned}$$

3. Si $i \neq j$ on a

$$\langle AU_i, AU_j\rangle = {}^t(AU_i)AU_j = {}^tU_i{}^tAAU_i = {}^tU_i(\lambda_jU_j) = \lambda_j\langle U_i, U_j\rangle = 0.$$

   Ainsi la famille $(AU_1, \ldots, AU_n)$ est orthogonale. Divisant chaque vecteur par sa norme on obtient une base orthonormée.

4. On a

$$A{}^tAV_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}A{}^tAAU_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}A(\lambda_iU_i) = \lambda_iV_i.$$

5. Puisque les colonnes de U forment une base orthonormée de $\mathbf{R}^n$, c'est une matrice orthogonale. Pareil pour V.
   Montrons que $V\Lambda = AU$: La $i$ème colonne de $V\Lambda$ est $\sqrt{\lambda_i}V_i$. La $i$ème colonne de AU est AU_i. Or, $AU_i = \sqrt{\lambda_i}V_i$, d'où $V\Lambda = AU$. Puisque $U^{-1} = {}^tU$ on a $V\Lambda {}^tU = A$.

Exercice 4. Soit $E \subseteq \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices de trace nulle, et soit $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices de trace 1.

1. Pour $A, B \in \mathcal{E}$ on pose $\overrightarrow{AB} = B - A$. Montrer que $\overrightarrow{AB} \in E$ et que $\mathcal{E}$ est un espace affine dirigé par E.
2. Montrer que l'application $t\colon \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ définie par $t(A) = {}^tA$ est une application affine.

Correction.

1. Comme la trace est une application linéaire, son noyau, qui est E, est bien un espace vectoriel. Si $A, B \in \mathcal{E}$ alors $\mathrm{Tr}(\overrightarrow{AB}) = \mathrm{Tr}(B) - \mathrm{Tr}(A) = 0$ d'où $\overrightarrow{AB} \in E$. Si on fixe $A \in \mathcal{E}$ alors une matrice M de trace nulle il existe une unique matrice $B \in \mathcal{E}$ t.q. $M = \overrightarrow{AB}$: à savoir, $B = M + A$. Ainsi l'application qui à $B \in \mathcal{E}$ associe $\overrightarrow{AB} \in E$ est bien une bijection.
   Finalement, la relation de Chasles est vérifiée :
   $$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = B - A + C - B = C - A = \overrightarrow{AC}.$$
2. Il suffirait de vérifier qu'il existe une application linéaire $L_t\colon E \to E$ t.q. pour tous $A, B \in \mathcal{E}$:
   $$\overrightarrow{t(A)t(B)} = L_t(\overrightarrow{AB})$$
   En effet :
   $$\overrightarrow{t(A)t(B)} = {}^tB - {}^tA = {}^t(B - A) = {}^t\overrightarrow{AB}$$
   Ainsi, on a $L_t(M) = {}^tM$, qui est bien une application linéaire $L_t\colon E \to E$. (On pourrait également vérifier que pour une origine $O \in \mathcal{E}$ fixée arbitrairement, et pour tout $A \in \mathcal{E}$: $t(A) = t(O) + L_t(\overrightarrow{OA})$, avec $L_t(M) = {}^tM$ comme plus haut).